

## Curs 2

# Metode Numerice de Rezolvare a Ecuațiilor Neliniare Algebrice și Transcendente

*Aplicații în Ingineria Electrică*

**As. Dr. ing. Levente CZUMBIL**

Laboratorul de Cercetare în Metode Numerice  
Departamentul de Electrotehnică, Inginerie Electrică

E-mail: [Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro](mailto:Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro)



**Ecuatiile neliniare** constituie una din cele mai frecvente aplicații de calcul numeric care apar în cadrul **activităților de proiectare** din ingineria electrică.

### **Problema...**

➤ Expresia ecuației este foarte complicată sau valorile coeficienților nu se cunosc exact (rezultați din determinări experimentale sau au fost calculați pe baza unor ipoteze simplificatoare)!

### **Concluzia...**

➤ Nu se pune problema soluționării exacte a ecuațiilor cu metode directe (nr. finit de pași – cunoscut apriori)

➤ Se utilizează **metode numerice aproximative – metode iterative** cu convergență teoretic infinită dar practic finită (prin estimarea permanentă a gradului de precizie a determinării soluției sau soluțiilor)

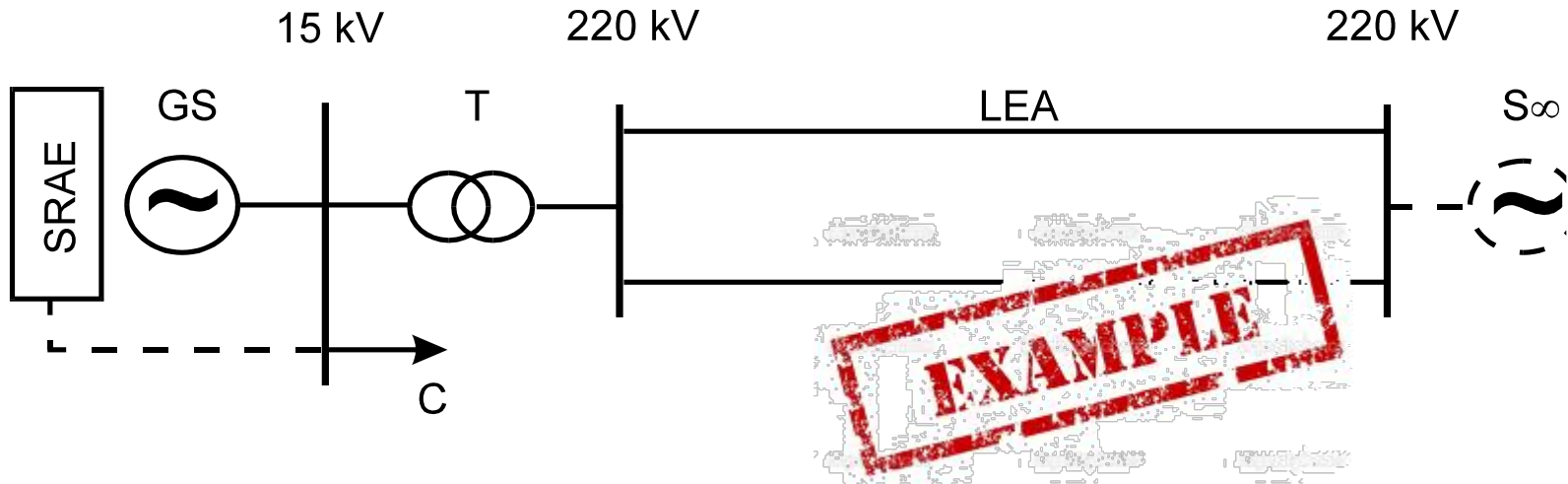
➤ Soluțiile ecuațiilor neliniare se obțin așadar ca **limite ale unor șiruri convergente**.

**Engineering is seeing solutions,  
not finding problems**



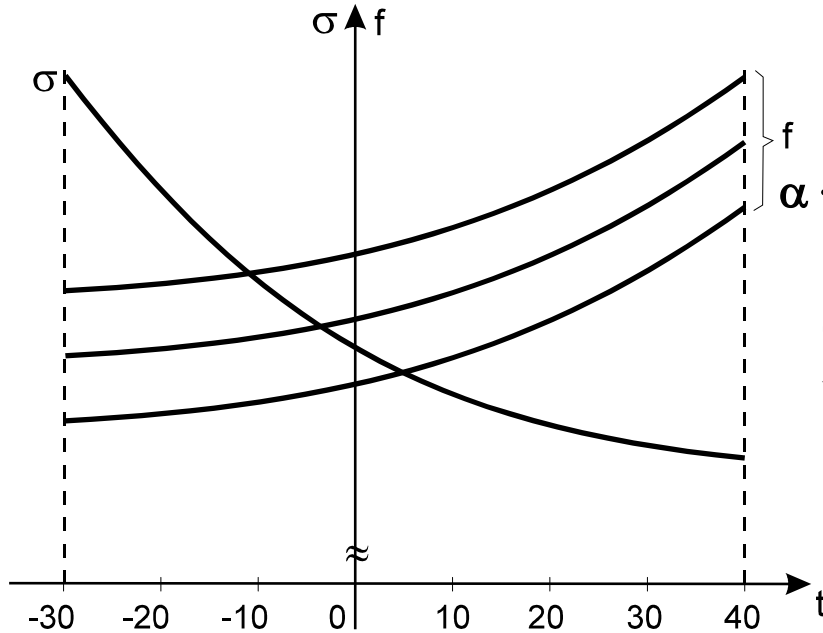
## Exemple de aplicații din ingineria electrică

