Metode Numerice – Lucrarea nr. 8

APROXIMAREA NUMERICĂ A FUNCȚIILOR

Modelul matematic şi metodele numerice utilizate

Aproximarea utilizând funcţii spline

Metodele de aproximare cu funcţii spline utilizează porţiuni de polinoame $P_n(x_i)$ de gradul *m*, mult mai mic decât numărul de puncte în care se cunoaşte valoarea lui $f(x)$. Coeficienţii funcţiilor spline rezultă din condiţii de forma $P_n(x_i) = y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, la care se adaugă şi cele legate de egalitatea valorilor derivatelor segmentelor de polinoame în punctele date. Se utilizează funcţii de aproximare de tip spline parabolice şi cubice.

Datele iniţiale sunt numărul de puncte cunoscute, pasul de discretizare pentru valorile lui x, punctele în care se cunoaşte funcţia şi valorile lui x pentru care se cere aproximarea valorilor funcţiei $f(x)$. Rezultatele intermediare sunt cele legate de obţinerea şi rezolvarea sistemului liniar de ecuaţii care duce la determinarea coeficienţilor funcţiilor spline iar rezultatele finale sunt valorile aproximate ale funcţiei în punctele de interes.

Termenul de spline (engleză: dispozitiv pentru trasarea curbelor netede) a fost introdus pentru a desemna o funcţie formată din mai multe polinoame, definite pe intervale adiacente şi care se racordează între ele împreună cu un număr de derivate ale acestora. Se doreşte determinarea unei funcţii de interpolare netedă (funcţia spline) care să nu aibă oscilaţii prea mari între puncte şi utilizează pe fiecare interval un polinom diferit impunând condiţii de continuitate şi derivabilitate la trecerea prin nodurile reţelei de interpolare.

Funcţiile spline sunt foarte utile în aplicaţii practice, de exemplu la integrarea numerică: calculul sarcinii electrice distribuite pe o curbă, pe suprafaţă sau pe volum ori pentru calcule de câmp electromagnetic.

Având funcţia $f(x)$ dată tabelar şi o funcţie $s(x)$ definită pe intervalul $[a,b]$ $(a = x_1, b = x_n)$ care interpolează neted funcţia:

$$s(x_i) = f(x_i) = y_i \quad i = 1,2,\dots,n \tag{1}$$

pentru a obţine un grafic neted impunându-se condiţiile ca $s'(x)$ şi $s''(x)$ să fie continue

Funcţia $s(x)$ care este un polinom de gradul 3 pe intervalul $[x_{j-1}, x_j]$, $(j = 2,\dots,n)$ cu condiţia $s''(x_1) = \dots = s''(x_n) = 0$ şi care interpolează setul de date (x_j, y_j) se numeşte funcţie spline cubică.

Fie un set de noduri $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b \;\; x_k - x_{k-1} = h, \quad \forall k \geq 1$ în care se doreşte interpolarea unei funcţii f(x) cu polinoame spline cubice. Se definesc nodurile din afara spaţierii:

$$\begin{aligned} & x_{-3} = a - 3h; \;\; x_{-2} = a - 2h; \;\; x_{-1} = a - h; \\ & x_{n+1} = b + h; \;\; x_{n+2} = b + 2h; \;\; x_{n+3} = b + 3h \end{aligned} \tag{2}$$

În acest caz se defineşte funcţia:

$$B(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ (x+2)^3, & -2 \leq x \leq -1 \\ 1 + 3(x+1) + 3(x+1)^2 - 3(x+1)^3, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ (2-x)^3, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & 2 \leq x \end{cases} \tag{3}$$

Pentru interpolare se fac următoarele modificări:

$$B_i(x) = \underbrace{B\left(\frac{(x - x_i)}{h}\right)}_{aceeasi\ forma\ dar\ centrat\ in\ x_i}, \quad -1 \leq i \leq n+1 \tag{4}$$

Polinomul de interpolare spline cubic este:

$$s_3(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \cdot B_i(x) \tag{5}$$

Unde c_i sunt coeficienţii necunoscuţi care se calculează din condiţia:

$$s_3(x_k) = f(x_k) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \cdot B_i(x_k) \tag{6}$$

şi ţinând cont de proprietăţile funcţiei *B(x)* rezultă:

$$f(x_k) = c_{k-1} B_{k-1}(x_k) + c_k B_k(x_k) + c_{k+1} B_{k+1}(x_k) = c_{k-1} + 4c_k + c_{k+1} \tag{7}$$

