

Metode Numerice de Integrare și Derivare a Funcțiilor date Numeric



Laboratorul de Cercetare
în METODE NUMERICE
NUMERICAL METHODS
Research Laboratory

Technical University of Cluj-Napoca

As. Dr. ing. Levente CZUMBIL

E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro

WebPage: <http://users.utcluj.ro/~czumbil>

Aplicație

Evaluarea supratensiunilor induse în liniile electrice aeriene, datorită fenomenelor de trăsnet se constituie ca o problemă deosebit de importantă pentru stabilirea metodelor și dimensionarea a echipamentelor de protecție.



Cuantificarea efectelor de supratensiuni induse în LEA pornește de la expresiile deduse pentru câmpurile electrice și magnetice generate de trăsnet, expresii care apar în cadrul unor integrale complexe:

$$B_{\varphi}(r, z, \omega) = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-H}^H G_{\varphi}(r, z, z', \omega) \cdot \exp\left(-j \cdot \omega \cdot \frac{R}{c}\right) \cdot I(z', \omega) dz'$$

$$G_{\varphi}(r, z, z', \omega) = \left[\frac{r}{\left(r^2 + (z' - z)^2\right)^{3/2}} + j \cdot \omega \cdot \frac{r}{c \cdot \left(r^2 + (z' - z)^2\right)} \right]$$



Formula Trapezelor

Formula clasică a trapezelor rezultă prin particularizarea cea mai simplă a versiunii clasice a metodei Newton-Côtes, pentru $n=1$. Deci este o aplicație directă a interpolării liniare Lagrange în două puncte. Se cunoaște funcția în două noduri

$x_0 = a, x_1 = b \Rightarrow f(x_0), f(x_1); h = (b - a)$, și se dorește calculul aproximativ al integralei definite $\int_a^b f(x)dx$, utilizând polinomul liniar de interpolare Lagrange adică scriind funcția $f(x) = L_1(x) + R_1(x)$. Deci integrala calculată cu formula trapezului este:

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{I_{Trapez}(f)} = \underbrace{\int_a^b L_1(x)dx}_{I_{Trapez}(L_1)} + \underbrace{\int_a^b R_1(x)dx}_{Eroare_{Trapez}}$$

Deci integrând polinomul Lagrange și restul se obține formula trapezului:

$$I_{Trapez}(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \cdot [f(a) + f(b)] - \underbrace{\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\xi)}_{Eroare_{Trapez}}$$

Deci formula trapezelor generalizată cu $\xi \in (a, b)$, este:

$$I_{TrapezGen}(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] - \underbrace{\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)}_{Eroare_{TrapezGen}}$$



Formula Trapezelor

Fie funcția, $f(x) = e^{-x^2} \cdot \sin(x)$ definită pe intervalul $[a, b]$; $f : [a, b] \rightarrow R$. Se cere calculul valorii integralei definite pe intervalul $[a, b]$, utilizând formula trapezelor și evaluarea erorii de calcul a acestei formule.

Pasul 1. Se introduce funcția $f(x)$:

$$f(x) := e^{-x^2} \cdot \sin(x)$$

Pasul 2. Se definesc capetele intervalului de definire a funcției, numărul N de puncte intermediare de calcul și se fixează pasul de integrare h (distanța dintre două puncte intermediare vecine pentru a fixa lungimea subintervalelor echidistante pe intervalul $[a, b]$):

$$a := 1 \quad b := 7 \quad N := 100 \quad h := \frac{b - a}{N} \quad h = 0.06$$

Pasul 3. Se introduce vectorul x a cărui elemente sunt valorile absciselor x_i care reprezintă capetele subintervalelor echidistante în care a fost împărțit intervalul $[a, b]$. Elementele acestui vector se definesc utilizându-se tasta (I) pentru indicele i al variabilei x .

$$i := 0..N \quad x_1 := a + h \cdot i$$



Formula Trapezelor

Pasul 4. Se calculează valoarea integralei definite pe intervalul $[a,b]$ utilizând formula trapezelor. Indicele formal *trapez* se introduce cu tasta (**.**), iar suma prin intermediul comenzii *Summation* din toolbar-ul *Calculus* (shortcut: **Ctrl #**):

$$I_{\text{trapez}} := \frac{h}{2} \cdot \left(f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) \right) \quad I_{\text{trapez}} = 0.129864381011505$$

Pasul 5. Se evaluează eroarea metodei conform formulei:

$$Er := \frac{-h}{24} \cdot \left(3 \cdot f(x_{N-1}) - 4 \cdot f(x_{N-1}) + f(x_{N-3}) + 3 \cdot f(x_0) - 4 \cdot f(x_1) + f(x_2) \right) \quad Er = -1.301 \times 10^{-4}$$

