

Curs 3 – 5

Metode numerice de Soluționare a Sistemelor de Ecuații specifice Ingineriei Electrice

Ș.l. Dr. ing. Levente CZUMBIL

Laboratorul de Cercetare în Metode Numerice
Departamentul de Electrotehnică, Inginerie Electrică

E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro WebSite: <http://users.utcluj.ro/~czumbil>



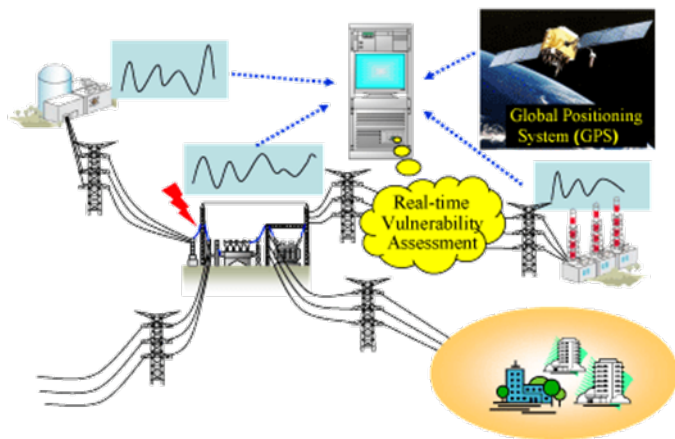
Exemple de aplicații din ingineria electrică

- Localizarea obiectelor inaccesibile din subteran, prin măsurători ale câmpului magnetic reflectat; model integral discretizat într-un sistem de ecuații și rezolvat numeric prin descompunere după valorile singulare;
- **Proiectarea dispozitivelor de stimulare magnetică a țesuturilor nervoase;**
- Minimizarea costurilor de producție prin CAM (computer aided manufacturing) în fabricația aparatelor de iluminat;
- **Optimizarea poziționării bobinelor de radiofrecvență din cadrul dispozitivelor de imagistică medicală;**
- Diagnosticarea non-distructivă a gradului de coroziune a structurilor metalice din construcțiile de beton armat – poduri;
- Identificarea spațială a curenților de întoarcere ai trăsnetelor din măsurători ale câmpului electric și magnetic în momentul impactului;

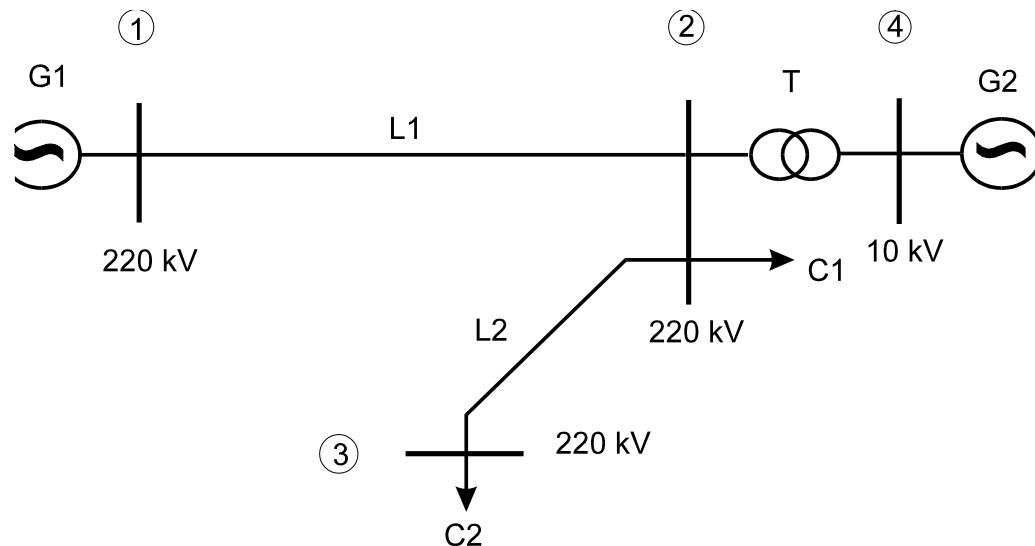
- Proiectarea optimală a unui motor electric de curent continuu fără perii colectoare (brushless DC drive);
- Diagnosticarea defectelor de izolație din mașinile electrice pe baza aproximării inducției câmpului magnetic din întrefier, prin măsurarea câmpului magnetic de suprafață;
- Proiectarea separatoarelor magnetice – determinarea configurației și numărului de spire ale bobinelor de separare magnetică;
- Identificarea depunerilor de distribuție de sarcină electrică în zona punctului triplu din întreruptoarele automate de medie tensiune;
- **Proiectarea bobinelor de tratament magnetic;**
- Circuitele electrice neliniare sau circuitele în regim tranzitoriu se reduc în final la rezolvarea unor circuite electrice liniare
- Proiectarea bobinelor shunt pentru compensarea energiei reactive capacitive a cablurilor;
- Proiectarea senzorilor inductivi de poziție de pe utilajele de prelucrare mecanică, CNC;



➤ Calculul circulațiilor de puteri într-un sistem electroenergetic



$S_b = 100 \text{ MVA}$, $U_{b1} = 220 \text{ kV}$, $U_{b2} = 10 \text{ kV}$
 $P_1 = 0,75$, $Q_1 = 0,20$, $P_2 = -0,50$, $Q_2 = -0,20$,
 $P_3 = -1,15$, $Q_3 = -0,45$, $U_4 = 1,0$, $\delta_4 = 0$



Modelul matematic corespunzător este constituit dintr-un sistem de n ecuații neliniare complexe ($n + \text{numărul nodurilor din SEN}$) de forma:

$$\underline{f}_i = \underline{U}_i^* \cdot \underline{Y}_{ii} \cdot \underline{U}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \underline{U}_i^* \cdot \underline{Y}_{ij} \cdot \underline{U}_j - \underline{S}_i^* = 0 + j0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