- **Testarea stabilității la mici perturbații a generatoarelor electrice distribuite** (ex. turnuri eoliene), conectate la rețea; soluțiile complexe ale unei ecuații polinomiale



- La **proiectarea mașinilor electrice** care acționează compresoare de frig, care funcționează în regim de saturație, este necesar să se calculeze câmpul magnetic în zona punctului de funcționare în care inducția magnetică ajunge la 2 Tesla; impune rezolvarea unei ecuații polinomiale;

➤ **În dimensionarea mecanică a unei linii electrice aeriene (LEA), se rezolvă ecuația de stare a conductoarelor electrice, care exprimă comportarea liniei sub acțiunea efortului unitar exercitat de conductoare asupra stâlpilor de susținere și în condiții meteorologice diferite (vânt, chiciură);**



$$\alpha \cdot (t_a - t_b) + \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{0a} - \sigma_{0b}) = \frac{l_e^2}{24} \cdot \left[ \left( \frac{g_a}{\sigma_{0a}} \right)^2 + \left( \frac{g_b}{\sigma_{0b}} \right)^2 \right]$$

Curbele de montare se referă la variația efortului unitar  $\sigma$  și a săgeții  $f$  în funcție de temperatura  $t$ .

just  
another  
example

**Exemplu concret:** În cadrul unui studiu coexistență LEA – CATV (rețea de cablu TV - Turda ) s-a impus rezolvarea repetată a ecuației de stare, având diferite valori ale coeficienților, cu scopul de a verifica rezistența LEA existentă, în condițiile montării pe același tronson de stâlpi a rețelei CATV;

## Considerații Teoretice

Se consideră o ecuație de formă generală:

$$f(x) = 0$$

Pentru majoritatea aplicațiilor din ingineria electrică – domeniul de definiție este un interval I:

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}$$

Teorema lui Rolle-de localizare a rădăcinilor:

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) \quad x_0\text{-rădăcina ecuației}$$

### Observații

Dacă  $f(x)$  este un polinom atunci ecuația se numește **ecuație algebrică**; în caz contrar se numește **ecuație transcendentă**

- Se numește:
- rădăcina funcției (ecuației) – numai la ecuații algebrice
  - zeroul (soluția) funcției - la ecuații transcendente

- Se va demonstra pas cu pas modul în care o aplicație reală (provenită din ingineria electrică) se **modelează matematic** și apoi se rezolvă numeric cu ajutorul **metodelor numerice**;
- Intuitiv, vor fi experimentate **fazele de soluționare numerică** a ecuațiilor algebrice (polinomiale), stabilite ca model matematic al aplicației reale;
- De la desfășurarea **particularizată** a metodei numerice de rezolvare, se trece la **descrierea ei generală**, fiind subliniate limitele de aplicabilitate, avantaje și dezavantaje;



