Aproximarea Numerică a Funcţiilor

Laboratorul de Cercetare în METODE NUMERICE
NUMERICAL METHODS Research Laboratory
Technical University of Cluj-Napoca

As. Dr. ing. **Levente CZUMBIL**
E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro
WebPage: http://users.utcluj.ro/~czumbil

Aplicaţie

Amplasarea tablourilor de distribuţie a energiei electrice într-o construcţie industrială se face în faza proiectării instalaţiei electrice, pe baza determinării momentelor minime ale curenţilor ceruţi.

În relaţiile de calcul sumator al acestor momente ale curenţilor ceruţi în instalatie, intră coeficientul numit: de influenţă. Dacă se cunoaşte o formă analitică de variaţie a acestui coeficient, identificarea punctelor de minim ale momentelor curenţilor ceruţi devine o problemă relativ simplă, fiindcă se reduce la evaluarea unei funcţii analitice, datorată coeficientului dependent de numărul de receptoare.

n \\ numarul de receptoare (number of loads);

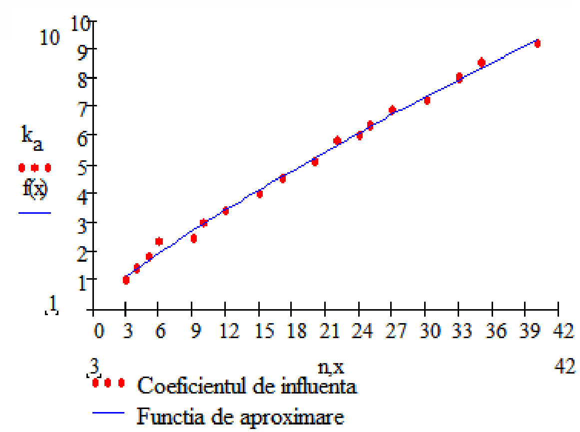
$n := (3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 9\ \ 10\ \ 12\ \ 15\ \ 17\ \ 20\ \ 22\ \ 24\ \ 25\ \ 27\ \ 30\ \ 33\ \ 35\ \ 40)$

k_a \\ coeficientul de influenta (influence coefficient);

$k_a := (1\ \ 1.4\ \ 1.8\ \ 2.35\ \ 2.5\ \ 3\ \ 3.4\ \ 4\ \ 4.5\ \ 5.1\ \ 5.8\ \ 6\ \ 6.35\ \ 6.9\ \ 7.2\ \ 8\ \ 8.5\ \ 9.2)$