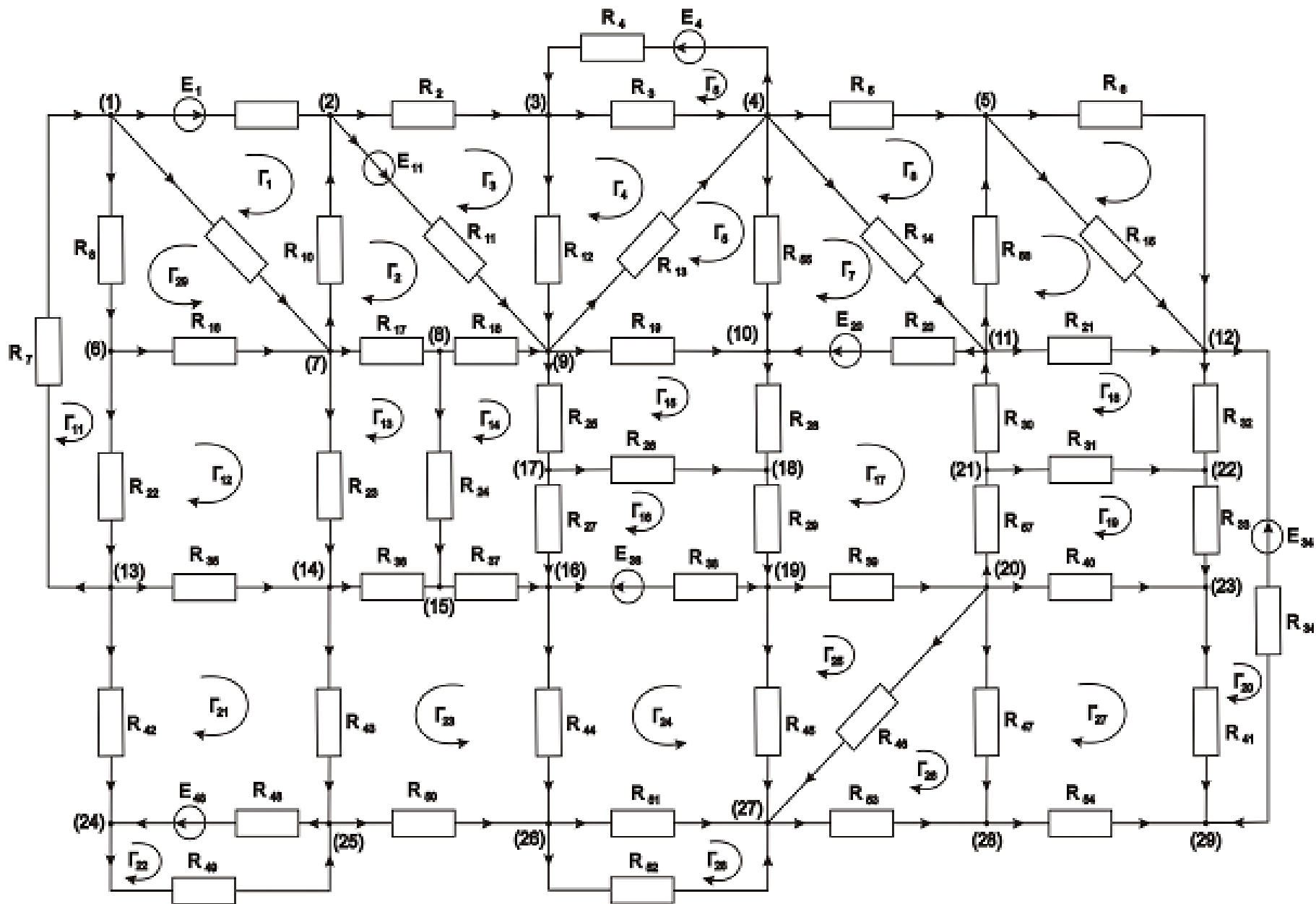
Ecuațiile de bilant energetic.



$$\left. \begin{aligned}
 f_{1p} &= U_1^2 \cdot G_{11} + U_1 \cdot U_2 \cdot [G_{12} \cdot \cos(\delta_1 - \delta_2) + B_{12} \cdot \sin(\delta_1 - \delta_2)] + \\
 &\quad + U_1 \cdot U_3 \cdot [G_{13} \cdot \cos(\delta_1 - \delta_3) + B_{13} \cdot \sin(\delta_1 - \delta_3)] + \\
 &\quad + U_1 \cdot U_4 \cdot [G_{14} \cdot \cos(\delta_1 - \delta_4) + B_{14} \cdot \sin(\delta_1 - \delta_4)] - P_1 = 0 \\
 f_{2p} &= U_2^2 \cdot G_{22} + U_2 \cdot U_1 \cdot [G_{21} \cdot \cos(\delta_2 - \delta_1) + B_{21} \cdot \sin(\delta_2 - \delta_1)] + \\
 &\quad + U_2 \cdot U_3 \cdot [G_{23} \cdot \cos(\delta_2 - \delta_3) + B_{23} \cdot \sin(\delta_2 - \delta_3)] + \\
 &\quad + U_2 \cdot U_4 \cdot [G_{24} \cdot \cos(\delta_2 - \delta_4) + B_{24} \cdot \sin(\delta_2 - \delta_4)] - P_2 = 0 \\
 f_{3p} &= U_3^2 \cdot G_{33} + U_3 \cdot U_1 \cdot [G_{31} \cdot \cos(\delta_3 - \delta_1) + B_{31} \cdot \sin(\delta_3 - \delta_1)] + \\
 &\quad + U_3 \cdot U_2 \cdot [G_{32} \cdot \cos(\delta_3 - \delta_2) + B_{32} \cdot \sin(\delta_3 - \delta_2)] + \\
 &\quad + U_3 \cdot U_4 \cdot [G_{34} \cdot \cos(\delta_3 - \delta_4) + B_{34} \cdot \sin(\delta_3 - \delta_4)] - P_3 = 0 \\
 f_{4p} &= U_4^2 \cdot G_{44} + U_4 \cdot U_1 \cdot [G_{41} \cdot \cos(\delta_4 - \delta_1) + B_{41} \cdot \sin(\delta_4 - \delta_1)] + \\
 &\quad + U_4 \cdot U_2 \cdot [G_{42} \cdot \cos(\delta_4 - \delta_2) + B_{42} \cdot \sin(\delta_4 - \delta_2)] + \\
 &\quad + U_4 \cdot U_3 \cdot [G_{43} \cdot \cos(\delta_4 - \delta_3) + B_{43} \cdot \sin(\delta_4 - \delta_3)] - P_4 = 0 \\
 f_{1q} &= -U_1^2 \cdot B_{11} + U_1 \cdot U_2 \cdot [G_{12} \cdot \sin(\delta_1 - \delta_2) - B_{12} \cdot \cos(\delta_1 - \delta_2)] + \\
 &\quad + U_1 \cdot U_3 \cdot [G_{13} \cdot \sin(\delta_1 - \delta_3) - B_{13} \cdot \cos(\delta_1 - \delta_3)] + \\
 &\quad + U_1 \cdot U_4 \cdot [G_{14} \cdot \sin(\delta_1 - \delta_4) - B_{14} \cdot \cos(\delta_1 - \delta_4)] - Q_1 = 0 \\
 f_{2q} &= -U_2^2 \cdot B_{22} + U_2 \cdot U_1 \cdot [G_{21} \cdot \sin(\delta_2 - \delta_1) - B_{21} \cdot \cos(\delta_2 - \delta_1)] + \\
 &\quad + U_2 \cdot U_3 \cdot [G_{23} \cdot \sin(\delta_2 - \delta_3) - B_{23} \cdot \cos(\delta_2 - \delta_3)] + \\
 &\quad + U_2 \cdot U_4 \cdot [G_{24} \cdot \sin(\delta_2 - \delta_4) - B_{24} \cdot \cos(\delta_2 - \delta_4)] - Q_2 = 0 \\
 f_{3q} &= -U_3^2 \cdot B_{33} + U_3 \cdot U_1 \cdot [G_{31} \cdot \sin(\delta_3 - \delta_1) - B_{31} \cdot \cos(\delta_3 - \delta_1)] + \\
 &\quad + U_3 \cdot U_2 \cdot [G_{32} \cdot \sin(\delta_3 - \delta_2) - B_{32} \cdot \cos(\delta_3 - \delta_2)] + \\
 &\quad + U_3 \cdot U_4 \cdot [G_{34} \cdot \sin(\delta_3 - \delta_4) - B_{34} \cdot \cos(\delta_3 - \delta_4)] - Q_3 = 0 \\
 f_{4q} &= -U_4^2 \cdot B_{44} + U_4 \cdot U_1 \cdot [G_{41} \cdot \sin(\delta_4 - \delta_1) - B_{41} \cdot \cos(\delta_4 - \delta_1)] + \\
 &\quad + U_4 \cdot U_2 \cdot [G_{42} \cdot \sin(\delta_4 - \delta_2) - B_{42} \cdot \cos(\delta_4 - \delta_2)] + \\
 &\quad + U_4 \cdot U_3 \cdot [G_{43} \cdot \sin(\delta_4 - \delta_3) - B_{43} \cdot \cos(\delta_4 - \delta_3)] - Q_4 = 0
 \end{aligned} \right\}$$