# 1. Metoda biseeciei (a înjumătățirii intervalului)

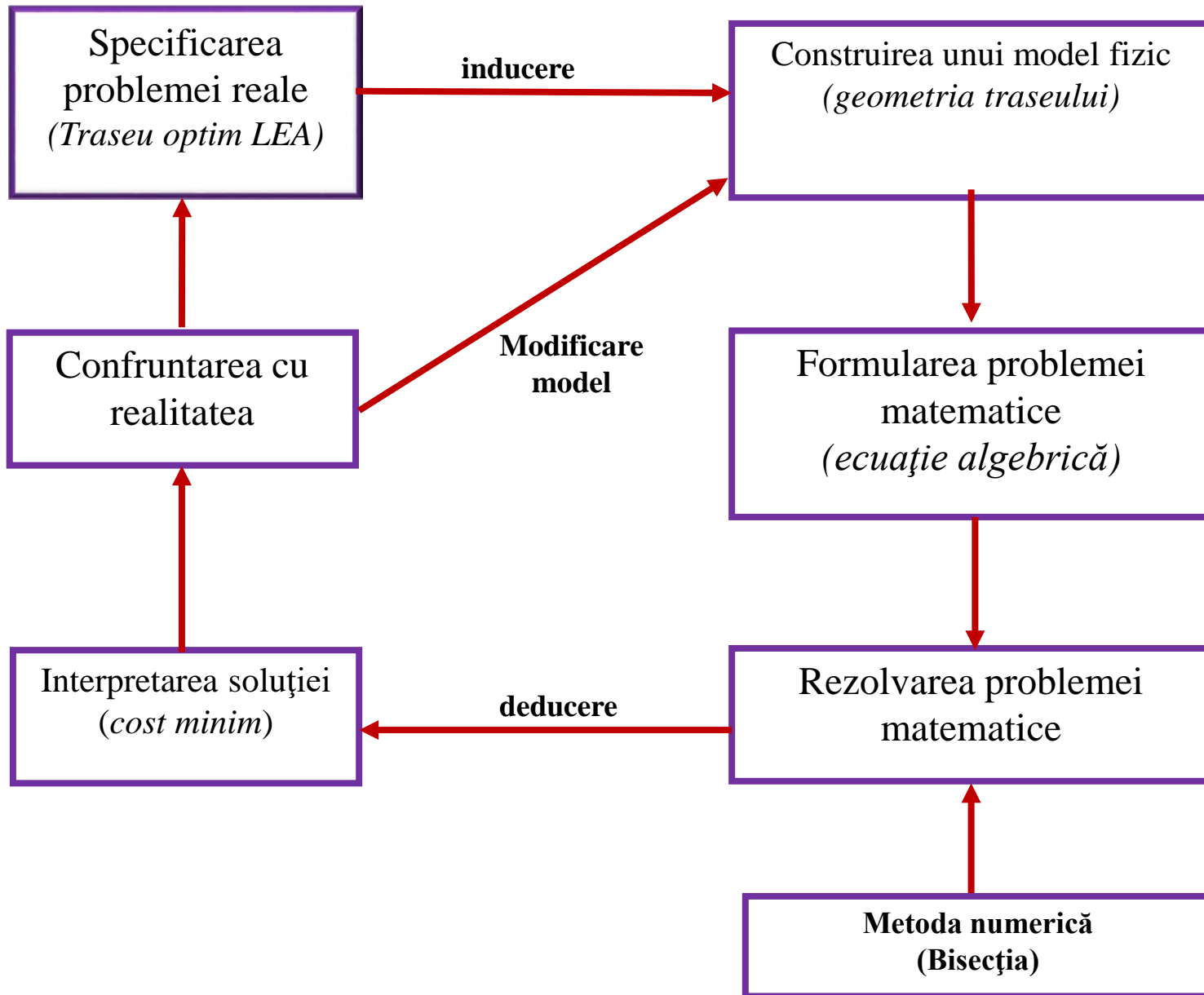
## Aplicația Practică

Societatea de transport a energiei electrice, S.C TRANSELECTRICA S.A, și-a stabilit ca obiectiv de investiții pe anul 2009 construirea unei linii electrice de interconexiune între două stații electrice. Pe distanța celor două stații, datorită diferențelor de teren, amplasamentul se împarte în două zone, delimitate printr-o linie WE, așa încât costul execuției liniei pe fiecare zonă se caracterizează prin indicii  $C_1$  și  $C_2$ .

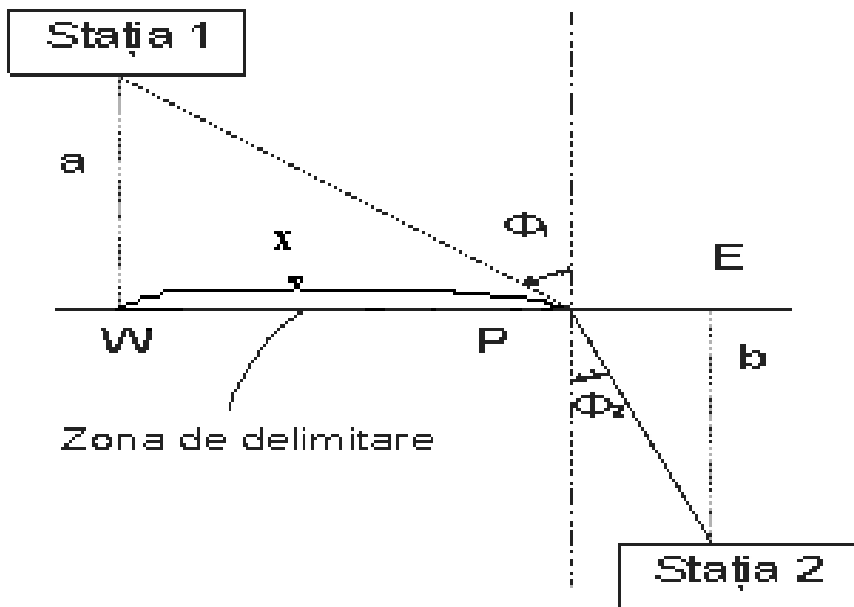
Se pune problema stabilirii **traseului optim** al liniei astfel încât **costul de execuție să fie minim**.

Pentru soluționarea modelului matematic care provine din această aplicație este necesar apelul la o **metodă numerică**.





## Modelul matematic pe baza datelor problemei tehnice de soluționat:



Ideea de bază se reduce la localizarea unui punct  $P$  pe frontiera  $WE$  prin care linia electrică să traverseze limita de separație dintre cele două zone. Având la dispoziție indicii de cost, se poate stabili o relație de egalitate între sinusurile unghiurilor formate de direcțiile traseelor de linie din cele două zone și perpendiculara dusă prin punctul  $P$  la zona de delimitare:

Reprezentarea geometrică de amplasament

$$C_1 \cdot \sin \theta_1 = C_2 \cdot \sin \theta_2 \qquad C_1^2 \cdot \frac{x^2}{a^2 + x^2} = C_2^2 \cdot \frac{(L-x)^2}{b^2 + (L-x)^2}$$

$$C_1^2 \cdot x^2 \cdot [b^2 + (L-x)^2] = C_2^2 \cdot (L-x)^2 \cdot (a^2 + x^2) \quad - \textit{ecuație algebrică}$$

Exprimarea devine mai sugestivă prin înlocuirea datelor cunoscute:

$$a=3 \text{ km}; b=1 \text{ km}; WE=L=12 \text{ km}; C_1=87000 \text{ RON/km}; C_2=93000 \text{ RON/km}.$$

$$-1080 \cdot x^4 + 25920 \cdot x^3 - 225792 \cdot x^2 + 1868184 \cdot x - 11209104 = 0$$

### **Coeficienți determinați experimental și prin simplificări în model!!!**

➤ Necunoscuta în această ecuație polinomială (algebrică) este **distanța  $x$**  de la marginea  $W$  la punctul  $P$  (capetele se consideră știute  $x_W$  și  $x_E$ ).