$$K_a(n, A, B, C, D) = A\cdot n^2 + B\cdot n + C + D\cdot \log(n)$$

A, B, C, D

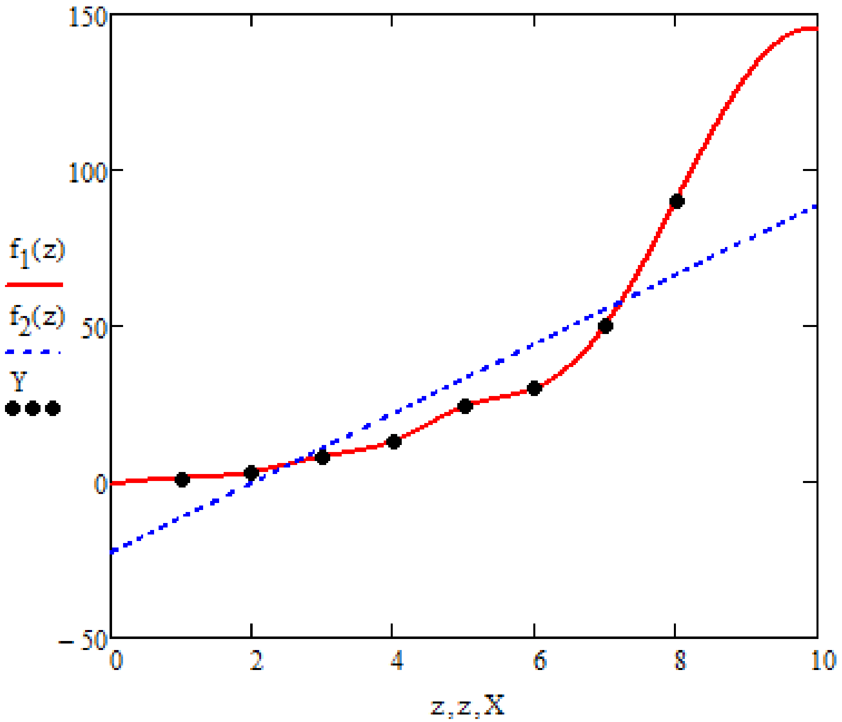


Introducere

În general în aplicațiile din domeniul electrotehnic **nu se cunoaşte expresia analitică** a funcţiei care trebuie aproximată ci **doar valorile** ei într-un anumit număr de puncte.

În cadrul procesului de aproximare numerică se pot utiliza două tipuri de funcţii:

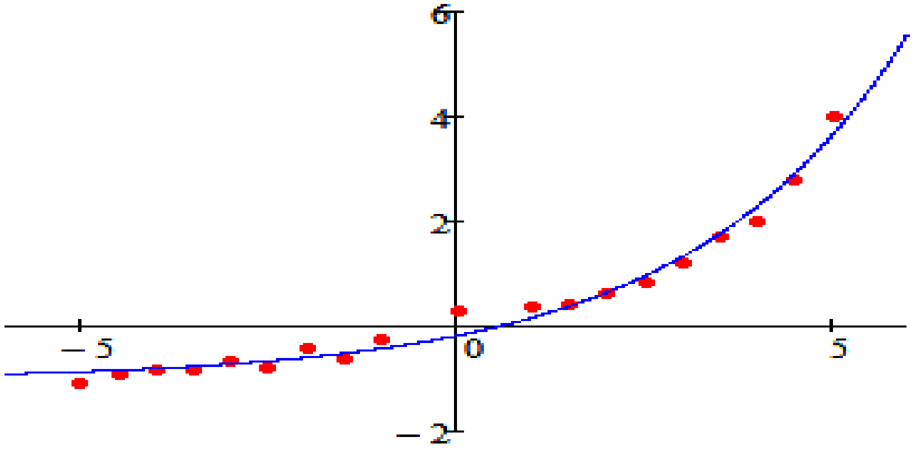
- funcții de **interpolare**, care **trec prin toate punctele cunoscute**;
- funcții de **aproximare**, care **nu trec prin toate punctele cunoscute**, dar au o formă predefinită;



Introducere

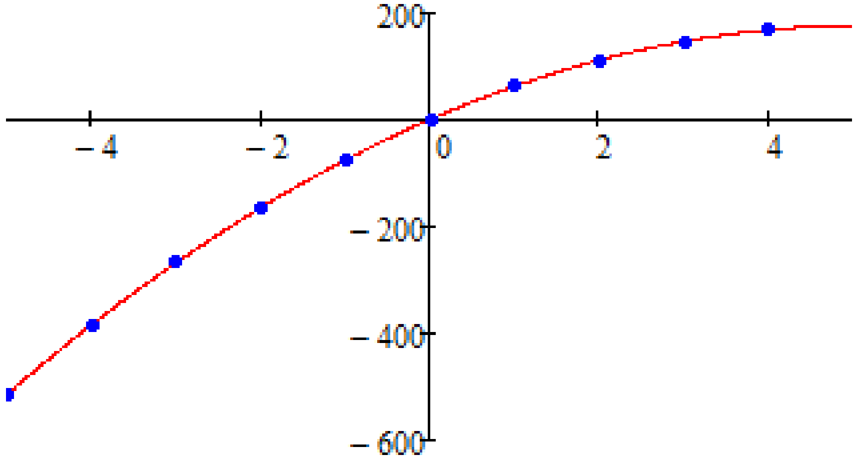
Aproximarea bazată pe funcții având o anumită formă predefinită:

- **line**
- **medift**
- **linfit**
- **logfit**
- **expfit**
- **genfit**



Interpolarea folosind funcțiile predefinite de tip **spline** din Mathcad:

- **interp**
- **linterp**
- **lspline**
- **pspline**
- **cspline**



Aproximarea cu abatere medie pătratică minimă

Se utilizează pentru aproximarea funcţiilor definite prin noduri ale căror coordonate prezintă un oarecare grad de incertitudine. Este cazul funcţiilor ce exprimă dependenţe obţinute experimental prin măsurători sau ca urmare a unor calcule care folosesc rezultatele măsurătorilor.