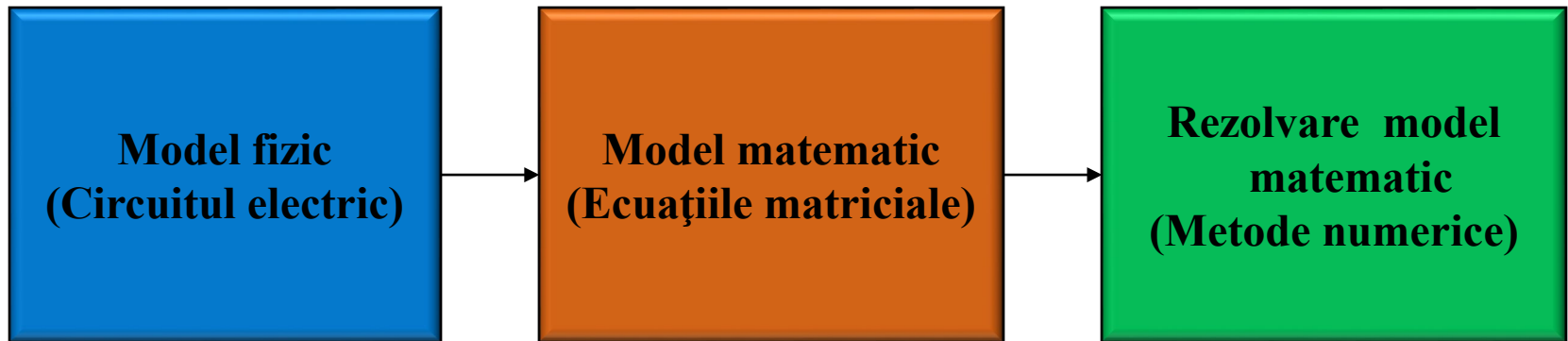


➤ Rezolvarea unui circuit complex de mari dimensiuni



- Există 2 mari tipuri de probleme în IE care se reduc la un model matematic de forma unui sistem de ecuații compatibil determinat (soluție unică):

Analiza circuitelor electrice și Analiza câmpului electromagnetic



Etapile modelării în studiul circuitelor electrice

Curs 3

Chestiuni speciale de Electrotehnică care conduc la Sisteme de Ecuații compatibile determinate

*Metode de rezolvare matricială a circuitelor
electrice de mari dimensiuni*

Ș.l. Dr. ing. Levente CZUMBIL

Laboratorul de Cercetare în Metode Numerice
Departamentul de Electrotehnică, Inginerie Electrică

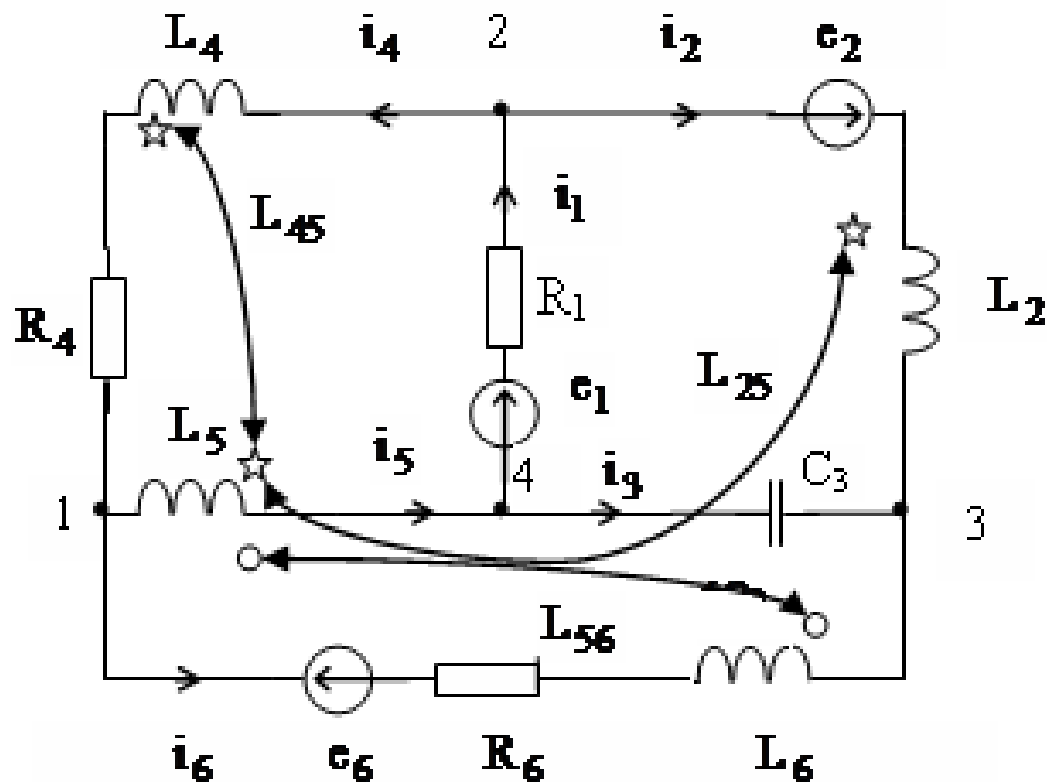
E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro WebSite: <http://users.utcluj.ro/~czumbil>



Rezolvarea Matricială a Circuitelor Electrice prin Grafuri de Circuit

- **Graful** reprezintă un **desen simplificat al unui circuit electric** care conține toate laturile și toate nodurile fără a se preciza conținutul lor;
- **Graful orientat** se obține făcând abstracție de natura elementelor și înlocuindu-le prin segmente orientate în sensul de referință al curentului.
- Liniile care se obțin se numesc **laturile grafului**, iar extremitățile lor, **nodurile grafului**.
- Sensurile laturilor din graful orientat corespund cu sensurile de referință ale curenților din laturile rețelei
- **Bucila sau ochiul** este format din una sau mai multe linii închise
- **Subgraful** este o porțiune dintr-un graf care conține o parte din nodurile și laturile grafului, iar un subgraf care conține toate nodurile circuitului și nu formează nici o buclă închisă se numește **arbore**.
- Subgraful complementar arborelui se numește **coarbore**, iar laturile coarborelui se numesc **corzi**, se reprezintă cu linie punctată și sunt în număr de (o-numărul de ochiuri independente). Laturile arborelui se numesc **ramuri** și se reprezintă cu linie continuă, iar numărul lor este ($n - \text{numărul de noduri}$).

Aplicatie 1. Rezolvarea circuitelor - Kirchhoff



Parametrii topologici primari ai rețelei sunt cele $n=4$ noduri (puncte de conexiune a bornelor elementelor) și laturile $l=6$ (elementele conectate între două noduri)



Descrierea Matriceală a Schemelor Electrice

Proprietățile topologice ale schemelor electrice, respectiv ale grafurilor corespunzătoare, sunt descrise de **matricile de circuit**:

➤ **[A]** – **matricea de incidență a laturilor la suprafețele Σ** care sunt suprafețe închise care intersectează o singură ramură, iar sensul pozitiv al normalei la Σ este dat de sensul ramurii; numărul de suprafețe Σ este (numărul de ramuri); Numărul de linii al lui [A] este numărul suprafețelor Σ și numărul de coloane este numărul de laturi din graf.

