Metode Numerice de Rezolvare a Ecuațiilor și Sistemelor de Ecuații Diferențiale

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

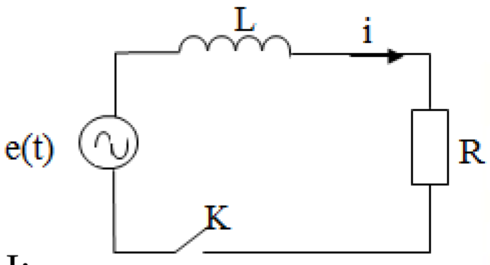
Laboratorul de Cercetare în METODE NUMERICE
NUMERICAL METHODS Research Laboratory
Technical University of Cluj-Napoca

As. Dr. ing. **Levente CZUMBIL**
E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro
WebPage: http://users.utcluj.ro/~czumbil

Circuitul R-L serie în regim tranzitoriu

Se consideră un circuit format dintr-un rezistor de rezistenţă R şi o bobină de inductivitate L, alimentate în serie la o tensiune electromotoare $e = E \cdot \cos \omega t$.

Se studiază variaţia curentului în circuit la închiderea întreruptorului K.



Circuitul R-L Serie

Se scriu teoremele lui Kirchhoff şi rezultă o ecuaţie diferenţială de ordinul I:

$$e = e_R + e_L = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = E \cdot \cos \omega t$$

Ţinând cont de dependenţa de timp (t) : $u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ unde *i(t)* - curentul din circuit la momentul t

$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$

$u_{L,R}(t)$ - tensiunea la bornele bobinei respectiv rezistenţei la momentul t ecuaţia diferenţială se va rescrie :

$$\omega L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = E \cos \omega t$$

Generalităţi

O ecuaţie diferenţială este o ecuaţie care conţine pe lângă variabilele independente şi funcţiile necunoscute şi derivatele acestor funcţii. Ordinul ecuaţiei diferenţiale, *n*, este dată de ordinul maxim al derivatelor funcţiei necunoscute din cadrul aceste ecuaţii.

$$f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

Ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale conţin mai multe variabile independente şi derivatele parţiale ale funcţiilor necunoscute.

$$y\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

Rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale de ordin *n* implică impunerea a *n* condiţii iniţiale.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Metoda dezvoltării în serie Taylor

Fie funcţia, *f(x):I* x *R→R* unde *I* este un interval real, *f* fiind o funcţie continuă dată, iar y0 fiind valoarea iniţială a acesteia.

Evaluam funcţia *y:I →R* în nodurile intervalului de definiţie, funcţie care satisface problema cu condiţia iniţială Cauchy impusă:

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b \qquad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \ x_0 \in I$$

Se dezvoltă în serie Taylor soluţia ecuaţiei în jurul punctului x_0:

$$y\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

Dacă se înlocuieşte $x=x_0+h$ şi restul $R_n(x)=0$ atunci neglijând ultimul termen al seriei Taylor atunci se poate estima valoarea aproximativă a lui y_1 :

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'' = f_x + f \cdot f_y$$

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0) \qquad y''' = f_{xx} + (2 f_{xy} + f \cdot f_{yy}) \cdot f + (f_x + f \cdot f_y) \cdot f_y$$

Metoda dezvoltării în serie Taylor

unde: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x};\ f_y = \frac{\partial f}{\partial y};\ f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2};\ f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2};\ f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

iar: $f^{(n)}(x,y) = f_x^{(n-1)}(x,y) + f_y^{(n-1)}(x,y) \cdot f(x,y)$

$$y^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x, y(x))$$

Pentru *n=2* rezultă:

$$y_1 = y_0 + h \cdot \left[f(x_0, y_0) + \frac{h}{2} \cdot \left(f_x(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) \cdot f_y(x_0, y_0) \right) \right]$$

Prin recurenţă $\Longrightarrow y_2, \ldots, y_n$

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot \left(f + \frac{h}{2} \cdot (f_x + f \cdot f_y) \right)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Metoda dezvoltarii in serie Taylor

Fie circuitul **R-L serie** din cadrul aplicaţiei prezentate pentru care avem cunoscute parametrii electrici: *E = 12V, R = 4Ω* şi *L = 3,2uH*. Să se determine curentul prin bobina de inductivitate *L* după închiderea întrerupătorului *K* (t ia valori pe intervalul [0;40ms])

Pasul 1. Se definesc parametri electric ai circuitului **R-L serie**:

$$E := 12 \qquad R := 4 \qquad L := 3.2\cdot 10^{-6} \qquad f := 50 \qquad \omega := 2\cdot\pi\cdot f \qquad \omega = 314.159$$

Pasul 2. Se scrie ecuaţia diferenţial ce descrie funcţionarea circuitului **R-L serie**:

$$\omega\cdot L\cdot\frac{d}{dt}i(t) + R\cdot i(t) = E\cdot\cos(\omega\cdot t)$$

Pasul 3. Se extrage derivata curentului din ecuaţia diferenţială corespunzătoare circuitului:

$$\frac{d}{dt}i(t) = \frac{1}{\omega\cdot L}\cdot(E\cdot\cos(\omega\cdot t) - R\cdot i(t))$$

Pasul 4. Se defineşte funcţia asociată membrului drept a ecuaţiei diferenţiale:

$$F(t,i) := \frac{1}{\omega\cdot L}\cdot\left(E\cdot\cos(\omega\cdot t) - R\cdot i\right)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Pasul 5. Se definesc capetele intervalului, numărul de puncte de calcul şi se determină pasul de parcurgere al intervalului de definiţie:

$$t_i := 0 \qquad t_f := 40 \cdot 10^{-3} \qquad N := 500 \qquad h := \frac{t_f - t_i}{N} \qquad h = 8 \times 10^{-5}$$