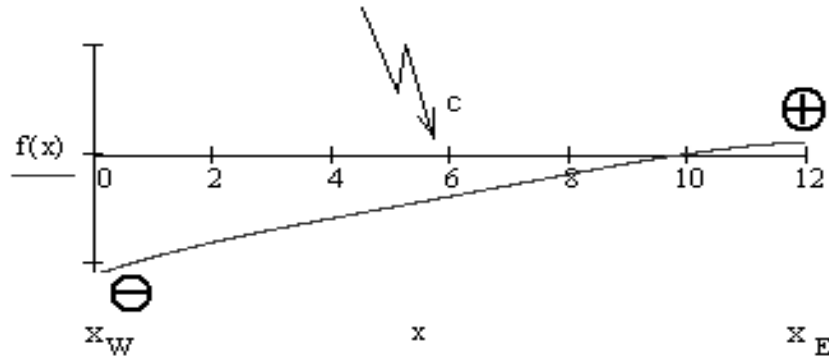
➤ Dacă membrul stâng al acestei ecuații se exprimă ca o funcție  $f(x)$ , evident derivabilă pe intervalul  $[x_W; x_E]$ , se permite efectuarea următoarelor testări:

$$f(x) = -1080 \cdot x^4 + 25920 \cdot x^3 - 225792 \cdot x^2 + 1868184 \cdot x - 11209104$$

Dacă:  $f(x_W) \cdot f(x_E) < 0$

Între cele două valori limită pe care poate să le ia necunoscuta  $x$  trebuie să existe o valoare care să anuleze funcția (Rolle)!!!

**Reprezentarea grafică** a polinomului pe intervalul definit arată clar îndeplinirea condiției anterioare:



Variația polinomului și partiționarea intervalului de definire

Dar mai mult decât atât, în vederea localizării cât mai exacte a soluției, se sugerează ideea împărțirii intervalului prin înjumătățire succesivă:

$$c = \frac{1}{2} \cdot (x_W + x_E)$$

Dacă  $f(x_W) \cdot f(c) = 0$  soluția este chiar valoarea  $c$ ;

$f(x_W) \cdot f(c) < 0$  soluția se află în intervalul  $[x_W; c]$ ;

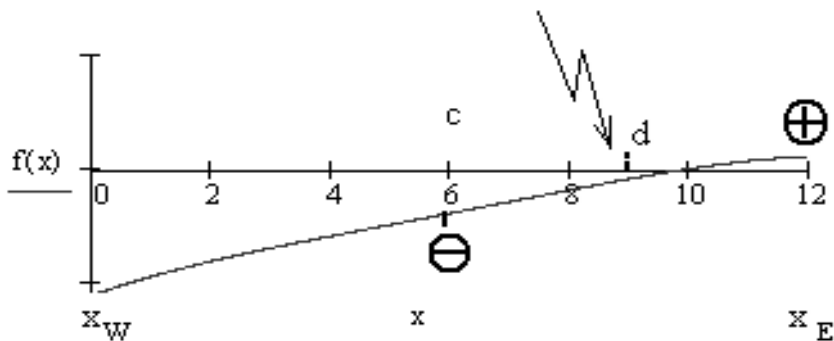
$f(x_W) \cdot f(c) > 0$  soluția se află în cealaltă jumătate de interval.

**Observație:** reprezentarea grafică a funcției oferă ca evidentă validitatea celei de-a treia ipoteze.

Se înjumătățește intervalul  $[c; x_E]$  prin aceeași formulă de mediere aritmetică:

$$d = \frac{1}{2} \cdot (c + x_E)$$

*Variația grafică a funcției polinomiale arată clar verificarea inegalității !!!*

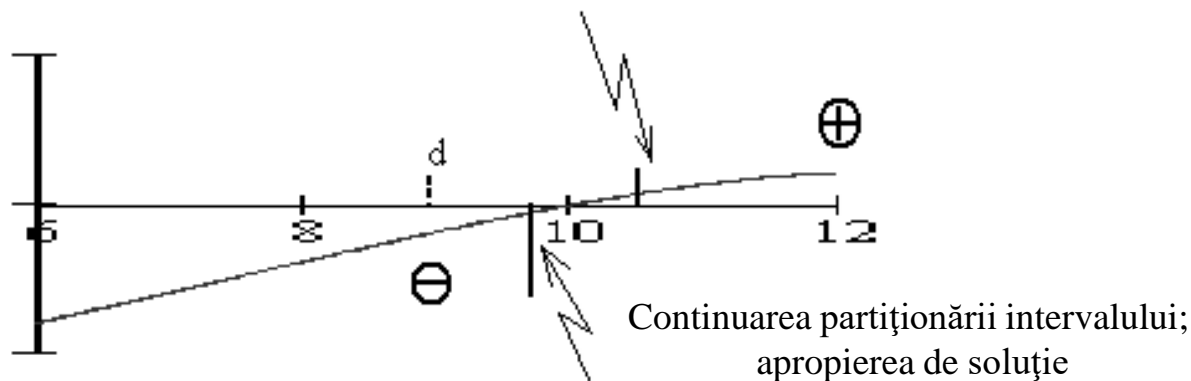


$$f(d) \cdot f(x_E) < 0$$

*Indică localizarea soluției în intervalul delimitat de punctele în care se face această evaluare!!!*