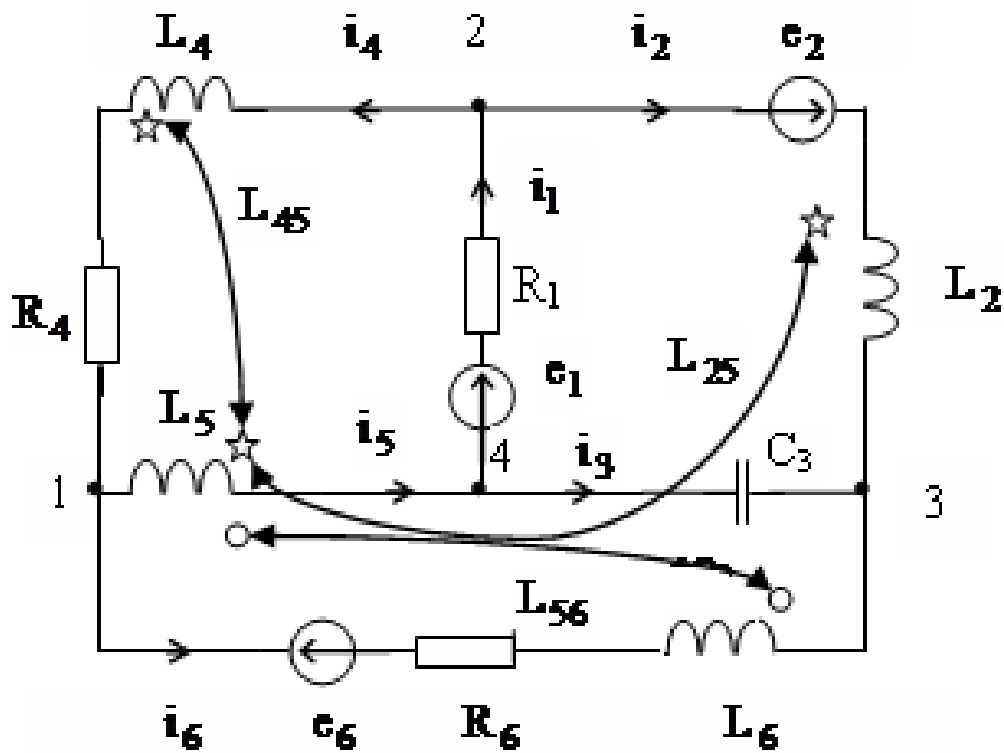
➤ **[B]** – **matricea de apartenență a laturilor la contururile Γ** care trec printr-o buclă și au sensul corzii din bucla respectiva. Numărul de contururi este dat de numărul de corzi. Numărul de linii ale lui [B] este numărul de contururi Γ , iar numărul de coloane este numărul de laturi ale grafului.



- **[U]** – **matricea coloană a tensiunilor laturilor** (vector) - elementele de pe linii sunt tensiunile laturilor, în ordinea din graf, cu semnul (+) dacă coincid cu sensul laturii;
- **[E]** – **matricea coloană a tensiunilor electromotoare** de pe laturi - cu semnul (+) dacă sensul sursei este în sensul laturii;
- **[I]** – **matricea coloană a curenților**, având pe linii curenții de pe laturi - toți curenții au sensul laturilor din graf (prin convenție).
- **[Z]** – **matricea impedanță** - matrice pătratică cu numărul de linii egal cu numărul de coloane și egal cu numărul laturilor din circuit. Pe diagonala principală-impedanțele proprii ale laturilor, iar dacă între două laturi există cuplaj mutual apar și aceste elemente la intersecția liniei cu coloana și se iau cu semnul (+) dacă sensurile laturilor sunt orientate la fel față de bornele marcate ale bobinelor cuplate mutual.

Demonstrație 1 – Forma matricială a teoremelor lui Kirchhoff - pe tablă

$$\begin{matrix}
 n-1 \\
 \alpha
 \end{matrix}
 \left\{
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cc}
 & [A] \\
 \hline
 [B] & [Z]
 \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{cc}
 & 0 \\
 \hline
 [B] & [E]
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \right\}
 \begin{matrix}
 n-1 \\
 0
 \end{matrix}
 =
 \begin{matrix}
 n-1 \\
 0
 \end{matrix}
 \left\{
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cc}
 & 0 \\
 \hline
 [B] & [E]
 \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{cc}
 & 0 \\
 \hline
 [B] & [E]
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \right\}
 \begin{matrix}
 n-1 \\
 0
 \end{matrix}$$

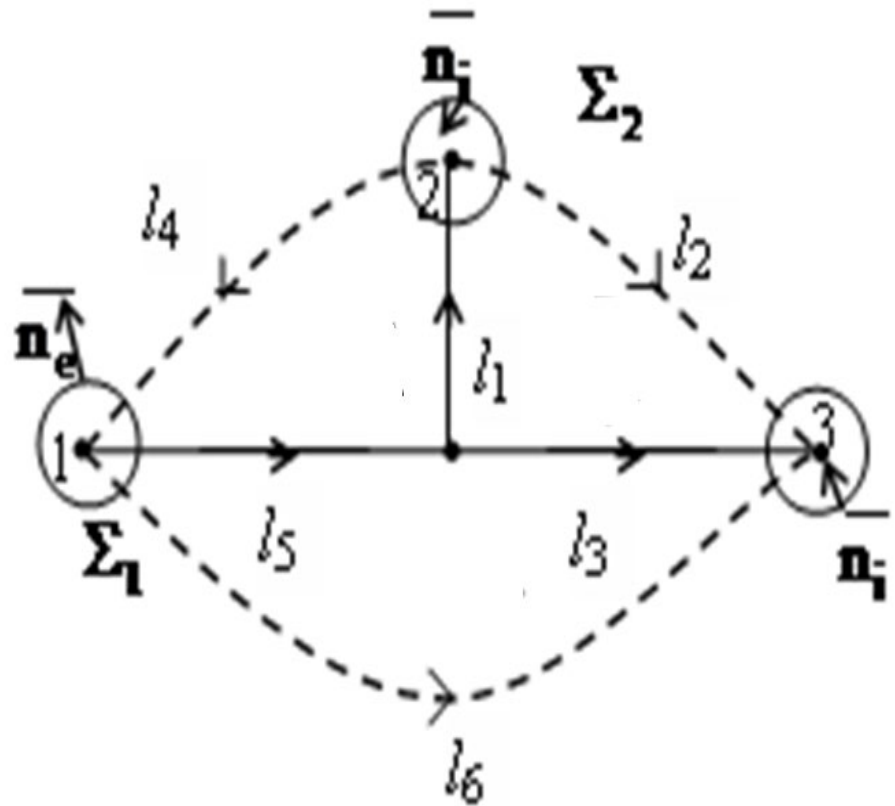
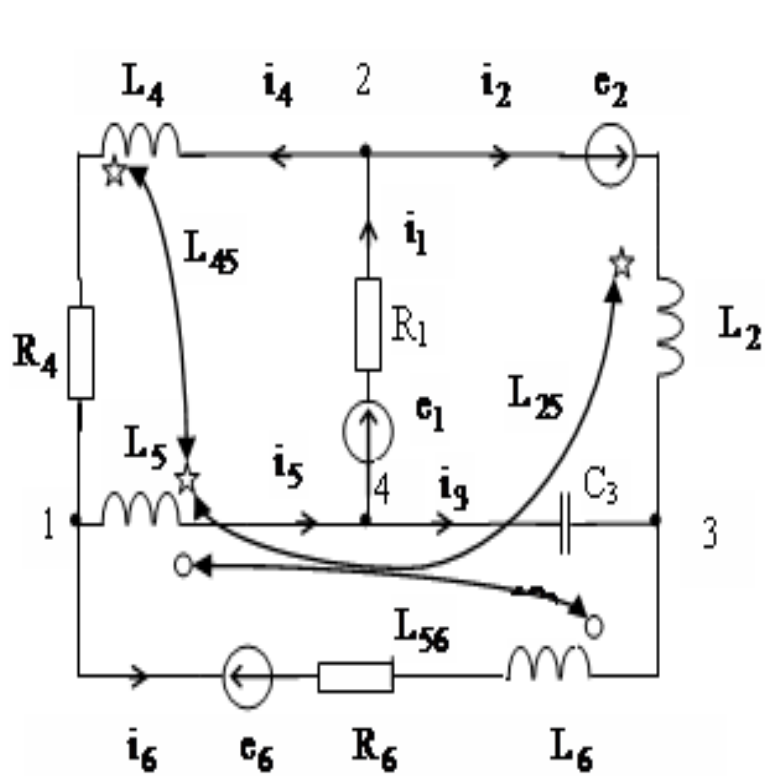


$$[\underline{E}] = \begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\underline{E}_6 \end{bmatrix}$$

$$[\underline{I}] = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \\ \underline{I}_6 \end{bmatrix}$$