Funcţia de aproximare *f(x)* nu trece prin toate cele *n* noduri sau chiar prin nici unul dar este cel mai aproape de toate acestea. Metoda urmăreşte minimizarea erorii calculate de norma euclidiana (suma pătratelor abaterilor dintre datele experimentale şi cele determinate teoretic).

$$f(x) = m \cdot x + b$$

$$F(m,b) = \sum_{k=1}^{n} \left[y_k - f(x_k) \right]^2$$

Determinarea aproximării în sensul celor mai mici pătrate se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuaţii algebrice liniare cu un număr de ecuaţii mai mare decât numărul de necunoscute, care este supradeterminat.

$$\begin{cases} m \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right) + b \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k \\ m \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) + b \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} 1 \right) = \sum_{k=1}^{n} y_k \end{cases}$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Aproximarea cu abatere medie pătratică minimă

Fie un șir de puncte *x(i)* cărora le corespund valorile *y(i)*. Să se aproximeze printr-un polinom de gradul 2 funcția de legătură dintre cele două şiruri de valori.

Pasul 1. Se definesc cele două șiruri *x(i)*, respectiv *y(i)*. Pentru definirea șirului de valori *y(i)* se foloseşte funcția: $f(x) = -6.78 \cdot x^2 + 69 \cdot x + 1$

$$f(x) := -6.78 \cdot x^2 + 69 \cdot x + 1$$

$$n := 9 \qquad i := 0..n \qquad x_i := i - 5 \qquad y_i := f(x_i)$$

$$x^T = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$y^T = \begin{pmatrix} -513.5 & -383.48 & -276.02 & -164.12 & -74.78 & 1 & 63.22 & 111.88 & 146.98 & 168.52 \end{pmatrix}$$

Pasul 2. Polinom de gradul 2 care trebuie să aproximeze funcția de legătură dintre șirurile *x(i)* și *y(i)* are forma: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

Pe baza acestui polinom eroarea medie pătratică va fi definită de următoarea formulă:

$$\mathrm{ErrMedPat}(a,b,c) = \sum_{k=0}^{n} \left[y_k - \left[a \cdot (x_k)^2 + b \cdot x_k + c \right] \right]^2$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Aproximarea cu abatere medie pătratică minimă

Pasul 3. Condiția de minimizare a abaterii medii pătratice este dată sistemul de ecuaţii reprezentate de derivatele parţiale ale acestei abateri în funcție de coeficienţii *a*, *b* și *c* ai polinomului de aproximare:

$$\frac{d}{da}\mathrm{ErrMedPat}(a,b,c) = 0 \qquad \frac{d}{db}\mathrm{ErrMedPat}(a,b,c) = 0 \qquad \frac{d}{dc}\mathrm{ErrMedPat}(a,b,c) = 0$$

Pasul 4. Acest sistem de ecuaţii se rezolvă folosindu-se blocul ***GIVEN – MINERR***: (sau FIND)

$a := 1 \;\; b := 1 \;\; c := 1$

Given

$$a\cdot\left[\sum_{k=0}^{n}(x_k)^4\right] + b\cdot\left[\sum_{k=0}^{n}(x_k)^3\right] + c\cdot\left[\sum_{k=0}^{n}(x_k)^2\right] = \sum_{k=0}^{n}\left[(x_k)^2\cdot y_k\right]$$

$$a\cdot\left[\sum_{k=0}^{n}(x_k)^3\right] + b\cdot\left[\sum_{k=0}^{n}(x_k)^2\right] + c\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}x_k\right) = \sum_{k=0}^{n}(x_k\cdot y_k)$$

$$a\cdot\left[\sum_{k=0}^{n}(x_k)^2\right] + b\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}x_k\right) + c\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}1\right) = \sum_{k=0}^{n}y_k$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := \mathrm{Minerr}(a,b,c)$$