A doua înjumătățire a intervalului

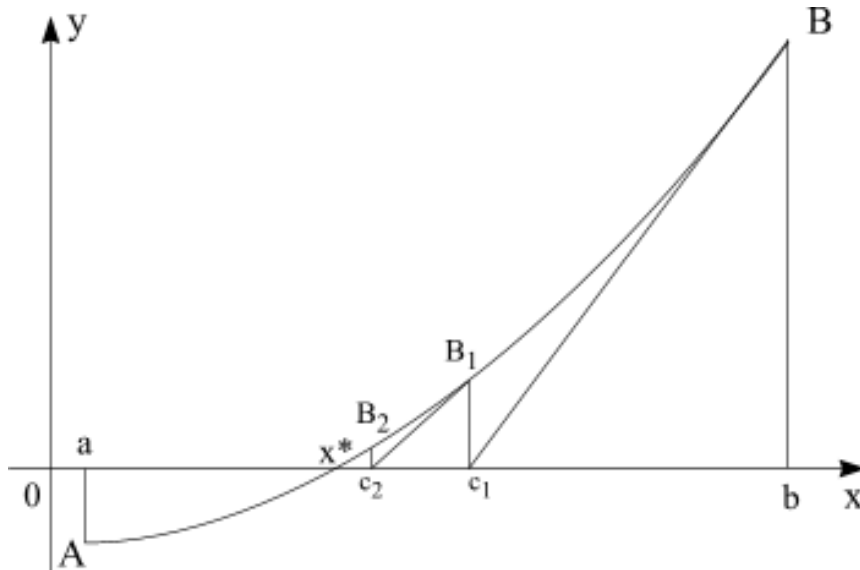
Continuând cu înjumătățirea intervalului, se observă, restrângerea domeniului în care se află soluția, apropierea tot mai certă de valoarea care anulează funcția polinomială!



Continuarea partiționării intervalului;  
apropierea de soluție

Procesul de restrângere treptată a intervalului de definiție se poate derula până când evaluarea funcției în variabila de înjumătățire ( $c$ ,  $d$ , ...) devine mai mică decât o valoare impusă, ori efectiv se anulează. În oricare din aceste situații, se consideră determinată soluția realizabilă a polinomului în limita unei precizii, impuse apriori.

➤ Modalitatea prin care s-a soluționat aplicația propusă nu reprezintă altceva decât o metodă numerică, numită **metoda biseției (metoda înjumătățirii intervalului)**.



➤ Pornind de la cele expuse, se va căuta descoperirea **caracterului de generalitate** al acestei metode.



Ideea se transpune **generalizat** după următorul **algoritm**:

Pasul 1: Se inițializează limitele intervalului de căutare în care se caută soluția cu Rolle

$$[a; b] = [a_0; b_0]$$

Pasul 2: start iterativ  $k = 0$

Pasul 3: la un pas oarecare al procesului de calcul se determină noua valoare a soluției

$$c_{k+1} = a_k + \frac{1}{2} \cdot (b_k - a_k)$$

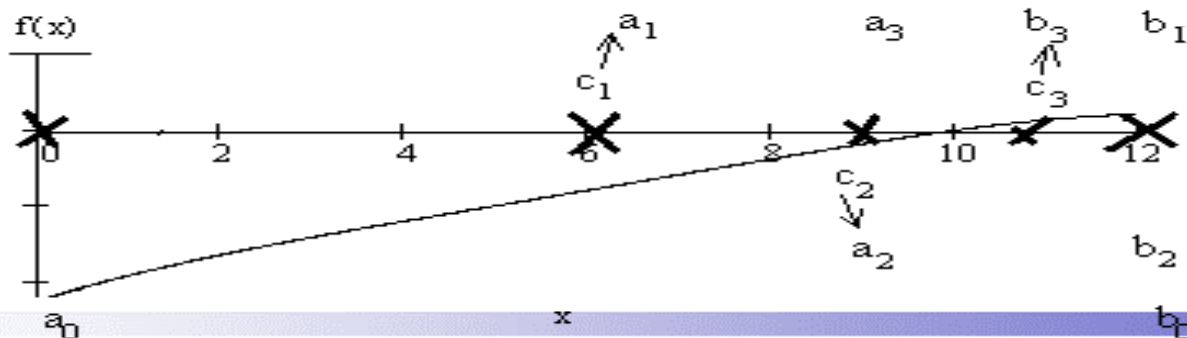
Pasul 4: La același pas se calculează  $f(c_{k+1})$ ,  $f(a_k)$  rezultând noile limite ale intervalului de căutare:

$$f(c_{k+1}) \cdot f(a_k) < 0 \Rightarrow a_{k+1} = a_k; b_{k+1} = c_{k+1}$$

Pasul 5: Dacă:

$$f(c_{k+1}) \cdot f(b_k) < 0 \Rightarrow a_{k+1} = c_{k+1}; b_{k+1} = b_k$$

Pasul 6: Incrementează  $k = k + 1$  și reia Pasul 3.



➤ Oricât de mult s-ar restrânge intervalul în jurul soluției, există posibilitatea ca valoarea determinată considerată drept soluție să nu fie cea adevărată.

➤ Mai mult, procesul iterativ de înjumătățire nu poate continua la infinit, ci trebuie oprit după un anumit număr de partiționări. Se va determina acest număr prin stabilirea unei **erori limită** între valoarea determinată ca și soluție și valoarea adevărată.