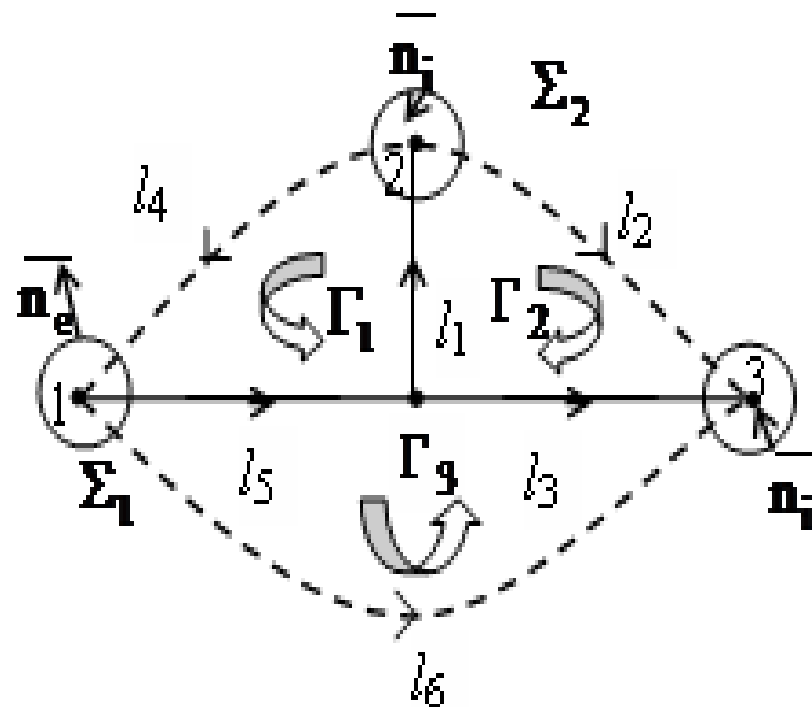
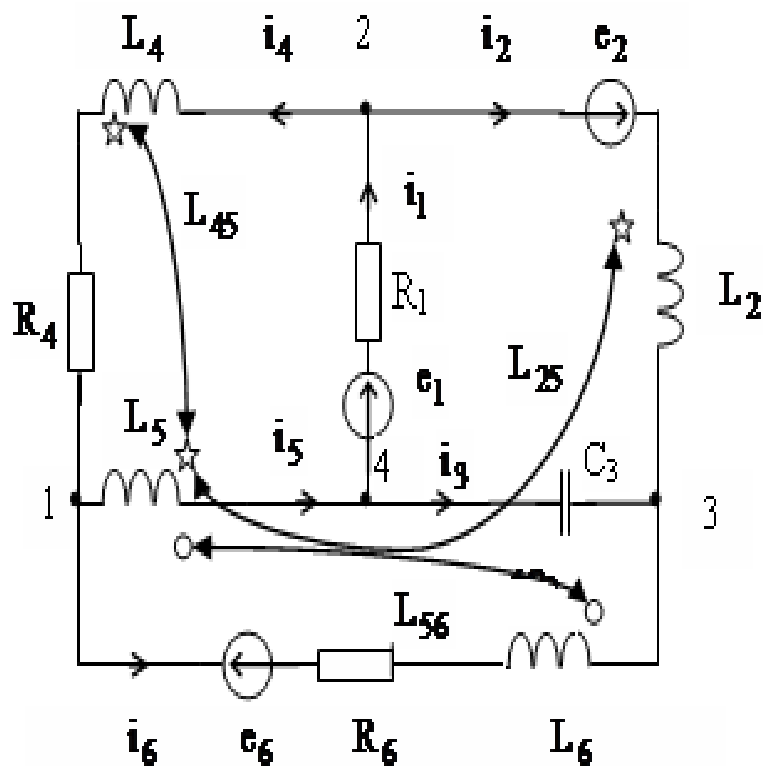
$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 \\ l_1 & R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & 0 & j\omega L_2 & 0 & 0 & -j\omega L_{25} \\ l_3 & 0 & 0 & 1/j\omega C_3 & 0 & 0 \\ l_4 & 0 & 0 & 0 & R_4 + j\omega L_4 & j\omega L_{45} \\ l_5 & 0 & -j\omega L_{25} & 0 & j\omega L_{45} & j\omega L_5 \\ l_6 & 0 & 0 & 0 & -j\omega L_{56} & R_6 + j\omega L_6 \end{bmatrix}$$





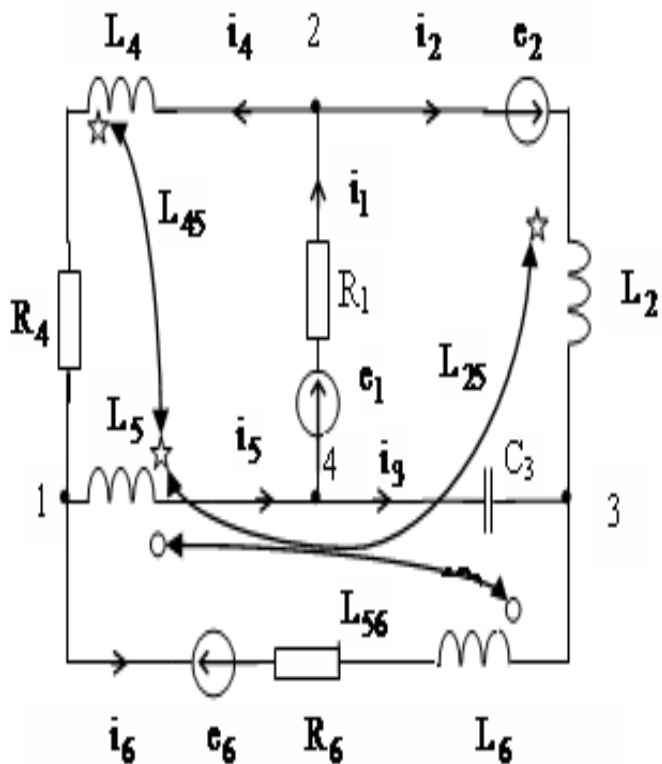
$$[A] = \begin{matrix} & l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 \\ \Sigma_1 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \Sigma_2 & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Sigma_3 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$





$$[B] = \begin{matrix} & l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 \\ \Gamma_1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \Gamma_2 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Gamma_3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$





$$[Z] = \begin{matrix} & l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 \\ \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega L_2 & 0 & 0 & -j\omega L_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 1/j\omega C_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 + j\omega L_4 & j\omega L_{45} & 0 \\ 0 & -j\omega L_{25} & 0 & j\omega L_{45} & j\omega L_5 & -j\omega L_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -j\omega L_{56} & R_6 + j\omega L_6 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[A] = \begin{matrix} & l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 \\ \begin{matrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