Pasul 6. Se determină şirul de puncte intermediare t_k în care se evaluează valoarea curentului:

$$k := 0..N \qquad t_k := t_i + h \cdot k$$

Pasul 7. Se definesc derivatele parţiale ale funcţiei ataşate, *F*, ecuaţiei diferenţiale:

$$F_t(t,i) := \frac{d}{dt}F(t,i) \qquad F_i(t,i) := \frac{d}{di}F(t,i)$$

Pasul 8. Din condiţia iniţială Cauchy a problemei (întrerupătorul *K* deschis), reiese că valoarea curentului în momentul $t = 0s$ este egală cu $0A$:

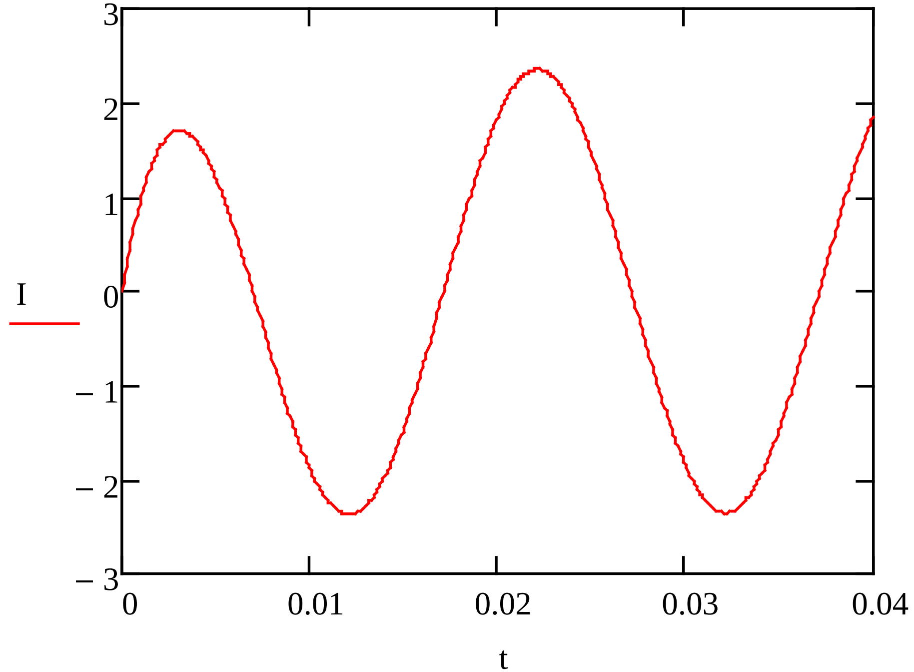
$$I_0 := 0$$

Pasul 9. Se implementează formula recursivă de calcul a valorilor funcţiei, pe baza descompunerii în serie Taylor până la elementul de gradul al II-lea:

$$I_{k+1} := I_k + h\cdot\left[F(t_k, I_k) + \frac{h}{2}\cdot\left(F_t(t_k, I_k) + F(t_k, I_k)\cdot F_i(t_k, I_k)\right)\right]$$

Pasul 10. Se vizualizează valoarea curentului la momentele de timp *tk*:

$$I^T = (0 \quad 0.094 \quad 0.185 \quad \cdots \quad 1.811 \quad 1.848 \quad 1.884)$$



Metoda lui Euler

Se obţine din metoda Taylor pentru *n=1*, adică se reţin numai primii doi termeni din dezvoltare rezultând forma explicită a metodei lui Euler:

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) \qquad i = 1,2,\ldots$$

Avem bineînţeles aceeaşi problemă de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale cu condiţii iniţiale:

$$y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = y_0$$

Pentru variante ale metodei lui Euler cu precizie mai mare se folosesc relaţii de recurenţă de forma:

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot \Phi(x_{i-1}, y_{i-1}, h)$$

unde în:

a) Metoda lui Euler îmbunătăţită (Euler – Heun):

$$\Phi(x_{i-1}, y_{i-1}, h) = \frac{1}{2}\left[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + h \cdot y'_{i-1})\right]$$

cu $y'_{i-1} = f(x_{i-1}, y_{i-1})$

b) Metoda lui Euler modificată (versiunea Cauchy)

$$\Phi(x_{i-1}, y_{i-1}, h) = f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{h}{2}\cdot y'_{i-1}\right) \qquad y'_{i-1} = f\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right)$$

c) Metoda Euler modificată "predictor – corector" (metoda implicită).

Cu metoda lui Euler clasică se calculează o primă aproximaţie (valoarea prezisă a soluţiei în punctul următor) adică se iniţializează valoarea lui y_i cu o relaţie:

$$y_i^{(0)} = y_{i-1} + h\cdot f\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right)$$

La un pas oarecare al procesului iterativ de calcul noua valoare a lui rezultă prin aplicarea unei relaţii:

$$y_i^{(k)} = y_{i-1} + h\cdot\frac{f\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right) + f\left(x_i, y_i^{(k-1)}\right)}{2}$$

Calculul se consideră terminat când se atinge o precizie impusă aprioric:

$$\left|y_i^{(k)} - y_i^{(k-1)}\right| < \varepsilon$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Metoda lui Euler

Fie ecuaţia diferenţială de ordinul întâi $y'(x) - 6y(x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right) = x^2 - 5$ cu condiţia iniţială Cauchy *y(7)=6*, unde *x* ia valori pe intervalul [7,15]. Să se determine valorile funcţiei *y(x)* folosindu-se metoda lui Euler îmbunătăţită (Euler-Heun), respectiv varianta modificată (versiunea Cauchy).