➤ **Demonstratie – Numarul de iterații necesare - pe tablă**

$$n := \text{round} \left( \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)} \right)$$



# Comunicare

Pasivă

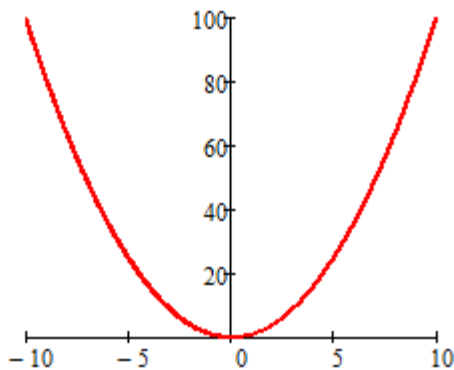
– Aertivă –

Agresivă



## Concluzii asupra Metodei Bisecției

- **Metoda bisecției** converge spre soluție indiferent cât de departe este punctul de pornire, fapt pentru care se consideră o **metodă globală** de determinare a soluțiilor;
- **Convergența spre soluție este lentă**, trebuie executat un număr mare de împărțiri ale intervalului pentru a ajunge la o precizie satisfăcătoare;
- Metoda bisecției nu poate fi utilizată pentru determinarea soluțiilor unei funcții care este tangentă la axa  $Ox$ , fără să o străpungă, fiindcă nu se verifică chiar condiția de start.



$$f(a) \cdot f(b) < 0$$



Conclusion

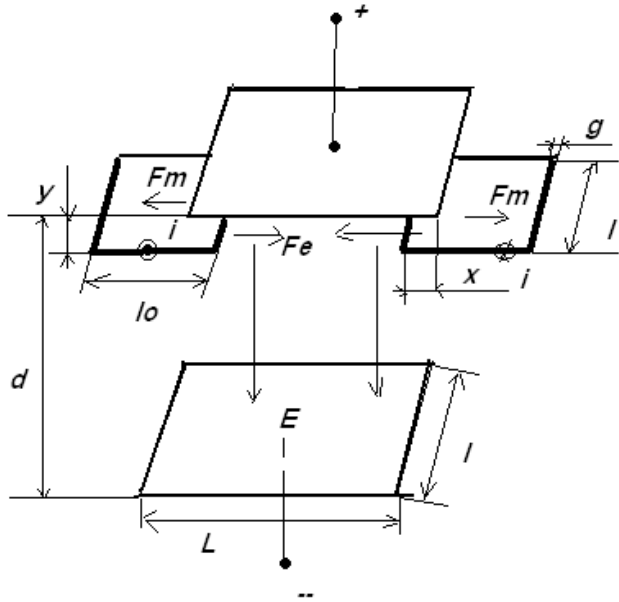
## 2. Metoda lui Newton (metoda tangentei)

### Aplicație Practică

S.C ARMĂTURA S.A, firmă cu profil electromecanic, a primit o comandă de prelucrare a unor plăci metalice utilizate în construcția releelor de telefonie mobilă. Operația principală executată asupra acestor piese constă în vopsirea prin pulverizare în câmp electric, procedeu numit **vopsire electrostatică**.

- Problema care se pune în cadrul acestei aplicații se referă la găsirea unei legături între dimensiunile de vopsit ale unei plăci și mărimile electrice prin care se poate ajusta procesul. Astfel, prin reglajul acestor mărimi, tensiune electrică, respectiv curent electric care parcurge plăcile, devine posibil controlul automat al suprafeței de vopsit pentru fiecare plăcuță.
- Cunoscând caracteristicile și dimensiunile instalației de vopsire electrostatică, aplicația se poate modela simplu printr-un condensator plan în care se introduc simultan două piese de vopsit. În primul rând trebuie determinată distanța maximă de pătrundere a plăcilor în interiorul condensatorului plan, distanță care limitează direct suprafața ce urmează a fi acoperită cu vopsea a acestora.

**Modelul** prin care se poate caracteriza problema:



Dimensiunile geometrice ale sistemului condensator plan și piese de vopsit:

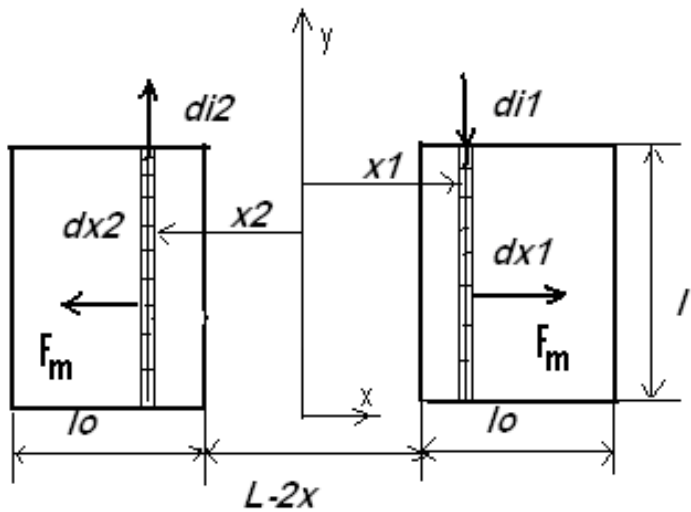
$$L = 0.65 \text{ m} ; l = 0.3 \text{ m} ; l_0 = 0.25 \text{ m} ; d = 1 \text{ m} ; \\ g = 0.002 \text{ m} ; y = 0.15 \text{ m} ;$$

Mărimile electrice de alimentare:

$$U = 20000 \text{ V} ; i = 3 \text{ A}.$$

Modelarea pieselor și a instalației  
de vopsire electrostatică

Rămâne să se determine **ecuația de echilibru** a forței electrice cu cea electrodinamică, iar din această relație să se găsească mărimea variabilei  $x$  de pătrundere a pieselor în interiorul condensatorului.