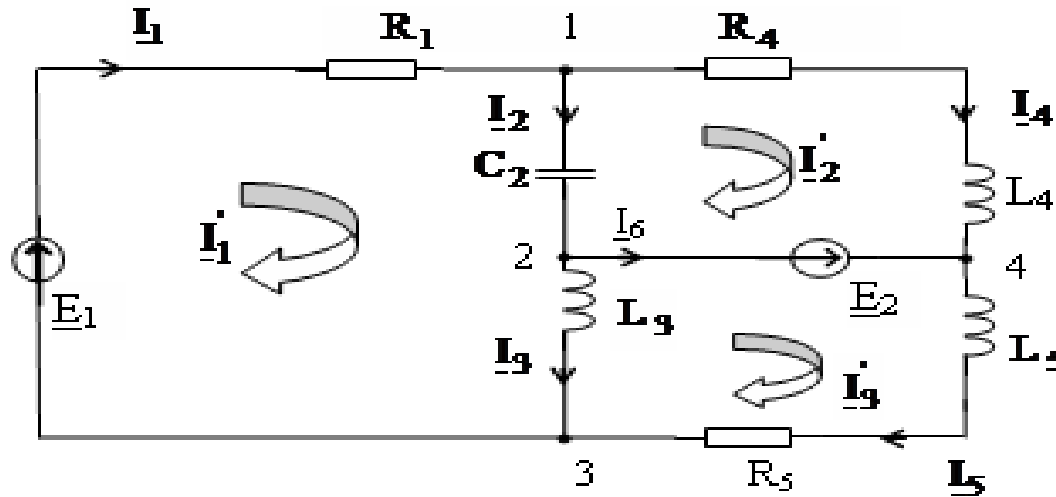
$$[B] = \begin{matrix} & l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 \\ \begin{matrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$n-1 \left\{ \begin{matrix} [A] \\ \hline [B] \quad [Z] \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} 0 \\ \hline [B] \quad [E] \end{matrix} \right\} n-1$$

Aplicatie 2. Rezolvarea circuitelor – Curenți Ciclici

Să se calculeze curenții din laturi prin metoda curenților ciclici sub formă matricială. Date numerice: $e_1(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t)$, $e_2(t) = 20\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$,

$$R_1 = 2[\Omega], R_4 = R_5 = 1[\Omega], X_{C_2} = \frac{1}{\omega C_2} = 1[\Omega], X_{L_3} = \omega L_3 = 1[\Omega], X_{L_4} = X_{L_5} = 2[\Omega].$$

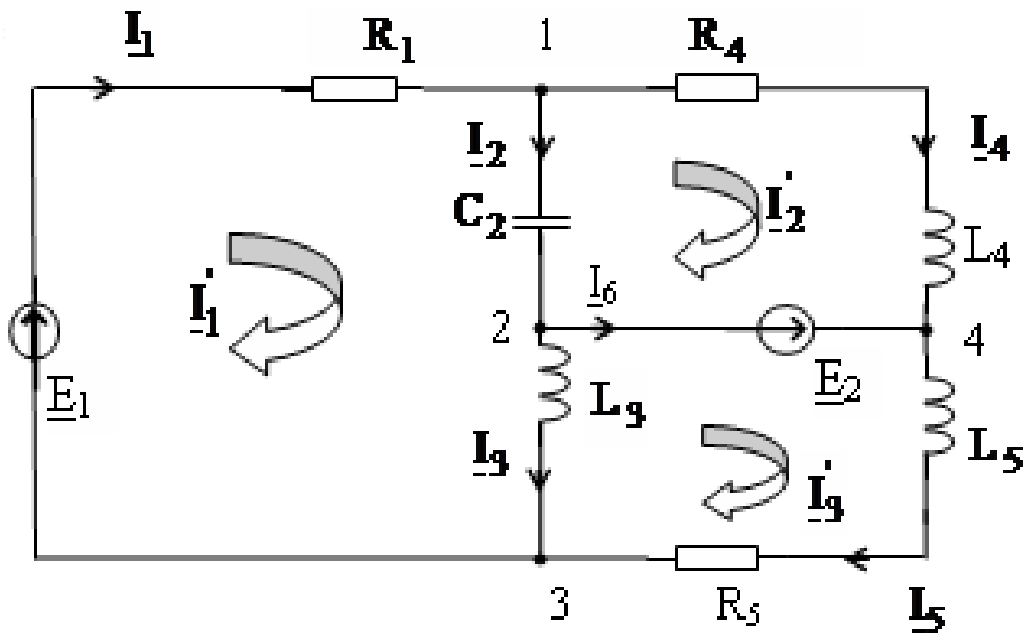


$$e_1(t) = 10\sqrt{2} \sin \omega t \rightarrow \underline{E}_1 = E_1 \cdot e^{j\gamma_1} = 10 \cdot e^{j0} = 10(\cos 0 + j \sin 0) = 10[\text{V}];$$

$$e_2(t) = 20\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \underline{E}_2 = E_2 \cdot e^{j\gamma_2} = 20 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = 20\left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2}\right) = 20j[\text{V}].$$

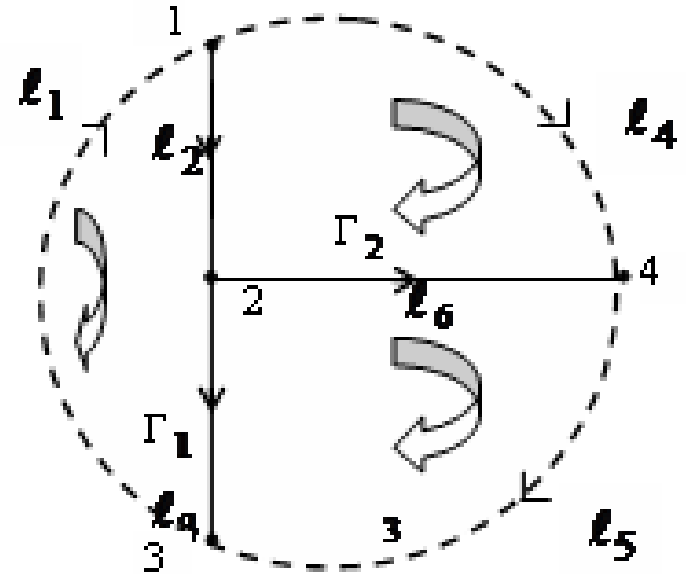
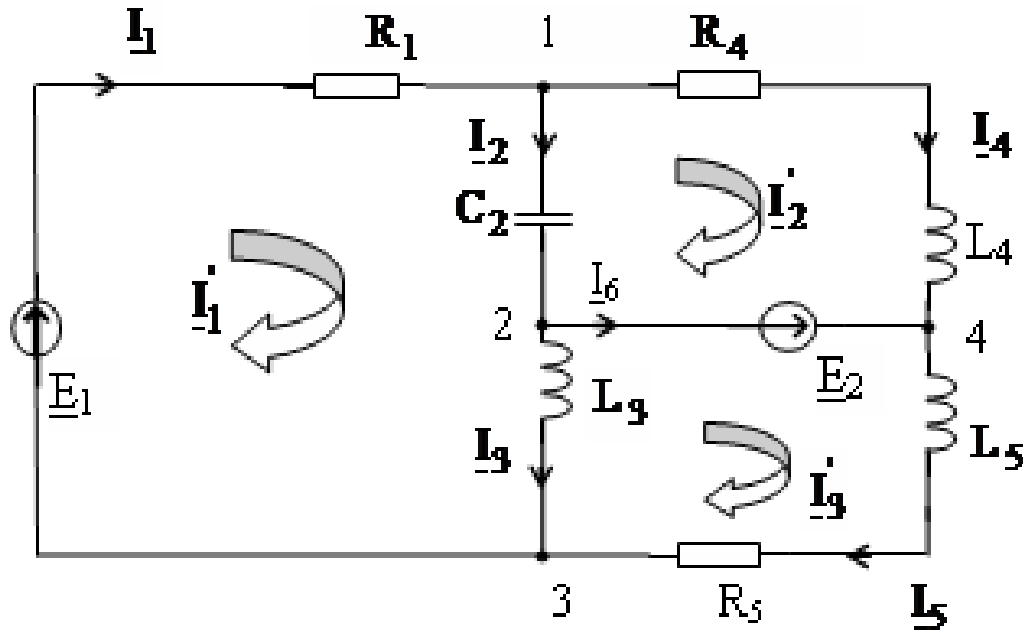
Demonstratie 2 - Metoda curenților ciclici sub formă matricială (metoda curenților de coardă) – pe tablă





