



## Metode Numerice

# INTEGRAREA NUMERICĂ

### Demonstrația 01 (*Formulele Newton-Côtes*):

Având în vedere că integrala definită  $\int_a^b f(x) dx$  nu poate fi direct calculabilă se va aproxima funcția cu un polinom de interpolare astfel încât  $f(x) = p_N(x) + R_N(x)$  deci integrala va fi:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b p_N(x) dx + \int_a^b R_N(x) dx \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_N(x) dx$$

Polinomul de interpolare poate fi asimilat cu polinomul de interpolare Lagrange:

$$p_N(x) = L_N(x) = \sum_{i=0}^N l_i(x) \cdot f(x_i)$$

unde:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_N)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_N)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

este polinomul bază Lagrange,

$$R_N(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_N)$$

este restul Lagrange, iar  $\xi$  este un punct din cel mai mic interval care conține nodurile  $x_0, x_1, \dots, x_N$  și  $x$ .

Deci formula de cuadratură (integrare numerică) *Newton-Côtes* este:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \int_a^b L_N(x) dx + \int_a^b R_N(x) dx \\ &= \int_a^b \left[ \sum_{i=0}^N f(x_i) \cdot l_i(x) \right] dx + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(N+1)!} \prod_{i=0}^N (x - x_i) dx \\ &= \sum_{i=0}^N a_i \cdot f(x_i) + \frac{1}{(N+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^N (x - x_i) dx \end{aligned}$$



unde  $\xi(x) \in [a, b]$  pentru orice  $x$  și se notează:  $a_i = \int_a^b l_i(x) dx, i = 0, 1, \dots, N$

Deci formula de cuadratură devine:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^N a_i \cdot f(x_i)$$

cu eroarea dată de relația:

$$Eroare(f) = \frac{1}{(N+1)!} \int_a^b \left[ f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^N (x - x_i) \right] dx$$

Pentru fiecare  $N \geq 1$  cele  $N + 1$  numere reale  $a_i$  sunt independente de funcția  $f$ , pot fi tabelate, deci pot fi folosite pentru orice aplicație și se numesc coeficienții lui *Côtes*.

### Demonstrația 02 (Formula Trapezelor):

Aplicând Lagrange pentru  $N = 1$  avem:  $f(x) = L_1(x) + R_1(x)$

unde:

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \sum_{i=0}^1 l_i(x) \cdot f(x_i) = l_0(x) \cdot f(x_0) + l_1(x) \cdot f(x_1) = \\ &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot f(x_1) = \frac{x - b}{a - b} \cdot f(a) + \frac{x - a}{b - a} \cdot f(b) \end{aligned}$$

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = \underbrace{\int_a^b L_1(x) dx}_{T_1(f)} + \int_a^b R_1(x) dx$$

De unde integrala se poate aproxima ca și:

$$I(f) \approx T_1(f) = \int_a^b L_1(x) dx = \int_a^b \frac{x - b}{a - b} f(a) dx + \int_a^b \frac{x - a}{b - a} f(b) dx$$

cu eroarea:

$$Eroarea = \int_a^b R_1(x) dx, \quad R_1(x) = \frac{f''(\xi_X)}{2!} (x - a)(x - b), \quad \xi_X \in (a, b)$$

pe de altă parte

$$\begin{aligned} Eroarea &= I(f) - T_1(f) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b L_1(x) dx = \int_a^b \underbrace{(f(x) - L_1(x))}_{R_1(x)} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi_X) (x - a)(x - b) dx \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{T.Medie} \begin{cases} f, g - \text{integrabile pe } [a, b] \\ f - \text{mărginită } m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \exists \mu \in (m, M): \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx \\ g(x) - \text{semn constant pe } (a, b) \end{cases}$$

Deci:

$$I(f) - T_1(f) = \frac{1}{2} \int_a^b (x - a)(x - b) f''(\xi_X) dx$$



$$\xrightarrow{T.Medie} I(f) - T_1(f) = \frac{f''(\eta)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) dx = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\eta)$$

unde  $f''(\eta) = \mu$  din T.Medie  $\eta \in (a, b)$

În consecință dacă scade lungimea intervalului  $(a, b)$  atunci scade și eroarea aferentă formulei.