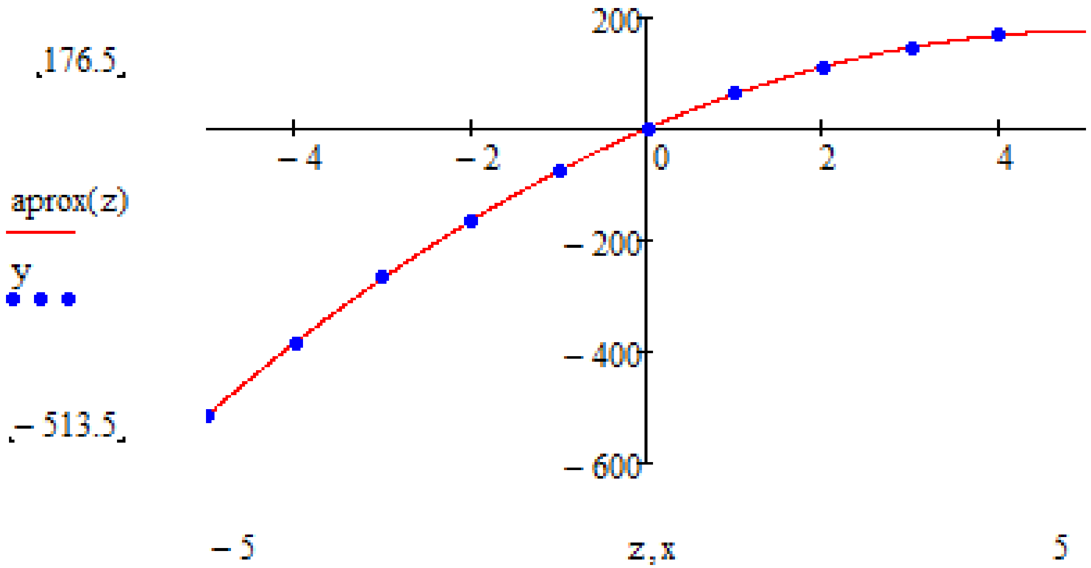
Aproximarea cu abatere medie pătratică minimă

Pasul 5. Astfel coeficienţii polinomului de aproximare vor fi egali cu:

$$a = -6.78 \qquad b = 69 \qquad c = 1$$

Pasul 6. Pe baza coeficienţilor *a*, *b* și *c* se reconstituie polinomul de aproximare și se reprezintă grafic:

$$\text{aprox}(z) := a \cdot z^2 + b \cdot z + c$$



Aproximarea folosind funcţii predefinite din Mathcad

În timpul unui experiment de laborator, se execută niște măsurători în punctele $\mathbf{x_i}$, care aparțin vectorului **X**. Rezultatele măsurătorilor $\mathbf{y_i}$ se trec în vectorul **Y**. Să se aproximeze **funcția exponenţială de legătură** dintre **mărimile de intrare** și **rezultatele obţinute**.

Pasul 1. Se definesc vectori **X** și **Y**.

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \\ 24 \\ 45 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Pasul 2. Pentru aproximarea legăturii dinte rezultatele obţinute și mărimile de intrare se foloseşte o **funcție exponenţială** de forma:

$$f(x) = coef_0 \cdot e^{coef_1 \cdot x} + coef_2$$

a cărui coeficienți se determină cu ajutorul funcției **expfit**.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

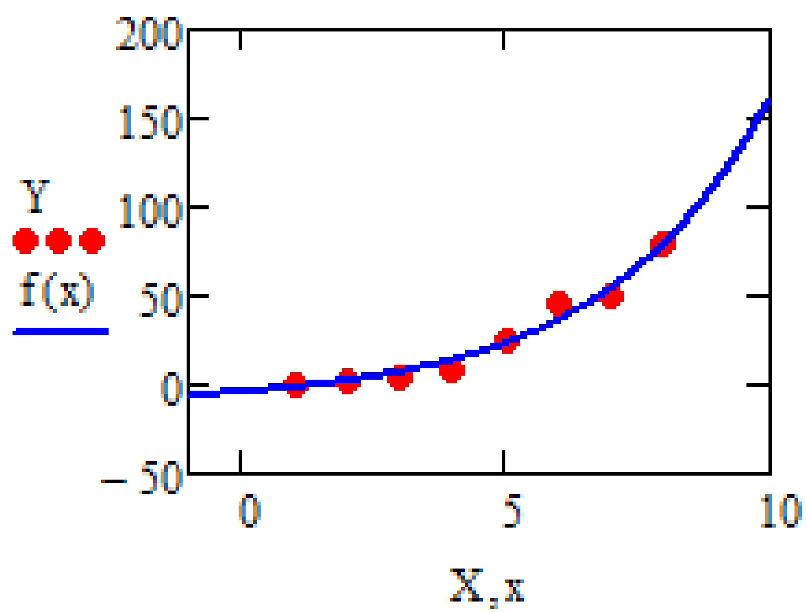
Aproximarea folosind funcţii predefinite din Mathcad