Forța de respingere dintre cele două piese se exprimă integral cu formula:

$$F_m(x) = \frac{\mu_0 \cdot i^2 \cdot \ell}{2 \cdot \pi \cdot \ell_0^2} \cdot \int_{\frac{L-x}{2}}^{\frac{L-x+\ell_0}{2}} \int_{\frac{L-x}{2}}^{\frac{L-x+\ell_0}{2}} \frac{1}{x_1 + x_2} dx_1 dx_2$$

Iar din ecuația de echilibru a forțelor  $F_e(x) - F_m(x) = 0$

și după înlocuirile numerice se deduce o ecuație transcendentă:

Piesele de vopsit – vedere de sus

$$(9.936 - 17.28 \cdot x) \cdot \ln(23 - 40 \cdot x) + (34.56 \cdot x - 15.55) \cdot \ln(9 - 20 \cdot x) + \\ + (5.616 - 17.28 \cdot x) \cdot \ln(13 - 40 \cdot x) + (23.95 \cdot x - 12.896) = 0$$

În această ecuație necunoscuta este **distanța maximă de pătrundere** a pieselor în interiorul condensatorului, în condițiile în care sunt fixate mărimile electrice de alimentare.

Pentru a determina valoarea variabilei  $x$  care verifică ecuația neliniară de mai sus, se notează membrul stâng al ecuației cu o funcție:

$$f(x) = (9.936 - 17.28 \cdot x) \cdot \ln(23 - 40 \cdot x) + (34.56 \cdot x - 15.55) \cdot \ln(9 - 20 \cdot x) + \\ + (5.616 - 17.28 \cdot x) \cdot \ln(13 - 40 \cdot x) + (23.95 \cdot x - 12.896)$$

-se dezvoltă în serie Taylor funcția  $f(x)$  în jurul unui punct  $x_0$  reținând doar primii doi termeni

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

-considerând pe  $x_0$  ca o aproximație inițială a soluției ecuației de la care s-a pornit, dacă în expresia dezvoltării Taylor de mai sus se înlocuiește variabila  $x$  cu o nouă aproximare a soluției,  $x_1$ , pentru care se presupune că  $f(x)$  se anulează, atunci rescriem:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

-în acest fel aproximația  $x_1$  devine calculabilă în raport cu prima aproximație, și mai departe pentru a afla o aproximație cu o precizie sporită, efectuăm succesiv calculele

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow \dots \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- ajungem astfel la o aproximație  $x_{n+1}$  a soluției, pe care în funcție de numărul de iterații parcurse o vom adopta ca fiind soluția căutată a problemei.

Numeric, pornind de la o aproximație inițială  $x_0 = 0.2 \text{ m}$ , se ajunge după  $n = 9$  iterații la  $x_9 = 0.3 \text{ m}$ .



Modalitatea prin care s-a soluționat ecuația neliniară este aplicarea **metodei numerice a lui Newton**.



## Caracterul general al metodei lui Newton

Fie o ecuație de forma  $f(x)=0$ , cu variabila  $x$  din  $[a,b]$ , iar funcția continuă și de două ori derivabilă pe intervalul dat. Dezvoltarea în serie Taylor în jurul unui punct  $x_n$ , în cazul în care se rețin doar primii doi termeni ai dezvoltării și restul, este:

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n) \cdot f'(x_n) + \frac{1}{2!} \cdot (x - x_n)^2 \cdot f''(\xi_n) \quad \text{cu } \xi_n \in [x; x_n]$$

Înlocuirea în expresia de mai sus, a unei aproximații  $x_{n+1}$  în locul lui  $x$ , și succesivă lui  $x_n$ , pentru care presupunem că se anulează  $f(x)$  conduce la relațiile:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2} \cdot (x - x_n)^2 \cdot \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \quad \begin{array}{l} x = x_{n+1} \\ \Rightarrow \\ \text{neglijarea restului} \end{array} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

S-a generat astfel o formulă de calcul a soluțiilor ecuațiilor, în care apare o eroare de metodă datorată neglijării restului seriei Taylor și care se bazează pe un calcul recursiv.



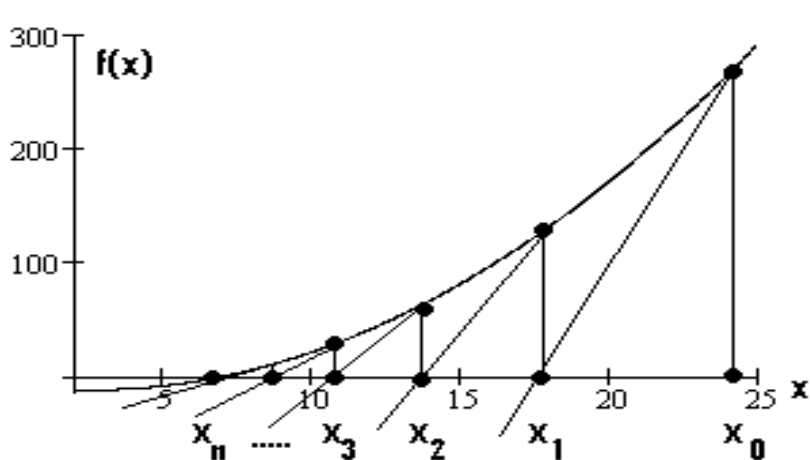


Fig. 9 Interpretare geometrică

Dacă se admite că reprezentarea grafică a funcției arată ca în figura 9, iar derivata lui  $f(x)$  se reprezintă ca o dreaptă care trece succesiv prin punctele