Deci:

$$I(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) - f(b)) - \frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\eta)$$

### Demonstrația 03 (Formula Generalizată a Trapezelor):

Se împarte intervalul  $[a, b]$  în  $N$  subintervale,  $N + 1$  puncte de discretizare (noduri):

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

Pe fiecare subinterval  $[x_{i-1}, x_i]$  se aplică metoda Trapezelor:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N \frac{x_i - x_{i-1}}{2} (f(x_i) + f(x_{i-1})) = T_N(f)$$

Dacă se utilizează intervale echidistante  $x_i - x_{i-1} = h \Rightarrow h = \frac{b-a}{N}$  atunci:

$$\begin{aligned} I(f) \approx T_N(f) &= \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + f(x_N)) \\ &= \frac{h}{2} \left( f(x_0) + f(x_N) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \right) \end{aligned}$$

iar

$$Eroarea = I(f) - T_N(f) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \sum_{i=1}^N \frac{x_i - x_{i-1}}{2} (f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

$$= \sum_{i=1}^N \left[ \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \frac{x_i - x_{i-1}}{2} (f(x_i) - f(x_{i-1}))}_{-\frac{1}{12}h^3 f''(\xi_{i,h}) \text{ (eroarea de la Trapez), } \xi_{i,h} \in [x_{i-1}, x_i]} \right]$$

$$\Rightarrow Eroarea = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{12} h^3 f''(\xi_{i,h}) = - \frac{1}{12} h^3 \sum_{i=1}^N f''(\xi_{i,h}), \quad h = \frac{b-a}{N}$$

$$\Rightarrow Eroarea = - \frac{b-a}{12} h^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f''(\xi_{i,h})}_{f''(\xi_h)} \quad \left| \text{T. Valorii Medii Discrete} \right.$$

unde:  $\xi_h \in [a, b]$  depinde de valoarea lui  $h$

$$\Rightarrow Eroarea = - \frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot f''(\xi_h)$$



Convergența Procesului:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |I(f) - T_N(f)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot |f''(\xi_h)| \leq \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b-a}{12} h^2 \right) \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(\xi_h)| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} T_N(f) = I(f) - \text{rezultatul exact pentru } N \rightarrow \infty$$

### Demonstrația 04 (Formula lui Simpson):

Aplicând Lagrange pentru  $N = 2$  pe trei puncte consecutive  $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$

$$h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = \frac{b-a}{2}$$

avem:

$$L_2(x) = f(x_0) \cdot l_0(x) + f(x_1) \cdot l_1(x) + f(x_2) \cdot l_2(x)$$

de unde formula integralei va avea următoarea formă:

$$I(f) \approx S_2(f) = A \cdot f(x_0) + B \cdot f(x_1) + C \cdot f(x_2)$$

unde:

$$A = \int_a^b l_0(x) dx, \quad B = \int_a^b l_1(x) dx, \quad C = \int_a^b l_2(x) dx$$

$$A = \int_a^b l_0(x) dx = \int_a^{a+2h} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{\underbrace{(x_0-x_1)}_{-h} \underbrace{(x_0-x_2)}_{-2h}} dx = \frac{1}{2h^2} \int_a^{a+2h} [x - (a+h)][x - (a+2h)] dx$$

Se face substituția:  $x - a - h = u \Rightarrow dx = du, \begin{cases} \text{pt. } x = a \text{ avem } u = -h \\ \text{pt. } x = a + 2h \text{ avem } u = h \end{cases}$

$$A = \frac{1}{2h^2} \int_{-h}^h u(u-h) du = \frac{1}{2h^2} \cdot \left( \frac{u^3}{3} - h \frac{u^2}{2} \right) \Big|_{-h}^h = \frac{h}{3}$$

$$\text{Analog: } B = \frac{4h}{3} \text{ și } C = \frac{h}{3}$$

deci:

$$I(f) \approx S_2(f) = \frac{h}{3} \cdot (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$