Pasul 1. Se scrie ecuaţia diferenţială ce urmează a fi rezolvată:

$$y'(x) - 6y(x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right) = x^2 - 5$$

Pasul 2. Se extrage derivate funcţiei necunoscute:

$$y'(x) = x^2 - 5 + 6 \cdot y(x) - \cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right)$$

Pasul 3. Se defineşte funcţia asociată ecuaţiei diferenţiale:

$$f(x,y) := x^2 - 5 + 6y - \cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Pasul 4. Definirea funcţiei caracteristice metodei îmbunătăţite Euler-Huen:

$$\Phi_{EH}(x,y,h) := \frac{1}{2}\cdot(f(x,y) + f(x+h, y + h\cdot f(x,y)))$$

Pasul 5. Definirea funcţiei caracteristice metodei îmbunătăţite Euler-Cauchy:

$$\Phi_{EC}(x,y,h) := f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}\cdot f(x,y)\right)$$

Pasul 6. Se definesc capetele intervalului, numărul de puncte de calcul şi se determină pasul de parcurgere al intervalului de definiţie:

$$a := 7 \qquad b := 15 \qquad N := 100 \qquad h := \frac{b-a}{N} \qquad h = 0.08$$

Pasul 7. Se determină şirul de puncte intermediare x_i în care se evaluează valoarea funcţiei necunoscute:

$$i := 0..N \qquad x_i := a + h\cdot i$$

Pasul 8. Se impune condiţia iniţială Cauchy *y(7)=5*:

$$y_{EH_0} := 5 \qquad y_{EC_0} := 5$$

Pasul 9. Se evaluează valorile funcţiei necunoscute conform metodei lui Euler îmbunătăţite (Euler-Heun) :

$$y_{EH_{i+1}} := y_{EH_i} + h \cdot \Phi_{EH}\left(x_i, y_{EH_i}, h\right)$$

Pasul 10. Se evaluează valorile funcţiei necunoscute conform metodei lui Euler modificată (versiunea Cauchy) :

$$y_{EC_{i+1}} := y_{EC_i} + h \cdot \Phi_{EC}\left(x_i, y_{EC_i}, h\right)$$

Pasul 11. Se vizualizează valorile funcţiei necunoscute determinate în punctele x_i:

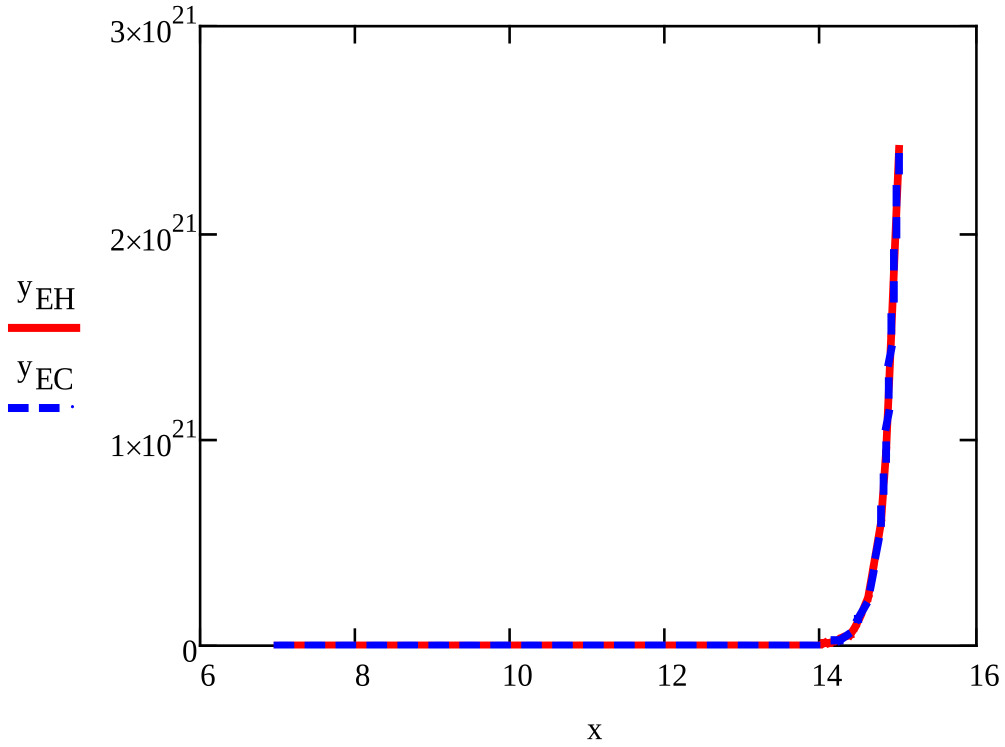
$y_{EH}^T =$

	0	1	2	3	4	5	6
0	5	12.295	24.046	42.911	73.122	121.436	...

$y_{EC}^T =$

	0	1	2	3	4	5	6
0	5	12.294	24.046	42.91	73.12	121.433	...

Pasul 12. Se reprezintă grafic alura funcţiei determinate cu cele două metode:



Pasul 13. Se evaluează abaterea procentuală dintre cele două metode:

$$E_{rr} := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i} \frac{\left| y_{EH_i} - y_{EC_i} \right|}{y_{EH_i}} \qquad E_{rr} = 2.412 \times 10^{-3}\,\%$$

Metodele Runge – Kutta de integrare numerică a unei ecuaţii diferenţiale, înlocuiesc calculul derivatelor funcţiei *f(x,y)* prin evaluări ale sale în diverse puncte.

Fie ecuaţia diferenţială cu condiţii iniţiale de forma: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

unde: $f(x):D \to R$, $D \sqsupset \underline{R^2,}$ este o funcţie cu derivatele parţiale $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^j}$ continue pe D, unde $i+j=k$, respectiv $k = 1, m$.