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$$

**ALGORITM:**

1. Se inițializează soluția cu  $x_0$  ( $b=x_0$ )
2. La un pas oarecare  $k$  al procesului iterativ se calculează  $f(x_k)$ ,  $f'(x_k)$  rezultând noua valoare a soluției aproximative  $x_{k+1}$
3. Calculul se consideră terminat dacă:

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$$

➤ Metoda lui Newton poate fi **interpretată geometric**: trasare repetată a tangențelor la funcție!

➤ Procesul continuă până când se ajunge, în limita unei precizii, la soluția considerată optimă.

➤ Formula de oprire a procesului iterativ, confirmată numeric și grafic de faptul că după un anumit număr de iterații, soluția calculată trebuie să se stabilizeze



# Evaluarea Erorii metodei lui Newton

Investigarea mărimii ponderii pe care o are eroarea, modul prin care se caracterizează convergența procesului iterativ și efortul computațional aferent acestui proces

Fie funcția  $f \in C^2(I)$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  și  $f(\alpha) = 0$ , pt  $\alpha \in I$  soluție.

Pentru un  $x_n$  dat se definește: 
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Atunci, conform teoremei valorii medii, există un punct  $\xi_n$  între  $\alpha$  și  $x$  astfel încât din seria Taylor

$$(\alpha - x_{n+1}) = -\frac{1}{2} \cdot (\alpha - x_n)^2 \cdot \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$$



## Demonstratie - Demonstrarea formulei erorii- pe tablă

➤ Interpretarea relatiei: eroarea la fiecare pas iterativ depinde de pătratul erorii la pasul anterior.

## Forme îmbunătățite ale metodei lui Newton

➤ Pentru a spori **convergența iterativă a soluției**, pentru a **crește precizia**, ori pentru a **reduce efortul de calcul** din metoda inițială a lui Newton au fost deduse alte forme îmbunătățite sau simplificate.

### Metoda Newton simplificată

În cazul în care evaluarea derivatei funcției, în fiecare nou punct de aproximare, este costisitoare, formula lui Newton poate fi adaptată, în sensul reținerii valorii calculate a derivatei în primul punct de aproximare pe parcursul unui număr de iterații, și, eventual, schimbarea acestei valori a derivatei prin recalcularea într-un nou punct de aproximare cu :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Se reduce simțitor efortul computațional, cu dezavantajul reducerii concomitente a convergenței; sunt necesare mai multe iterații până la obținerea unei soluții dorite.

## Metoda lui Halley

Din dezvoltarea în serie Taylor, dacă se reține și cel de-al doilea termen, se deduce o formulă de aproximare a soluției, care prezintă convergență ridicată, cu prețul unui efort de calcul de luat în seamă, datorită evaluării la fiecare iterație atât a primei derivate cât și a celei de-a doua:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2 \cdot f(x_n)}{f'(x_n) \pm \sqrt{[f'(x_n)]^2 - 2 \cdot f(x_n) \cdot f''(x_n)}}$$

## Metoda secantei

Dacă se urmărește eliminarea evaluării derivatei, aceasta se aproximează cu formula de mai jos, știut fiind că ecuația drepte care trece prin două puncte ale funcției, este o dreaptă care poate înlocui tangenta la funcție:

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

care se introduce în expresia inițială a lui Newton:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \left[ \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right]$$

Pentru aplicarea acestei metode trebuie cunoscute primele două aproximații inițiale  $x_0$  și  $x_1$ !!!

## Concluzii asupra metodei lui Newton

- Metoda lui Newton este o *metodă locală*, în sensul că procesul iterativ converge doar dacă aproximația inițială este aleasă suficient de aproape de valoarea adevărată;
- **Convergența metodei lui Newton** și a variantelor alternative este mai rapidă decât a metodei bisecției. S-a observat că soluția s-a identificat cu o precizie satisfăcătoare în primele trei iterații;
- Convergența metodei lui Newton este mai rapidă decât a metodei bisecției, mai ales în apropierea soluției;
- Convergența metodei este sigură dacă derivata funcției are semn constant în intervalul;
- Dezavantajul metodei constă în faptul că la fiecare iterație trebuie evaluată derivata în fiecare nod ceea ce poate necesita un efort mare de calcul;

➤ Semnul constant pe intervalul  $[a,b]$  a derivatei a doua a funcției asigură o viteză mai mare a convergenței metodei;

➤ Convergența depinde și de aproximația inițială aleasă a soluției  $x_0$ , pentru reducerea numărului de iterații recomandându-se satisfacerea condiției;

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) \geq 0$$

➤ Metoda are performanțe foarte bune din punct de vedere al numărului de iterații și al timpului de calcul

➤ În alegerea uneia sau alteia dintre metodele numerice de soluționare a ecuațiilor trebuie să se estimeze **efortul de calcul** implicat pentru atingerea unei precizii, **dificultatea de evaluare repetată** a funcției și a derivatelor ei.