$$[E] = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j20 \end{bmatrix}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/j\omega C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j\omega L_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 + j\omega L_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 + j\omega L_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+j2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+j2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$[B] = \begin{matrix} & l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 \\ \Gamma_1 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Gamma_2 & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \Gamma_3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$



Matricea impedanțelor specifică metodei curenților ciclici:

$$[\underline{Z}'] = [\underline{B}] \cdot [\underline{Z}] \cdot [\underline{B}]^T = \begin{bmatrix} 2 & j & -j \\ j & 1+j & -j \\ -j & 0 & 1+j3 \end{bmatrix}.$$

Vectorul curenților ciclici este:

$$[\underline{I}_C] = [\underline{Z}']^{-1} \cdot [\underline{B}] \cdot [\underline{E}] = \frac{10}{74} \begin{bmatrix} -18 + j40 \\ -45 - j85 \\ 35 + j25 \end{bmatrix}$$

Vectorul curenților reali din circuit este:

$$[\underline{I}] = [\underline{B}]^T \cdot [\underline{Z}']^{-1} \cdot [\underline{B}] \cdot [\underline{E}] = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \\ \underline{I}_6 \end{bmatrix} = \frac{10}{74} \begin{bmatrix} -18 + j40 \\ 27 + j125 \\ -53 + j15 \\ -45 - j85 \\ 35 + j25 \\ 80 + j110 \end{bmatrix}$$



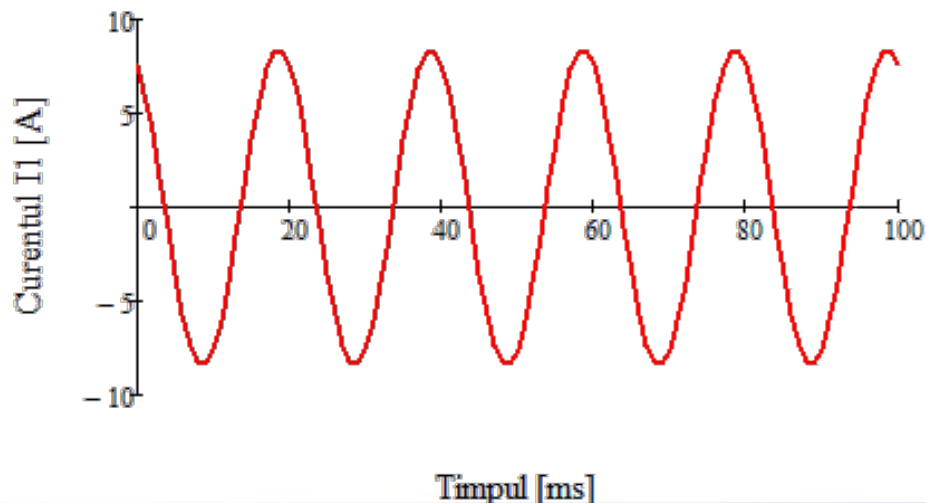
Dacă dorim să transformăm în instantaneu, de exemplu:

$$\underline{I}_1 = \frac{10}{74}(-18 + j40) \rightarrow i_1(t) = I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_1);$$

$$I_1 = \sqrt{\left(\frac{10}{74} \cdot (-18)\right)^2 + \left(\frac{10}{74} \cdot 40\right)^2} = 5,92[\text{A}];$$

$$\text{tg}\gamma_1 = \frac{40}{-18} \Rightarrow \text{lucrăm în cadranul II}; \quad \gamma_1 = \pi + \arctg\left(-\frac{40}{18}\right) \cong 115^\circ$$

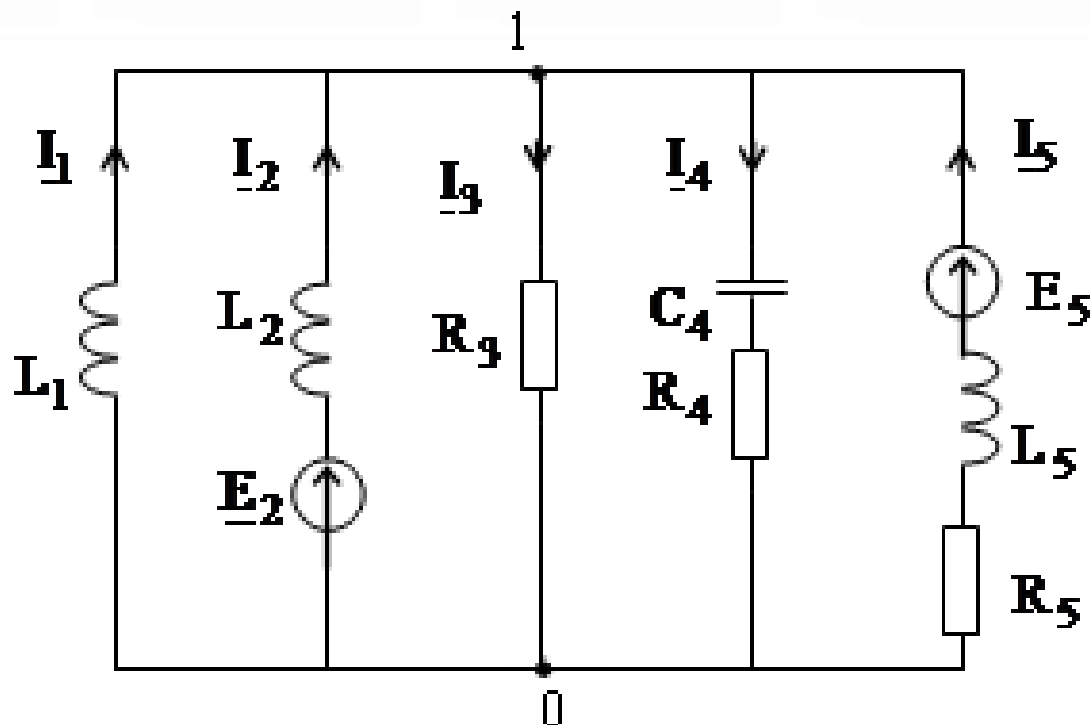
$$i_1(t) = 5,92\sqrt{2} \sin(\omega t + 115^\circ)$$