Soluţia calculându-se cu o relaţie unipas de forma:

$$y_{i+1} = y_i + a_0 \cdot k_0 + a_1 \cdot k_1 + \ldots + a_n \cdot k_n$$

Din condiţia ca dezvoltarea în serie Taylor a membrului drept (în funcţie de h) să coincidă cu membrul drept al formulei lui Taylor de ordinul (n+1) avem:

$$k_0 = h \cdot f(x_i, y_i)$$
$$k_1 = h \cdot f(x_i + \mu_1 \cdot h, y_i + \lambda_{10} \cdot k_0)$$
$$k_2 = h \cdot f(x_i + \mu_2 \cdot h, y_i + \lambda_{20} \cdot k_0 + \lambda_{21} \cdot k_1)$$

....

$$k_n = h \cdot f(x_i + \mu_n \cdot h, y_i + \lambda_{n0} \cdot k_0 + \lambda_{n1} \cdot k_1 + \ldots + \lambda_{n,n-1} \cdot k_{n-1})$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Particularizând parametrul *n* determinăm diverse formule de tip Runge – Kutta:

a) *n=0* (Runge-Kutta de ordin II), y_0 – dat (formula lui Euler clasica):

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

b) *n=1* (Runge-Kutta de ordin II), y_0 – dat:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_0 + k_1) \qquad k_0 = h \cdot f(x_i, y_i) \qquad k_1 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_0)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h \cdot f(x_i, y_i))\right]$$

c) *n=2* (Runge-Kutta de ordin III), y_0 – dat:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_0 + 4k_1 + k_2) \qquad k_0 = h \cdot f(x_i, y_i) \qquad k_1 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right)$$

$$k_2 = h \cdot f(x_i + h, y_i + 2k_1 - k_0)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Metoda Runge-Kutta de ordinul III

Să se rezolve ecuaţia diferenţială de ordinul I $y' = \frac{4 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + x \cdot y}$ cu condiţia iniţială Cauchy *y(0)=0* pe intervalul [0,2] cu pasul h=0.01 folosind metoda Runge-Kutta de ordinul III.

Pasul 1. Se defineşte funcţia asociată membrului drept a ecuaţiei diferenţiale:

$$f(x, y) := \frac{4 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + x \cdot y}$$

Pasul 2. Se definesc capetele intervalului de definiţie şi se determină numărul de puncte de calcul:

$h := 0.01 \qquad a := 0 \qquad b := 2 \qquad N := \frac{b - a}{h} \qquad N = 200$

Pasul 3. Se determină vectorul al punctelor din intervalul în care se calculează valorile funcţiei :

$i := 0 .. N \qquad x_i := a + h \cdot i$

Metoda Runge-Kutta de ordinul III

Pasul 4. Din condiţia iniţială Cauchy a problemei, reiese că funcţia *y(x)* ia valoarea 1 în punctul 0 (în capătul *a* al intervalului):

$$y_0 := 0$$

Pasul 5. Se definesc coeficienţii Runge-Kutta de ordinul III:

$$k_0(x,y) := h\cdot f(x,y)$$

$$k_1(x,y) := h\cdot f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_0(x,y)}{2}\right)$$

$$k_2(x,y) := h\cdot f\left(x+h, y+2\cdot k_1(x,y)-k_0(x,y)\right)$$

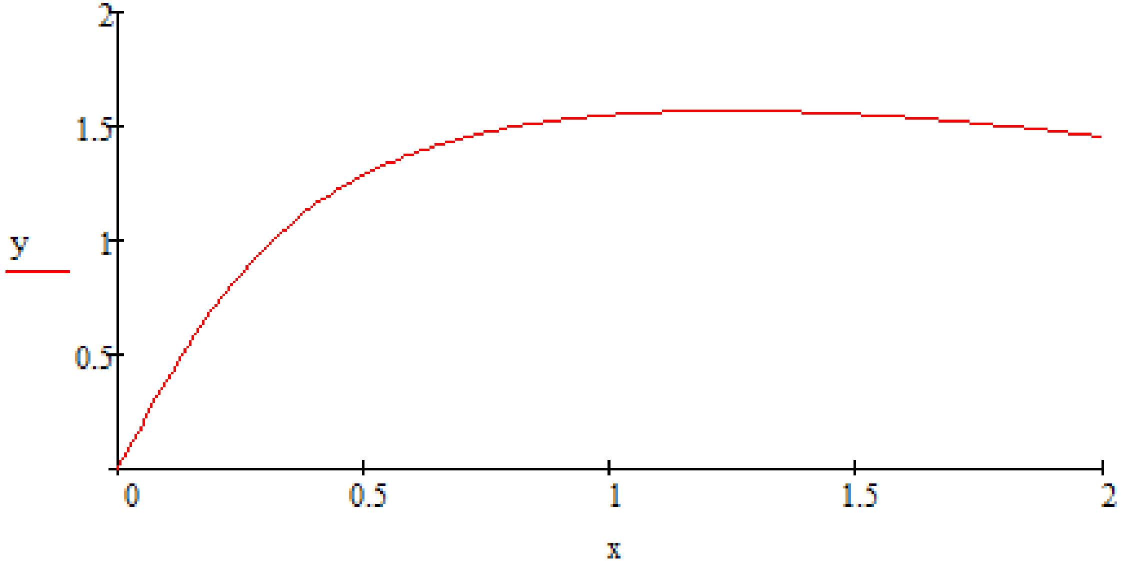
Pasul 6. Se implementează formula recursivă Runge-Kutta pentru calculul valorilor funcţiei în punctele :

$$y_{i+1} := y_i + \frac{1}{6}\cdot\left(k_0\left(x_i, y_i\right) + 4\cdot k_1\left(x_i, y_i\right) + k_2\left(x_i, y_i\right)\right)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Pasul 7. Se vizualizează valorile funcţiei *y(x)* pe intervalul [0,2] şi se reprezintă grafic:

$$y^T = \begin{pmatrix} 0 & 0.04 & 0.08 & 0.12 & 0.159 & 0.198 & 0.237 & \cdots & 1.453 & 1.45 \end{pmatrix}$$



Se consideră un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare cu condiţiile iniţiale de mai jos, această problemă fiind cunoscută după cum ştim ca o problemă Cauchy sau problemă cu condiţii iniţiale:

$$y'_i = \frac{dy_i}{dx} = f\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_r\right) \qquad y_i\left(x_0\right) = y_{i0} \quad i = 1,2,\ldots,r$$

Se cere determinarea funcţiilor $y_i(x)$ care verifică sistemul şi condiţiile iniţiale, adică determinarea valorilor $y_{i,1}, y_{i,2}, y_{i,3}, \ldots, y_{i,n}$ care să aproximeze cu o acurateţe cât mai mare valorile exacte $y_i(x_1), y_i(x_2), \ldots, y_i(x_n)$ ale funcţiilor $y_i(x)$.

Observaţie: Punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt echidistante pasul fiind egal cu *h*:

$$x_{j+1} - x_j = h$$

Metodele de rezolvare rămân aceleaşi ca şi la ecuaţiile diferenţiale. În continuare se prezintă o adaptare a acestor metode pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale.

Metoda lui Euler (metoda clasică)

Se aplică în n paşi, valorile corespunzătoare ale funcţiilor $y_i(x)$, $i = 1,2,\dots,r$ la un pas j, $j = 1,2,\dots,n$ se determină cu relaţiile:

$$y_{i,j} = y_{i,j-1} + h \cdot f_i\left(x_{j-1}, y_{1,j-1}, y_{2,j-1}, \dots, y_{r,j-1}\right) = y_{i,j-1} + h \cdot f_{i,j-1}$$

$y_{i,j}$ i – identifică ecuaţia; j – identifică punctul intermediar

Metoda lui Euler modificată

$$y_{i,j} = y_{i,j-1} + \frac{h}{2} \cdot \left[f_{i,j-1} + f_i\left(x_j, y_{1,j-1} + h \cdot f_{1,j-1}, y_{2,j-1} + h \cdot f_{2,j-1}, \dots, y_{r,j-1} + h \cdot f_{r,j-1}\right)\right]$$

$$y'_i = \frac{dy_i}{dx} = f_i\left(x, y_1, y_2, \dots, y_r\right)$$

$$f_{i,j} = f_i\left(x_j, y_{1,j}, y_{2,j}, \dots, y_{r,j}\right)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Se dă sistemul de ecuaţii diferenţiale cu condiţii iniţiale Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} y0(x) = \sin(x) - \dfrac{y1(x)}{4} & y0(0) = \dfrac{\pi}{5} \\ \dfrac{d}{dx} y1(x) = \dfrac{3}{4} y0(x) - 2\cos(x) & y1(0) = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Să se determine valorile funcţiilor , *y0(x), y1(x)* pe intervalul [0,10π].

Pasul 1. Se definesc funcţiile caracteristice asociate ecuaţiile diferenţiale ce formează sistemul studiat.

$$f_1(x, y0, y1) := \sin(x) - \frac{y1}{4}$$

$$f_2(x, y0, y1) := \frac{3}{4} \cdot y0 - 2\cos(x)$$

Pasul 2. Se definesc capetele intervalului, numărul de puncte intermediare de calcul şi se determină pasul de parcurgere al intervalului de definiţie:

$$a := 0 \qquad b := 10\pi \qquad N := 100 \qquad h := \frac{b - a}{N} \qquad h = 0.314$$

Pasul 3. Se determină şirul x_i de intermediare în care se doreşte calcularea valorilor funcţiilor necunoscute $y_i(x)$:

$$i := 0..\, N \qquad x_i := a + h \cdot i$$

Pasul 4. Se introduc condiţiile iniţiale Cauchy care descriu soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale:

$$y0_0 := \frac{\pi}{5} \qquad y1_0 := \frac{3\pi}{4}$$

Pasul 5. Se calculează valoarea funcţiilor necunoscute în punctele intermediare x_i folosindu-se metoda lui Euler (forma clasică):

$$\text{Rez} := \left| \begin{array}{l} Y_{0,0} \leftarrow y0_0 \\ Y_{1,0} \leftarrow y1_0 \\ \text{for } j \in 1..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} Y_{0,j} \leftarrow Y_{0,j-1} + h \cdot f_1\left(x_{j-1}, Y_{0,j-1}, Y_{1,j-1}\right) \\ Y_{1,j} \leftarrow Y_{1,j-1} + h \cdot f_2\left(x_{j-1}, Y_{0,j-1}, Y_{1,j-1}\right) \end{array} \right. \\ Y \end{array} \right.$$

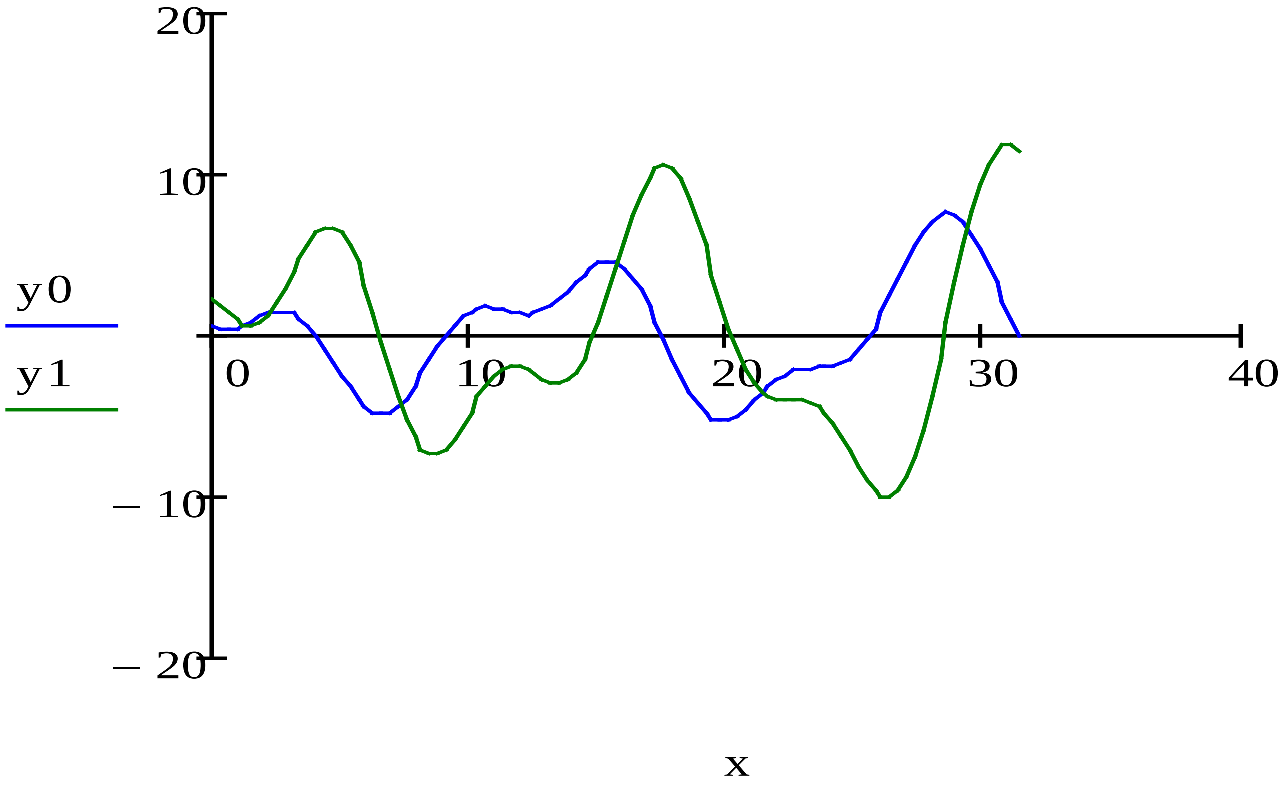
Rez =

	0	1	2	3	4	5	6
0	0.628	0.443	0.393	0.469	0.647	0.89	1.152
1	2.356	1.876	1.383	0.967	0.708	0.667	...

Pasul 6. Se extrag valorile funcţiilor necunoscute y0(x), y1(x):

$$y0 := \left(\text{Rez}^T\right)^{\langle 0 \rangle} \qquad y1 := \left(\text{Rez}^T\right)^{\langle 1 \rangle}$$

Pasul 7. Se reprezintă grafic soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale:



Metoda Runge-Kutta de ordinul IV:

$$k_{1,i} = h \cdot f_i\left(x_{j-1}, y_{1,j-1}, y_{2,j-1}, \ldots, y_{r,j-1}\right)$$

$$k_{2,i} = h \cdot f_i\left(x_{j-1} + \frac{1}{2}h, y_{1,j-1} + \frac{1}{2}k_{1,1}, y_{2,j-1}, \ldots, y_{r,j-1} + \frac{1}{2}k_{1,r}\right)$$

$$k_{3,i} = h \cdot f_i\left(x_{j-1} + \frac{1}{2}h, y_{1,j-1} + \frac{1}{2}k_{2,1}, y_{2,j-1}, \ldots, y_{r,j-1} + \frac{1}{2}k_{2,r}\right)$$

$$k_{4,i} = h \cdot f_i\left(x_j, y_{1,j-1} + k_{3,1}, y_{2,j-1} + k_{3,2}, \ldots, y_{r,j-1} + k_{3,k}\right)$$

$$y_{i,j} = y_{i,j-1} + \frac{1}{6}\left(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}\right)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Funcţia predefinită „rkfixed"

Funcţia predefinită *rkfixed* rezolvă numeric un sistem de ecuaţii diferenţiale prin metoda Runge-Kutta cu pas fix.

$$y := rkfixed(init, x_i, x_f, N, D)$$

Funcţia predefinită „Rkadapt"

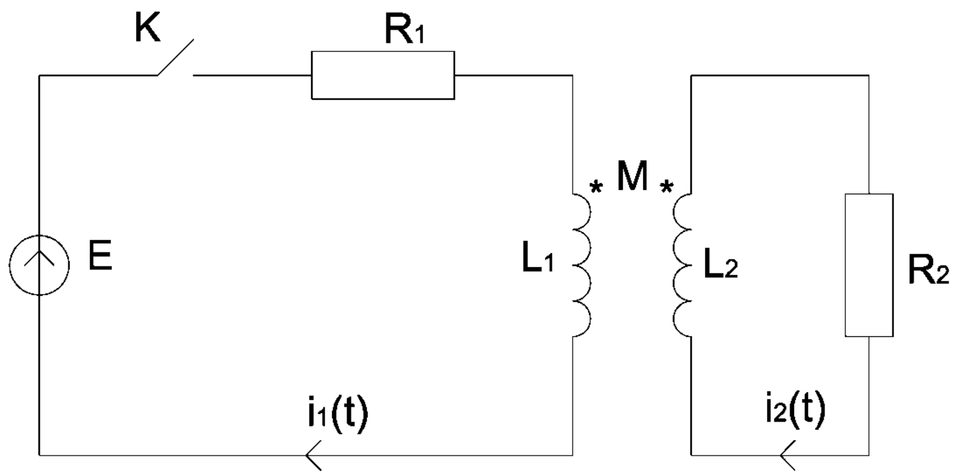
Funcţia predefinită *rkadapt* rezolvă numeric un sistem de ecuaţii diferenţiale prin metoda Runge-Kutta cu pas adaptativ.

$$y := Rkadapt(init, x_i, x_f, N, D)$$

Cele două funcţii returnează o matrice, care conţine pe prima coloană punctele intermediare de calcul, iar pe coloanele următoare valorile funcţiilor necunoscute în aceste puncte intermediare

Funcţia predefinită "rkfixed"

Problema 10.1: Să se rezolve circuitul în regim tranzitoriu ştiind că pentru t<0: i1(0)=0 şi i2(0)=0, respectiv $E=V_0=100[V]$; $L_1=100[mH]$; $L_2=200[mH]$; $M=100[mH]$; $R_1=20[\Omega]$; $R_2=10[\Omega]$.



Pasul 1. Se definesc teoremele lui Kirchhoff ce descriu circuitul studiat:

$$L_1 \cdot \frac{d}{dt} i_1(t) - M \cdot \frac{d}{dt} i_2(t) + R_1 \cdot i_1(t) = V_0$$

$$L_2 \cdot \frac{d}{dt} i_2(t) - M \cdot \frac{d}{dt} i_1(t) + R_2 \cdot i_2(t) = 0$$

Pasul 2. Se extrage derivata lui *i1(t)* din prima ecuaţie şi se înlocuieşte în adoua ecuaţie:

$$\frac{d}{dt}i_1(t) = \frac{1}{L_1}\cdot\left(V_0 - R_1\cdot i_1(t) + M\cdot\frac{d}{dt}i_2(t)\right)$$

$$L_2\cdot\frac{d}{dt}i_2(t) - \frac{M}{L_1}\cdot\left(V_0 - R_1\cdot i_1(t) + M\cdot\frac{d}{dt}i_2(t)\right) + R_2\cdot i_2(t) = 0$$

Pasul 3. Se extrage derivata lui *i2(t)* din a doua ecuaţie şi se înlocuieşte în prima ecuaţie :

$$\frac{d}{dt}i_1(t) = \frac{1}{L_1}\cdot\left(V_0 - R_1\cdot i_1(t) + M\cdot\frac{d}{dt}i_2(t)\right)$$

$$L_2\cdot\frac{d}{dt}i_2(t) - \frac{M}{L_1}\cdot\left(V_0 - R_1\cdot i_1(t) + M\cdot\frac{d}{dt}i_2(t)\right) + R_2\cdot i_2(t) = 0$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Funcţia predefinită "*rkfixed*"

Pasul 4. Se simplifică relaţiile de definiţie a derivatelor curenţilor i1(t) şi i2(t):

$$\frac{d}{dt} i_1(t) = \frac{1}{L_2 \cdot L_1 - M^2} \cdot \left[V_0 \cdot L_2 - \left(L_2 + M - \frac{M^2}{L_1} \right) \cdot R_1 \cdot i_1(t) - M \cdot R_2 \cdot i_2(t) \right]$$

$$\frac{d}{dt} i_2(t) = \frac{1}{L_2 \cdot L_1 - M^2} \cdot \left(M \cdot V_0 - L_1 R_1 \cdot i_1(t) - L_1 \cdot R_2 \cdot i_2(t) \right)$$

Pasul 5. Se defineşte vectorul de funcţii F(t,I) asociat membrului drept al sistemului de ecuaţii diferenţiale. Pentru indici 0,1 se foloseşte tasta „[":

$$F(t, I) := \frac{1}{L_2 \cdot L_1 - M^2} \cdot \begin{bmatrix} V_0 \cdot L_2 - \left(L_2 + M - \frac{M^2}{L_1} \right) \cdot R_1 \cdot I_0 - M \cdot R_2 \cdot I_1 \\ M \cdot V_0 - L_1 R_1 \cdot I_0 - L_1 \cdot R_2 \cdot I_1 \end{bmatrix}$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Pasul 6. Se definesc capetele intervalului de studiu şi numărul de puncte intermediare. Indicii *i* şi *f* se introduc cu tasta „.”:

$$t_i := 0 \qquad t_f := 0.2 \qquad N := 1000$$

Pasul 7. Se defineşte vectorul valorilor iniţiale:

$$I0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pasul 8. Se apelează funcţia predefinită ***Rkfixed***:

$$Sol := \mathrm{rkfixed}(I0, t_i, t_f, N, F)$$

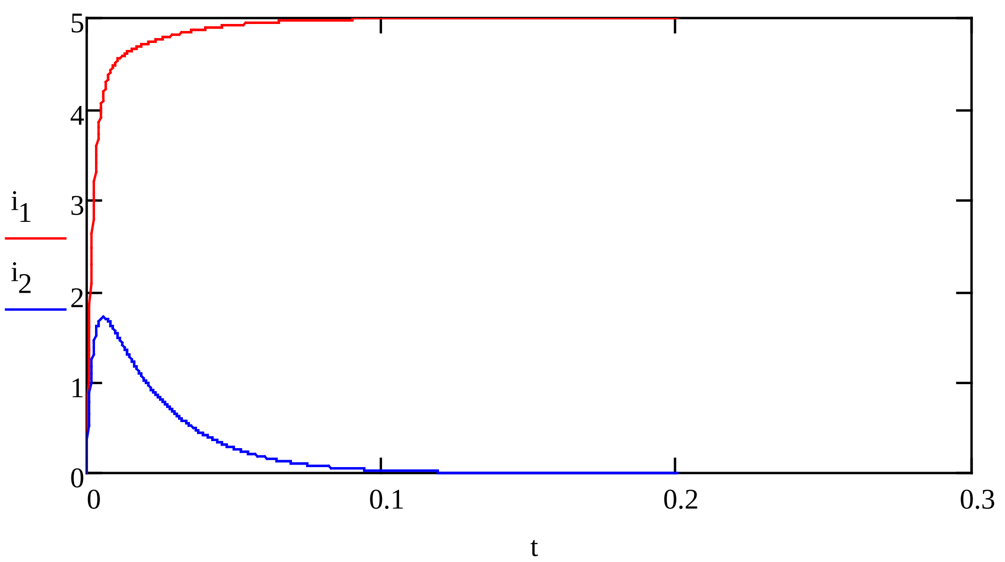
$Sol^T =$

	0	1	2	3	4	5
0	0	$2\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-4}$	$6\cdot10^{-4}$	$8\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-3}$
1	0	0.383	0.732	1.052	1.344	1.611
2	0	0.19	0.362	0.518	0.658	...

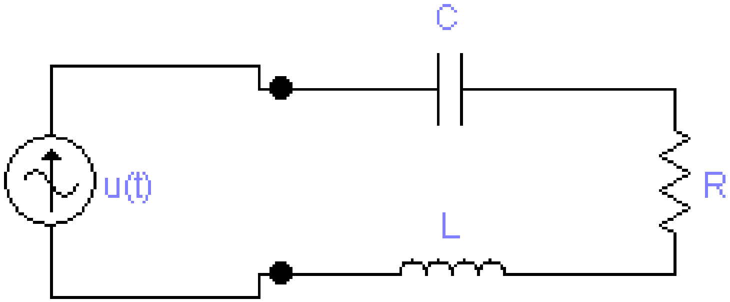
Pasul 9. Se separă vectorul momentelor intermediare *t* şi al valorilor curenţilor *i1(x)*, şi *i2(x)* la aceste momente de timp din matricea *Sol* rezultată. Separarea vectorilor *t*, *i1*, şi *i2* se face cu ajutorul comenzii Matrix Column din toolbar-ul Matrix (combinaţia de taste **"Ctrl+6"**):

$$t := Sol^{\langle 0 \rangle} \qquad i_1 := Sol^{\langle 1 \rangle} \qquad i_2 := Sol^{\langle 2 \rangle}$$

Pasul 10. Se reprezintă grafic curenţii din cele două circuite cuplate magnetic:



Se consideră un circuit R,L,C serie alimentat de la o tensiune oarecare u(t). Să se determine variaţia sarcinii electrice şi a intensităţii curentului electric din circuit în intervalul de timp de 60 ms ce trece de la începerea funcţionării.



$L := 0.2$ H $C := 30\cdot 10^{-6}$ F $R := 12$ Ω $u(t) := 24\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot 50\cdot t)$

Se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff pentru circuitul R,L,C serie de mai sus:

$$L\cdot\frac{d}{dt}i(t) + R\cdot i(t) + \frac{1}{C}\cdot\int i(t)dt = u(t)$$ - ecuaţie integro diferenţială

Se aplică legea conservării sarcinii electrice:

$$i(t) = \frac{d}{dt}q(t) \Rightarrow q(t) = \int i(t)dt \quad \text{şi} \quad \frac{d}{dt}i(t) = \frac{d^2}{dt^2}q(t)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale de ordin superior

Se rescrie ecuaţia integro-diferenţială obţinută din teorema a doua a lui Kirchhoff sub formă de ecuaţie diferenţială de ordinul II:

$$L\cdot\frac{d^2}{dt^2}q(t)+R\cdot\frac{d}{dt}q(t)+\frac{1}{C}\cdot q(t)=u(t)$$

Se transformă ecuaţia diferenţială de ordinul II într-un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul I prin aplicarea următoarelor notaţii *q0(t)=q(t)* şi *q1(t)=q0'(t)*

$$\begin{cases} q1(t)=\dfrac{d}{dt}q0(t) \\ L\cdot\dfrac{d}{dt}q1(t)+R\cdot q1(t)+\dfrac{1}{C}\cdot q0(t)=u(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}q0(t)=q1(t) & q0(0)=0 \\ \dfrac{d}{dt}q1(t)=\dfrac{u(t)-R\cdot q1(t)-\dfrac{1}{C}\cdot q0(t)}{L} & q1(0)=0 \end{cases}$$

Funcţia predefinită "*Rkadapt*"

Pasul 1. Se defineşte vectorul de funcţii D(t,Q) asociat membrului drept al sistemului de ecuaţii diferenţiale. Pentru indici 0,1 şi 2 se foloseşte tasta „[”:

$$D(t,Q) := \begin{pmatrix} Q_1 \\ \dfrac{u(t) - R\cdot Q_1 - \dfrac{1}{C}\cdot Q_0}{L} \end{pmatrix}$$

Pasul 2. Se definesc capetele intervalului de studiu şi numărul de puncte intermediare. Indicii *i* şi *f* se introduc cu tasta „.”:

$$t_i := 0 \qquad t_f := 60\cdot 10^{-3} \quad N := 1000$$

Pasul 3. Se defineşte vectorul valorilor iniţiale:

$$Q0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pasul 4. Se apelează funcţia predefinită ***Rkadapt***:

$$Sol := Rkadapt(Q0, t_i, t_f, N, D)$$