Această funcție primeşte ca și parametrii vectorii **X** și **Y** respectiv **vectorul coeficienţilor funcției exponenţiale** care trebuie predefiniţi:

$$coef := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad coef := expfit(X, Y, coef) \qquad coef = \begin{pmatrix} 5.13 \\ 0.354 \\ -7.651 \end{pmatrix}$$

Pasul 3. Se definește și se reprezintă grafic funcția exponenţială de aproximare. Limitele da afișare pentru axa OX se setează de la -1 la 10.

$$f(x) := coef_0 \cdot e^{coef_1 \cdot x} + coef_2$$



Aproximarea folosind funcţii predefinite din Mathcad

Să se aproximeze funcția de legătură dintre mărimile de intrare și rezultatele obţinute prin masurători de la problema anterioară, folosind funcţiile predefinite din MathCad: **line, medfit, linfit, logfit, expfit** și **genfit** şi să se compare rezultatele obţinute.

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \\ 24 \\ 45 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Pasul 2. Se definesc pe rând funcțiile de interpolare, bazate pe diferitele metode de calcul a coeficienților:

$$coef := (1 \ \ 1 \ \ 1)^T$$

$$coef := logfit(X, Y, coef)$$ Aproximare logaritmică

$$f_{logfit}(z) := coef_0 \cdot \ln(z + coef_1) + coef_2$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Aproximarea folosind funcţii predefinite din Mathcad

$$coef := line(X, Y)$$

$$f_{line}(z) := coef_1 \cdot z + coef_0$$

Aproximare liniară – bazată eroarea minimă pătratică

$$coef := (1 \ \ 1 \ \ 1)^T$$

$$coef := expfit(X, Y, coef)$$

$$f_{expfit}(z) := coef_0 \cdot e^{coef_1 \cdot z} + coef_2$$

Aproximare exponențială

$$coef := medfit(X, Y)$$

$$f_{medfit}(z) := coef_1 \cdot z + coef_0$$

Aproximare liniară – bazată pe regresiune mediană-mediană

Aproximarea folosind funcţii predefinite din Mathcad

Aproximare **generalizată liniară**: funcția de aproximare este o combinație liniară de funcții de aproximare:

$$f(x) = coef_0 \cdot f_0(x) + coef_1 \cdot f_1(x) + \ldots + coef_n \cdot f_n(x)$$

$$f(x) := \begin{pmatrix} \ln(x) & \sqrt{x} & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$coef := \mathrm{linfit}(X, Y, f)$$

$$f_{linfit}(z) := coef \cdot f(z)$$

Aproximare **generalizată neliniară**, după model:

Model general adoptat pentru funcția de aproximare:

$$f(x,u) = e^{u_0 + u_1 \cdot x + \ldots + u_n \cdot x^n}$$

Aproximarea folosind funcţii predefinite din Mathcad

Un vector identifică parametri $u_0 \ldots u_n$, care în cazul de față sunt pentru un exponent polinomial de gradul al doilea (are 3 elemente).

$$G := \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad f(x,u) := \begin{pmatrix} e^{u_0+u_1\cdot x+u_2\cdot x^2} \\ e^{u_0+u_1\cdot x+u_2\cdot x^2} \\ x\,e^{u_0+u_1\cdot x+u_2\cdot x^2} \\ x^2\,e^{u_0+u_1\cdot x+u_2\cdot x^2} \end{pmatrix}$$