Pasul 6. Se calculează integrala definită pe intervalul $[a,b]$ cu ajutorul operatorului de integrare din *Mathcad* prin apelarea comenzii *Definite Integral* toolbar-ul *Calculus* (**&**):

$$I_{\text{def}} := \int_a^b f(x) \quad I_{\text{def}} = 0.129738201252747$$



Formula lui Simpson

Formula clasică a lui Simpson rezultă prin particularizarea versiunii generale a metodei Newton-Côtes, pentru $n=2$. Se cunosc valorile funcție $f(x)$ în trei noduri echidistante:

$$x_0 = a, x_1 = c = \frac{a+b}{2}, x_2 = b \Rightarrow f(x_0), f(x_1), f(x_2), x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h,$$
$$h = b - c = c - a = \frac{(b-a)}{2}$$

Iar polinomul de interpolare Lagrange de ordin doi este cel cu care se aproximează funcția de sub integrala definită, $f(x) = L_2(x) + R_2(x)$. Deci integrala definită va fi:

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{I_{Simpson}(f)} = \underbrace{\int_a^b L_2(x)dx}_{I_{Simpson}(L_2)} + \underbrace{\int_a^b R_2(x)dx}_{Eroare_{Simpson}}$$

Deci formula lui Simpson se va scrie:

$$I_{Simpson}(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6}(f(a) + 4 \cdot f(c) + f(b)) - \underbrace{\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot f'''(\xi)}_{Eroare_{Simpson}}$$

Aplicând pentru fiecare subinterval formula clasică a lui Simpson se obține:

$$I_{SimpsonGen}(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m} \left[f(x_0) + f(x_{2m}) + 4 \cdot \sum_{k=1}^m f(x_{2k-1}) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) \right] - \underbrace{\frac{(b-a)^5}{2880 \cdot m^4} \cdot f^{(4)}(\xi)}_{Eroarea_{Simpson}}$$

Formula lui Simpson

Fie funcția, $f(x) = e^{-x^2} \cdot \sin(x)$ definită pe intervalul $[a,b]$; $f : [a,b] \rightarrow R$. Se cere calculul valorii integralei definite pe intervalul $[a,b]$, utilizând formula lui Simpson și să se evalueze eroarea de calcul a acestei formule.

Pasul 1. Se definește funcția $f(x)$: $f(x) := e^x \cdot \cos(x)$

Pasul 2. Se definesc limitele intervalului, numărul $2N$ de puncte intermediare de calcul și se determină pasul de integrare h :

$$a := 1 \quad b := 3 \quad N := 50 \quad h := \frac{b-a}{2N} \quad h = 0.02$$

Pasul 3. Se introduce vectorul x a cărui elemente sunt valorile absciselor x_i care reprezintă capetele subintervalelor echidistante în care a fost împărțit intervalul $[a,b]$.

$$i := 0..2N \quad x_i := a + h \cdot i$$

Pasul 4. Se calculează valoarea integralei definite pe intervalul $[a,b]$ utilizând formula lui Simpson. Sumele se introduc prin intermediul operatorului *Range Variable Summation* din toolbar-ul *Calculus* (\$):

$$j := 1,3..2 \cdot N - 1 \quad k := 2,4..2 \cdot N - 2$$

$$I_{\text{Simpson}} := \frac{h}{3} \cdot \left(f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_k f(x_k) + 4 \cdot \sum_j f(x_j) \right) \quad I_{\text{Simpson}} = 10.950170275748054$$



Calculul Integralei Duple

Fie funcția de două variabile $f(x, y) = x + y \cdot |\sin(x)| + e^{-3y}$ definită pe intervalele $x \in [a, b]$ și $y \in [c, d]$. Se cere calculul integralei duble pe întreg domeniul de definiție.

Pasul 1. Se definește funcția $f(x, y)$:

$$f(x, y) := x + y \cdot |\sin(x)| + e^{-3y}$$

Pasul 2. Se definesc limitele domeniului de definiție a funcției $f(x, y)$. Se ia un număr de $2N_x$, respectiv $2N_y$ de puncte de calcul pe cele două intervale :

$$a := 0 \quad b := 5 \quad c := -2 \quad d := 4 \quad N_x := 10^2 \quad N_y := 10^2$$

Pasul 3. Se determină pașii integrare pe intervalele $[a, b]$ și $[c, d]$:

$$h_x := \frac{b - a}{2 \cdot N_x} \quad h_y := \frac{d - c}{2 \cdot N_y} \quad h_x = 0.025 \quad h_y = 0.03$$



Calculul Integralei Duple

Pasul 4. Se determină punctele intermediare x_i și y_j de calcul pe cele două intervale:

$$i := 0..2N_x \quad j := 0..2N_y \quad x_i := a + i \cdot h_x \quad y_j := c + j \cdot h_y$$

Pasul 5. Se integrează funcția $f(x, y)$ după variabila y utilizând formula lui Simpson pentru fiecare punct intermediar y :

$$k := 2, 4..2 \cdot N_y - 2 \quad l := 1, 3..2 \cdot N_y - 1$$
$$I_{x_i} := \frac{h_y}{3} \cdot \left[f(x_i, y_0) + f(x_i, y_{2 \cdot N_y}) + 2 \cdot \left(\sum_k f(x_i, y_k) \right) + 4 \cdot \sum_l f(x_i, y_l) \right]$$