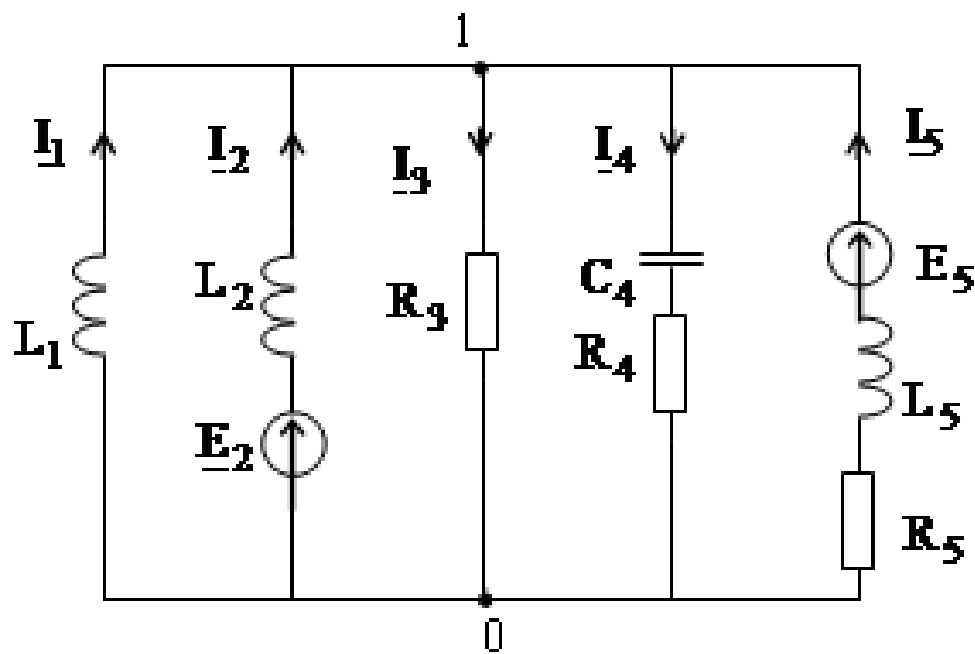
Aplicatie 3. Rezolvarea circuitelor – Potențiale la Noduri

Să se rezolve circuitul cu metoda tensiunilor ramurilor (metoda potențialelor nodurilor matricial). Date numerice: $\omega L_1 = 2[\Omega]$; $\omega L_2 = 1[\Omega]$; $R_3 = 3[\Omega]$;

$R_4 = 1[\Omega]$; $\frac{1}{\omega C_4} = 2[\Omega]$; $\omega L_5 = 3[\Omega]$; $R_5 = 4[\Omega]$; $\underline{E}_2 = 10j[V]$; $\underline{E}_5 = 20j[V]$.



Demonstrație 3 - Metoda potențialelor de noduri matricial (metoda tensiunilor ramurilor) – pe tablă



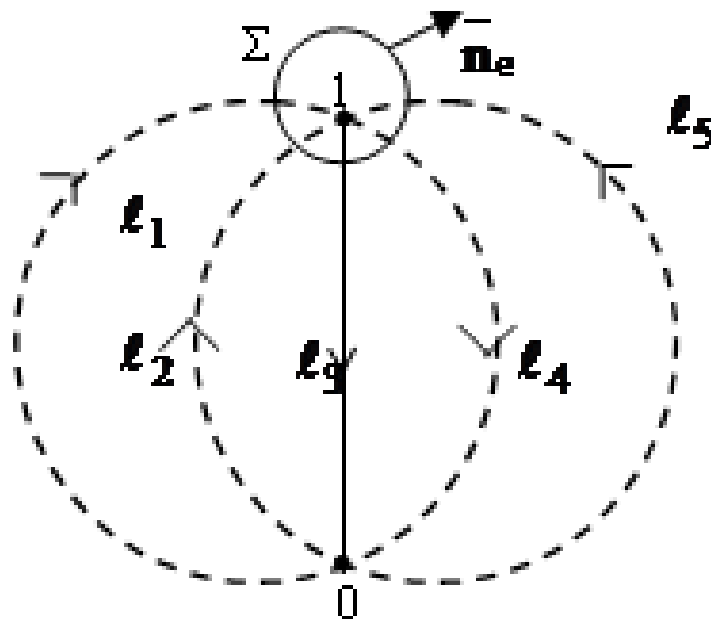
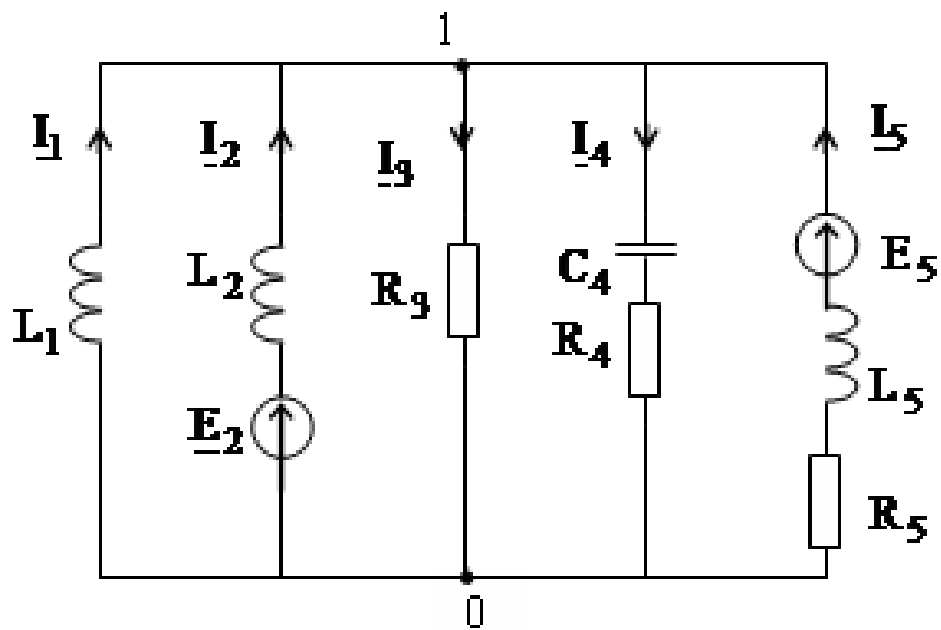
$$[Z] = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega L_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 + \frac{1}{j\omega C_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 + j\omega L_5 \end{bmatrix}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} 2j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4+j3 \end{bmatrix};$$

$$[E] = \begin{bmatrix} 0 \\ 10j \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

$$[Z]^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2+0,4j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,16-0,12j \end{bmatrix}$$





$$[A]: \sum \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 \end{matrix}$$

$$[\underline{U}_r] = [\underline{U}_3]$$

Deci: $[A] \cdot [Z]^{-1} \cdot [A]^T = 0,69 - j \cdot 1,22$ $-[A] \cdot [Z]^{-1} \cdot [E] = 13,2 - j \cdot 2,4$

înlocuind în relația:

$$[A] \cdot [Z]^{-1} \cdot [A]^T \cdot [\underline{U}_r] = -[A] \cdot [Z]^{-1} \cdot [E]$$

$$(0,69 - j \cdot 1,22) \cdot \underline{U}_3 = 13,2 - j \cdot 2,4 \quad \underline{U}_3 = 6,13 + j \cdot 7,33 [\text{V}]$$

Deci matricea tensiunilor este

$$[\underline{U}] = [A]^T \cdot [\underline{U}_3] = \begin{bmatrix} -6,13 - 7,33j \\ -6,13 - 7,33j \\ 6,13 + 7,33j \\ 6,13 + 7,33j \\ -6,13 - 7,33j \end{bmatrix}$$

Din legea lui Ohm rezultă curenții din circuit

$$[\underline{I}] = [Z]^{-1} \cdot [\underline{U}] + [Z]^{-1} \cdot [E] = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,66 + 3,06j \\ 2,66 + 6,13j \\ 2,04 + 2,44j \\ -1,70 + 3,92j \\ 1,33 - 2,83j \end{bmatrix}$$