Se obţine un sistem liniar cu *n+1* ecuaţii şi *n+3* necunoscute din care se pot determina coeficienţii funcţiei spline:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ ... \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ ... \\ f(x_n) \end{pmatrix} \tag{8}$$

Dacă $f \in C^4([a,b])$ şi s este un interpolant spline cubic pentru f pe spaţierea intervalului $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ cu $x_i - x_{i-1} \leq h$ atunci se poate defini eroarea de interpolare astfel:

$$\left\| f - s \right\|_\infty \leq \frac{5}{384} \cdot h^4 \cdot \left\| f^{(4)} \right\|_\infty \tag{9}$$

Instrumente utilizate

Funcţia predefinită „interp" folosită în combinaţie cu funcţii de tip Spline

Funcţia predefinită ***interp*** permite interpolare funcţiilor date prin valorile acestora în puncte. Această funcţie este apelată în modul următor:

$$f(z) := \text{interp}(M, X, Y, z) \tag{10}$$

unde: M – este un vector de coeficienţi returnat de o funcţie de tip spline cum ar fi funcţia liniară *lspline*, funcţia cubică *cspline*, funcţia parabolică *pspline* sau funcţia *bspline*; X, Y – sunt vectorii punctelor în care se cunosc valorile funcţiei de interpolat, respectiv vectorul valorilor funcţiei în aceste puncte; z – este variabila care indică punctul în care se doreşte determinată valoarea funcţiei interpolate.

Funcţiile spline care returnează vectorul M se apelează astfel:

$$M := lspline(X, Y) \tag{11}$$

Observaţie: linterp(x, y(x), z) – returnează o funcţie de inerpolare liniară pe un interval de valori z (x fiind valorile în care se cunoaşte funcţia y(x)).

Blocul „GIVEN-MINERR"

Blocul ***GIVEN-MINERR*** permite asemănător blocului ***GIVEN-FIND*** rezolvarea sistemelor de ecuaţii. Ajantajul acestui bloc faţă de clasicul ***GIVEN-FIND*** este că în cazul în care sistemul de ecuaţii nu are soluţie, atunci în loc de mesajul de eroare returnat de blocul ***GIVEN-FIND***, blocul ***GIVEN-MINERR*** returnează o soluţie aproximativă obţinută prin metoda minimizării abaterii medii pătratice. Blocul are următoarea structură:

$$\begin{array}{l} Nec1 \ldots\ldots Nec2 \ldots \\ \text{GIVEN} \\ \quad Ecuatie1 \\ \quad Ecuatie2 \\ \quad \ldots \\ \quad EcuatieN \\ Sol := Minerr(Nec1 \quad Nec2 \quad \cdots \quad NecN) \end{array} \tag{12}$$

unde: *Ecuatie1, … , EcuatieN* – sunt ecuaţiile care formează sistemul de ecuaţii. Ecuaţiile se definesc cu ajutorul egalului boolean (combinaţia de taste „**Ctrl+=**") ; *Nec1, …, NecN* – sunt necunoscutele sistemului de ecuaţii. Acestea trebuie iniţializate prealabil (înaintea comenzii GIVEN) cu nişte valori aleatoare; *Sol* – este vectorul de soluţii a sistemului de ecuaţii.

Funcţii predefinită de aproximare

Programul MathCad conţine o serie de funcţii predefinite pentru aproximarea funcţiilor date în puncte cum ar fi de exemplu: ***expfit*** şi ***genfit*** pentru funcţii exponenţiale, ***logfofit*** pentru funcţii logaritmice, respectiv ***line***, ***medfit*** şi ***linfit*** pentru funcţii liniare şi polinomiale.
Aceste funcţii sunt apelate după modelul prezentat mai jos. De exemplu în cazul funcţiei exponenţiale ***expfit***, care determină coeficienţii unei funcţii polinomiale de genul: $f(x) = Coef_0 \cdot e^{Coef_1 \cdot x} + Coef_2$, avem:

$$\text{Coef} := \text{expfit}(\text{X}, \text{Y}, \text{Coef}) \tag{13}$$

unde: *X*, *Y* – sunt vectorii punctelor în care se cunosc valorile funcţiei de interpolat, respectiv vectorul valorilor funcţiei în aceste puncte; *Coef* – este vectorul de coeficienţi ai funcţiei de aproximare care trebuie iniţializate în prealabil cu valori aleatoare.