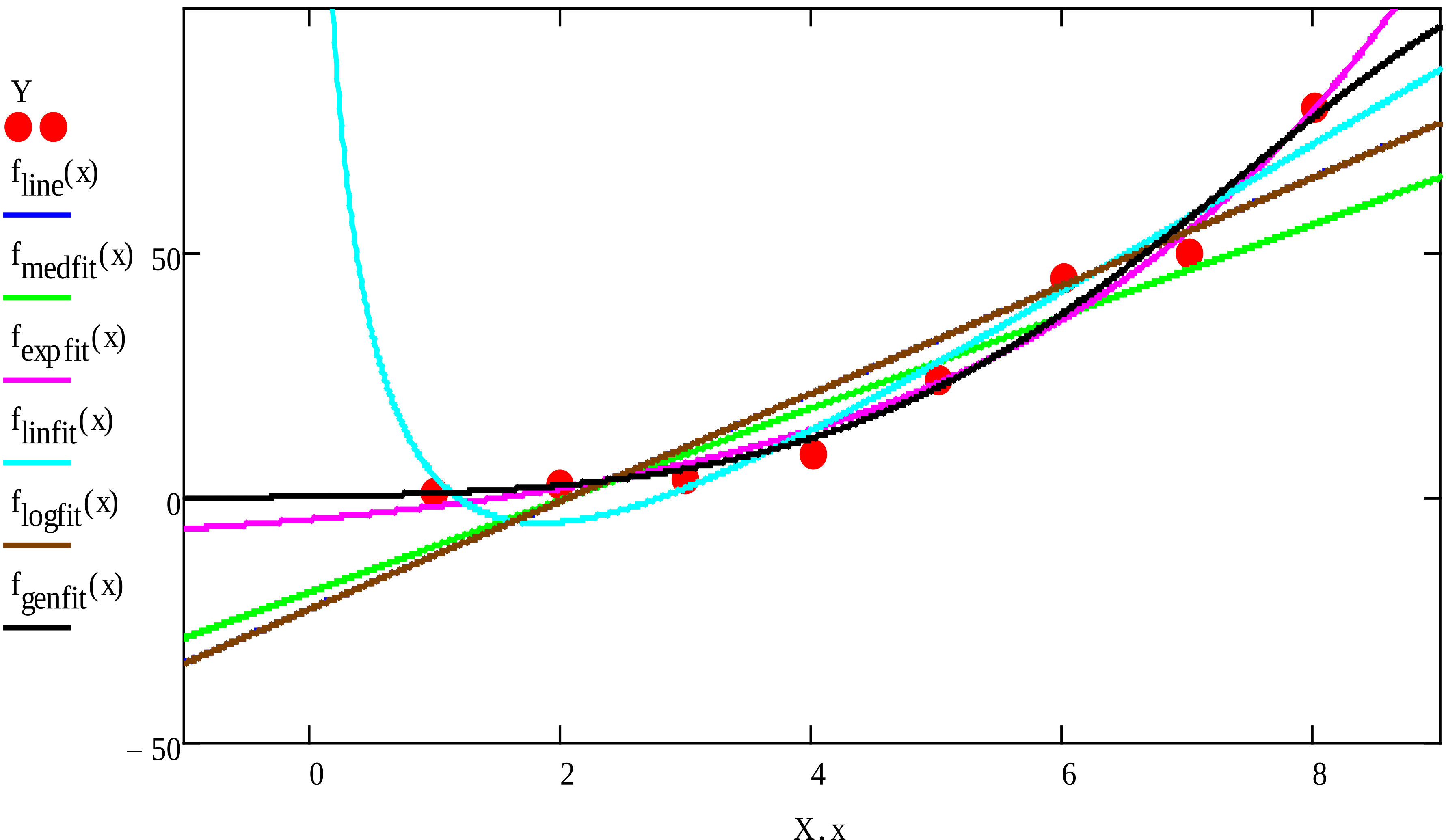
Se definește o funcție vectorială având ca elemente derivatele parțiale după parametrii modelului.

$$coef := genfit(X, Y, G, f)$$

$$f_{genfit}(z) := f(z, coef)_0$$

Aproximarea folosind funcţii predefinite din Mathcad

Pasul 3. Se reprezintă pa acelaşi grafic toate funcţiile obţinute. Limitele da afişare pentru axa OX se setează de la -1 la 9, respectiv la axa OY la -50, 100.



Aproximarea Numerică a Funcţiilor

As. Dr.Ing. **Levente CZUMBIL**

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA