Metode Numerice – Lucrarea nr. 10

REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR ȘI SISTEMELOR DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

Rezolvarea ecuațiilor diferențiale

Modelul matematic cel mai des întâlnit al fenomenelor care stau la baza majorităţii aplicaţiilor din tehnică electrotehnice este ecuaţia diferenţială. Rezolvarea exactă a ecuaţiilor diferenţiale ordinare este posibilă pentru o clasă foarte restrânsă de ecuaţii.

O ecuaţie diferenţială este o ecuaţie care conţine pe lângă variabilele independente şi funcţiile necunoscute şi derivatele acestor funcţii (sau diferenţialele lor) până la ordinul n inclusiv (numărul n reprezintă ordinul ecuaţiei diferenţiale).

O ecuaţie diferenţială se numeşte ordinară dacă conţine o singură variabilă independentă şi are forma generală:

$$f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1}$$

Ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale conţin mai multe variabile independente şi derivatele parţiale ale funcţiilor necunoscute.

$$y\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{2}$$

Integrarea unei ecuaţii diferenţiale de ordin *n* implică impunerea a *n* condiţii. Avem următoarele situaţii:

- Dacă toate cele *n* condiţii (valori) sunt date pentru aceeaşi valoare a variabilei independente, integrarea se face cu condiţii iniţiale impuse la început în problemă (problema Cauchy).
- Atunci când intevin diverse valori ale variabilei independente, rezolvarea se face cu condiţii la limită.

Comportarea dinamică a sistemelor fizice conduce la modele matematice formate din ecuaţii diferenţiale ordinare sau sisteme de ecuaţii diferenţiale care nu pot fi rezolvate pe cale analitică (funcţii complicate ca formă sau funcţii cunoscute doar pe baza unor valori în puncte date tabelar şi obţinute pe cale experimentală). Din acest motiv se recurge la rezolvarea numerică a acestora.

Metoda dezvoltării în serie Taylor

Fie funcţia $f: I \times R \to R$, unde I este un interval real, f fiind o funcţie continua dată iar $y_0 \in R$ fiind valoarea iniţială.

Ne propunem să evaluam funcţia $y: I \to R$ în nodurile $a < x_1 < x_2 < ... < x_n < b$ aparţinând intervalului de definiţie, care satisface problema cu valori (condiţii) iniţiale (problemă Cauchy):

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \; x_0 \in I \qquad (3)$$

Se dezvoltă în serie Taylor soluţia ecuaţiei în jurul punctului x_0:

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0) y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!} y^{(n)}(x_0) + R_n(x) \qquad (4)$$

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot y^{(n+1)}(\xi), \; \xi \in [x_0, x] \qquad (5)$$

Înlocuind $x = x_0 + h$, (h fiind pasul) şi restul $R_n(x) = 0$ se obţine neglijând ultimul termen al seriei, valoarea aproximativă y_1.

Termenii seriei Taylor sunt:

$$\begin{gathered} y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = f(x_0, y_0), \quad y'' = f_x + f \cdot f_y \\ y''' = f_{xx} + (2 f_{xy} + f \cdot f_{yy}) \cdot f + (f_x + f \cdot f_y) \cdot f_y \end{gathered} \qquad (6)$$

unde:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}; \; f_y = \frac{\partial f}{\partial y}; \; f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \; f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}; \; f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad (7)$$

iar:

$$\begin{gathered} f^{(n)}(x, y) = f_x^{(n-1)}(x, y) + f_y^{(n-1)}(x, y) \cdot f(x, y) \\ f^{(0)}(x, y) = f(x, y) \Rightarrow y^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x, y(x)) \end{gathered} \qquad (8)$$

Pentru $n = 2$ rezultă

$$y_1 = y_0 + h \cdot (f + \frac{h}{2} \cdot (f_x + f \cdot f_y)) \qquad (9)$$

Prin recurenţă $\Rightarrow$ $y_2, ..., y_n$

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot (f + \frac{h}{2} \cdot (f_x + f \cdot f_y)) \qquad (10)$$

Aproximaţia este cu atât mai bună cu cât numărul de termeni luaţi în considerare în dezvoltarea Taylor este mai mare. Metoda este directă întrucât pentru calculul lui y_{i+1} sunt necesare informaţii numai despre punctul anterior (x_i, y_i).

Metoda lui Euler (metoda clasică)

Este cea mai simplă metodă de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale ordinare. Se obţine din metoda Taylor pentru $n=1$, adică se reţin numai primii doi termeni din dezvoltare rezultând forma explicită a metodei lui Euler:

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}),\ \ i = 1,2,... \tag{11}$$

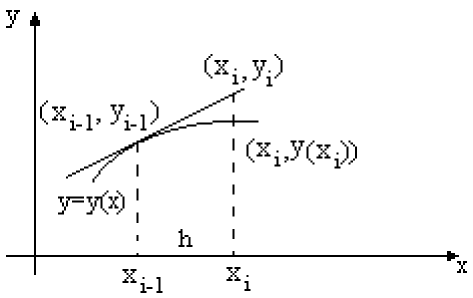
Interpretare geometrică: (se alege un pas de integrare h astfel încât intervalul de definiţie $[x_0, b]$ să fie împărţit în paşi egali: $h = \dfrac{b - x_0}{n}$).

Avem bineînţeles aceeaşi problemă de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale cu condiţii iniţiale:

$$y' = f(x,y),\ \ y(x_0) = y_0 \tag{12}$$

şi avem şi curba soluţiei $y = y(x)$.

Prin metoda lui Euler soluţia în nodul x_i se aproximează cu ordonata punctului de intersecţie a tangentei la curbă în punctul (x_{i-1}, y_{i-1}) cu dreapta $x = x_i$, după cum se poate observa în figura alăturată



Ecuaţia tangentei:

$$y = y_{i-1} + (x - x_{i-1}) \cdot y'_{i-1} \tag{13}$$

şi cum $y'(x) = f(x_{i-1}, y_{i-1})$ rezultă formula de recurenţă a algoritmului Euler:

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) \tag{14}$$

Metodele Runge-Kutta

Metodele lui Euler implică necesitatea evaluării derivatelor de ordin superior ale funcţiei $y(x)$ respectiv ale funcţiei $f(x,y)$ care duc la dificultăţi în aproximarea numerică a derivatelor de ordin superior.

În schimb metodele de tip Runge – Kutta evită în totalitate utilizarea derivatelor de ordin superior ele folosind numai derivatele de ordin I ale funcţiei $y(x)$, adică valorile funcţiei $f(x,y)$. Se calculează valorile funcţiei $f(x,y)$ într-un număr de puncte intermediare ale intervalului $[x_{i-1}, x_i]$ pentru determinarea lui y_i ,$i = \overline{1,n}$ cu o eroare minimă. Cu alte cuvinte metodele

Runge – Kutta de integrare numerică a unei ecuaţii diferenţiale, înlocuiesc calculul derivatelor funcţiei $f(x,y)$ prin evaluări ale sale în diverse puncte.

Fie ecuaţia diferenţială ordinară cu condiţii iniţiale de forma:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{15}$$

unde: $f : D \to R$, $D \subset R^2$ este o funcţie cu derivatele parţiale $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^j}$ continue pe D, unde $i + j = k$, respectiv $k = \overline{1,m}$.

Fie $x_0 < x_1 < ... < x_m = b$; $x_i = x_0 + i \cdot h$, cu $i = 1,2,...,m$, o diviziune echidistantă a intervalului $[x_0, b]$. Din raţiuni de simplificare a calculelor considerăm combinaţii liniare de valori ale funcţiei în anumite puncte ale intervalului $[x_i, x_{i-1}]$, soluţia calculându-se cu o relaţie unipas de forma:

$$y_{i+1} = y_i + a_0 \cdot k_0 + a_1 \cdot k_1 + ... + a_n \cdot k_n \tag{16}$$

unde, din condiţia ca dezvoltarea în serie Taylor a membrului drept (în funcţie de *h*) să coincidă cu membrul drept al formulei lui Taylor de ordinul $(n+1)$, avem şi formula de mai jos şi toţi coeficienţii după particularizări:

$$\begin{aligned} k_0 &= h \cdot f(x_i, y_i) \\ k_1 &= h \cdot f(x_i + \mu_1 \cdot h, y_i + \lambda_{10} \cdot k_0) \\ k_2 &= h \cdot f(x_i + \mu_2 \cdot h, y_i + \lambda_{20} \cdot k_0 + \lambda_{21} \cdot k_1) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_n &= h \cdot f(x_i + \mu_n \cdot h, y_i + \lambda_{n0} \cdot k_0 + \lambda_{n1} \cdot k_1 + ... + \lambda_{n,n-1} \cdot k_{n-1}) \end{aligned} \tag{17}$$

unde y_0 este dat cu coeficienţii a, μ, λ.

Particularizând parametrul *n* determinăm diverse formule de tip Runge – Kutta:

a) $n = 0$ (Runge – Kutta de ordinul I), y_0 - dat

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \tag{18}$$

aceasta reprezentând formula lui Euler clasică.

b) $n = 1$ (Runge – Kutta de ordinul II), y_0 - dat

$$\begin{gathered} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_0 + k_1) \\ k_0 = h \cdot f(x_i, y_i), \quad k_1 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_0) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h \cdot f(x_i, y_i))] \end{gathered} \tag{19}$$

aceasta reprezentând formula modificată a lui Euler.

c) $n = 2$ (Runge – Kutta de ordinul III), y_0 - dat

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_0 + 4k_1 + k_2\right)$$
$$k_0 = h \cdot f\left(x_i, y_i\right), \quad k_1 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right), \quad k_2 = h \cdot f\left(x_i + h, y_i + 2k_1 - k_0\right) \tag{20}$$

d) $n = 3$ (Runge – Kutta de ordinul IV), y_0 - dat

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3\right)$$
$$k_0 = h \cdot f\left(x_i, y_i\right), \quad k_1 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right), \tag{21}$$
$$k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \quad k_3 = h \cdot f\left(x_i + h, y_i + k_2\right)$$

Rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale

Se consideră un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare cu condiţiile iniţiale de mai jos, această problemă fiind cunoscută după cum ştim ca problema Cauchy sau problema cu condiţii iniţiale:

$$y'_i = \frac{dy_i}{dx} = f\left(x, y_1, y_2, ..., y_r\right); \quad y_i\left(x_0\right) = y_{i0}, \ i = 1,2,...,r \tag{22}$$

Se cere determinarea funcţiilor $y_i(x)$ care verifică sistemul şi condiţiile iniţiale, adică determinarea valorilor $y_{i,1}, y_{i,2}, ..., y_{i,n}$ care să aproximează cât mai bine valorile exacte $y_i(x_1), y_i(x_2), ..., y_i(x_n)$ ale funcţiilor $y_i(x)$.

Observaţie: Punctele $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt echidistante pasul h fiind: $x_{j+1} - x_j = h$, $i = 1,2,...,r$.

Metodele de rezolvare rămân aceleaşi ca şi la ecuaţiile diferenţiale noi prezentând aici doar o adaptare a acestor metode pentru sistemele de ecuaţii diferenţiale. Vom prezenta doar câteva metode unipas.

Metoda lui Euler (metoda clasică)

Se aplică în *n* paşi, valorile corespunzătoare ale funcţiilor $y_i(x)$, $i = 1,2,...,r$ la un pas *j*, $j = 1,2,...,n$ se determină cu relaţiile:

$$y_{1,j} = y_{i,j-1} + h \cdot f_i\left(x_{j-1}, y_{1,j-1}, y_{2,j-1}, ..., y_{r,j-1}\right) = y_{i,j-1} + h \cdot f_{i,j-1} \tag{23}$$

$y_{i,j}$; *i* – numărul ecuaţiei; *j* – numărul intervalului (pasului punctului de la finele intervalului).

Metoda Runge-Kutta de ordinul 4

Formula de calcul a soluţiei:

$$y_{i,j} = y_{i,j-1} + \frac{1}{6}\left(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}\right) \tag{24}$$

unde:

$$
\begin{aligned}
k_{1,i} &= h\cdot f\left(x_{j-1}, y_{1,j-1}, y_{2,j-1},\dots, y_{r,j-1}\right)\\
k_{2,i} &= h\cdot f\left(x_{j-1}+\frac{1}{2}h, y_{1,j-1}+\frac{1}{2}k_{1,1}, y_{2,j-1},\dots, y_{r,j-1}+\frac{1}{2}k_{1,r}\right)\\
k_{3,i} &= h\cdot f\left(x_{j-1}+\frac{1}{2}h, y_{1,j-1}+\frac{1}{2}k_{2,1}, y_{2,j-1},\dots, y_{r,j-1}+\frac{1}{2}k_{2,r}\right)\\
k_{4,i} &= h\cdot f\left(x_{j}, y_{1,j-1}+k_{3,1}, y_{2,j-1}+k_{3,2},\dots, y_{r,j-1}+k_{3,k}\right)
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Instrumente folosite

Funcţia predefinită „rkfixed”

Funcţia predefinită ***rkfixed*** rezolvă numeric un sistem de n ecuaţii diferenţiale prin metoda Runge-Kutta cu pas fix. Ea este apelată în modul următor:

$$y := rkfixed(init, x_i, x_f, N, D) \tag{26}$$

unde: *init* – este un vector cu *n* valori iniţiale pentru cele *n* necunoscute ale sistemului de ecuaţii diferenţiale; x_i, x_f – sunt capetele intervalului pe care se doreşte rezolvarea numerică a sistemului de ecuaţii diferenţiale; *N* – este numărul punctelor intermediare de calcul; *D* – este un vector de funcţii de forma $D(x, y)$ care descrie membrul drept al ecuaţiilor care formează sistemul de ecuaţii diferenţiale.

Funcţia returnează o matrice *y*, care conţine pe prima coloană punctele intermediare de calcul, iar pe coloanele următoare valorile funcţiilor necunoscute în aceste puncte intermediare.

Funcţia predefinită „Rkadapt”

Funcţia predefinită ***Rkadapt*** rezolvă numeric un sistem de n ecuaţii diferenţiale prin metoda Runge-Kutta cu pas adaptativ. Funcţia este apelată cu următorii parametrii:

$$\mathrm{S} := \mathrm{Rkadapt}(\mathrm{Y0}, \mathrm{t1}, \mathrm{t2}, \mathrm{N}, \mathrm{D}) \tag{27}$$

unde: *Y0* – este un vector cu *n* valori iniţiale pentru cele *n* necunoscute ale sistemului de ecuaţii diferenţiale; *t1, t2* – sunt capetele intervalului pe care se doreşte rezolvarea numerică a sistemului de ecuaţii diferenţiale; *N* – este numărul punctelor intermediare de calcul; *D* – este un vector de funcţii de forma $D(t, y)$ care descriu membrul drept al ecuaţiilor care formează sistemul de ecuaţii diferenţiale.

Funcţia returnează o matrice *S*, care conţine pe prima coloană punctele intermediare de calcul, iar pe coloanele următoare valorile funcţiilor necunoscute în aceste puncte intermediare.