Pasul 6. Se integrează funcția $f(x, y)$ după variabila x utilizând formula lui Simpson pentru fiecare punct intermediar x :

$$k := 2, 4..2 \cdot N_x - 2 \quad l := 1, 3..2 \cdot N_x - 1$$
$$I_d := \frac{h_x}{3} \cdot \left(I_{x_0} + I_{x_{2 \cdot N_x}} + 2 \cdot \sum_k I_{x_k} + 4 \cdot \sum_l I_{x_l} \right) \quad I_d = 767.0839468763276$$



Calculul Integralei Duple

Pasul 7. Se evaluează valoarea integralei duble a funcției $f(x,y)$ după variabilele x și y folosindu-se operatorul de integrare din *Mathcad* (dacă s-ar cunoscea forma analitică a funcției):

$$I_{\text{def}} := \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx \quad I_{\text{def}} = 767.0833318910629$$

Pasul 8. Se determină eroarea absolută dintre rezultatul obținut prin formula lui Simpson și cel returnat de operatorul din *Mathcad*:

$$Er := |I_{\text{def}} - I_d| \quad Er = 6.15 \times 10^{-4}$$



Calculul Derivatei unei Funcții Numerice

Fie funcția: $f(x) = e^x + \sin(x) + x^6 - 5 \cdot x^3 + 2 \cdot x - 1$ să se determine derivata ei pe intervalul $[5, 10]$.

Pasul 1. Se definește funcția $f(x)$.

$$f(x) := e^x + \sin(x) + x^6 - 5 \cdot x^3 + 2 \cdot x - 1$$

Pasul 2. Se definește intervalul de derivare și setul de puncte intermediare în care se determină valoarea derivatei.

$$a := 5 \quad b := 10 \quad N := 100 \quad h := \frac{b-a}{N} \quad h = 0.05 \quad i := 0..N$$

$$x_0 := a \quad x_i := x_0 + h \cdot i \quad y_i := f(x_i)$$

Pasul 3. Se calculează derivata funcției în punctele x_i .

$$j := 1..N-1$$

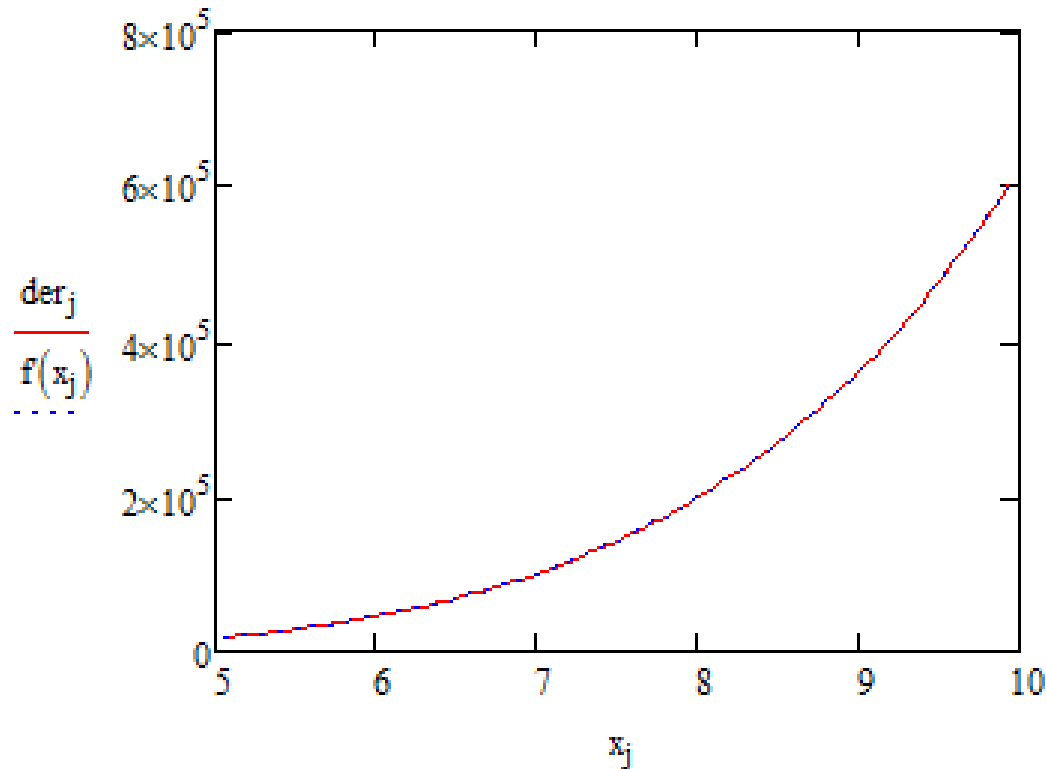
$$der_j := \frac{1}{2 \cdot h} \cdot (y_{j+1} - y_{j-1})$$



Pasul 4. Se determină derivata analitică a funcției $f(x)$.

$$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

Pasul 5. Se secompară grafic rezultatel obținute:



Metode Numerice de Integrare și Derivare a Funcțiilor date Numeric



As. Dr.Ing. Levente CZUMBIL