

Curs 4 - 5

Metode Numerice de Rezolvare a Sistemelor de Ecuații Liniare

As. Dr. ing. Levente CZUMBIL

Laboratorul de Cercetare în Metode Numerice
Departamentul de Electrotehnică, Inginerie Electrică

E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro



În aplicațiile din ingineria electrică valorile coeficienților și termenilor liberi pot fi afectate de erori (determinări experimentale, calcule "aproximative", ipoteze simplificatoare, etc.). Măsura în care ele influențează soluțiile sistemelor de ecuații liniare determină:

- Sisteme omogene
- Sisteme neomogene
- Sisteme bine condiționate - **Master**
- Sisteme rău condiționate - **Master**

Se poate spune că rezolvarea sistemelor de ecuații liniare joacă un rol central în cadrul metodelor numerice.

Există 2 categorii de metode de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare de forma $A \cdot x = b$:

- metode directe sau "exacte";
- metode indirecte sau "iterative".

Metode Directe

❖ **soluția** sistemului rezultă printr-o serie de operații care se execută o singură dată, numărul total de **operații aritmetice elementare fiind finit**, depinzând în mod direct de dimensiunea sistemului, fiind cunoscut de la început.

❖ **rezultatul** furnizat de metodele directe este afectat doar de *erorile de rotunjire* și acest avantaj face ca ele să fie preferate ori de câte ori dimensiunea și particularitățile sistemului păstrează numărul de operații în limite acceptabile.

Exemple de metode directe se pot aminti:

- metoda **inversării matriciale**;
- **metoda lui Cramer** bazată pe calculul determinanților;
- metoda de eliminare a lui **Gauss**;
- metoda **factorizării directe** LU (Lower-Upper). - **Master**

Metoda lui Cramer deși în esență foarte simplă, nu corespunde cerințelor practice când numărul de ecuații este mai mare ca 3 și când determinantul corespunzător matricii sistemului este zero ea fiind în general neimplementabilă.

Metode Indirecte

❖ **soluția** se obține printr-o **serie (proces) de aproximații succesive**, fiecare secvență de operații aritmetice elementare (mai mic decât la metodele directe) este parcursă de mai multe ori, obținându-se aproximații din ce în ce mai bune ale soluției până la atingerea unei **precizii fixate dinainte** (precizie dorită). Aceste metode permit obținerea soluției numerice a unui sistem de ecuații prin **generarea unui șir** care tinde la soluția exactă.

❖ practic se poate efectua numai un **număr finit de iterații**, *erorile de rotunjire* sunt însoțite în cazul metodelor iterative și de *erori de trunchiere*.

Avantaj al metodelor iterative: **simplitatea și eficiența implementării** lor în programe, în cazurile în care nu sunt rezolvabile prin metode directe.

Exemple de metode iterative:

- metoda lui **Jacobi**;
- metoda **Gauss-Seidel - Master**
- metoda **relaxării - Master**

Metoda Inversării Matriceale

Se consideră sistemul liniar de n ecuații cu n necunoscute definit de relația matricială $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Dacă matricea \mathbf{A} este nesingulară, atunci această relație se poate înmulți la stânga cu matricea inversă \mathbf{A}^{-1} rezultând:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

relație care evidențiază clar cele două faze ale acestei metode: **inversare** a matricei \mathbf{A} și **efectuarea produsului** matriceal $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$.

Metoda inversării matriceale necesită un **timp de calcul relativ ridicat** datorită numărului mare de operații elementare, aplicarea ei fiind justificată numai în situațiile în care este necesară soluționarea repetată a sistemului de forma $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, pentru diferite valori ale termenilor liberi pentru că inversarea matricii \mathbf{A} se face o singură dată, la prima rezolvare, la soluționările următoare fiind necesară numai efectuarea înmulțirii matriceale $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$.

Metoda lui Gauss (eliminarea Gauss - triangularizare)

Într-un caz practic se poate ajunge la sisteme de forma: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ după aplicarea unor metode specifice de rezolvare asupra unor circuite electrice de curent continuu, ajungându-se la sistemul scris matricial:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{E}$$

- \mathbf{R} - matricea pătratică a rezistențelor din circuit
- \mathbf{E} - vectorul coloană a tensiunilor electromotoare ale surselor din circuit
- \mathbf{I} - vectorul coloană a curenților necunoscuți

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ideea de bază a metodei constă în aducerea sistemului de ecuații prin transformări elementare la o formă echivalentă, având matrice *superior* sau *inferior* triunghiulară, urmată de rezolvarea sistemului rezultat prin procedee recurente specifice, **foarte eficiente**.

Transformarea sistemului inițial într-un sistem de formă triunghiulară se realizează cu ajutorul a trei operații elementare sau de bază:

1. Interschimbarea a două ecuații între ele;
2. Înmulțirea unei ecuații cu o constantă nenulă;
3. Scăderea unei ecuații din alta și înlocuirea celei de-a doua ecuație cu rezultatul scăderii.

Transformarea sistemului este echivalentă cu **eliminarea succesivă** a necunoscutelor din ecuații și se numește *faza eliminării*.

Rezolvarea sistemului cu matrice triunghiulară constă în determinarea necunoscutelor și substituția lor în ecuațiile sistemului în ordine inversă, fiind denumită din acest motiv *faza substituției inverse*.

Etapa eliminării

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Se elimină x_1 din toate ecuațiile cu excepția primeia adică de exemplu la ecuația i :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

⇓

$$(a_{i2} - a_{i1}a_{12}/a_{11})x_2 + (a_{i3} - a_{i1}a_{13}/a_{11})x_3 + \dots + (a_{in} - a_{i1}a_{1n}/a_{11})x_n = b_i - a_{i1}b_1/a_{11}$$

Obținem astfel sistemul:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, j = 1, 2, \dots, n \\ b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}} \\ a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}^{(1)}, j = 1, 2, \dots, n; i = 2, 3, \dots, n \\ b_i^{(1)} = b_i - a_{i1}b_1^{(1)} \end{array} \right.$$

Matriceal, primul pas al metodei eliminării lui Gauss conduce la

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \dots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

Matriceal, la un pas oarecare k se obține sistemul:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1k}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2k}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{nk+1}^{(k)} & a_{nn}^{(k)} & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_k \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \dots \\ b_k^{(k)} \\ \dots \\ b_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot a_{kj}^{(k)}$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot b_k^{(k)}$$

$$i = k + 1, k + 2, \dots, n;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}^{(1)} \cdot x_2 + a_{13}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{1k}^{(1)} \cdot x_k + a_{1,k+1}^{(1)} \cdot x_{k+1} + \dots + a_{1n}^{(1)} \cdot x_n = b_1^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)} \cdot x_3 + \dots + a_{2k}^{(2)} \cdot x_k + a_{2,k+1}^{(2)} \cdot x_{k+1} + \dots + a_{2n}^{(2)} \cdot x_n = b_2^{(2)} \\ \dots \\ x_k + a_{k,k+1}^{(k)} \cdot x_{k+1} + \dots + a_{kn}^{(k)} \cdot x_n = b_k^{(k)} \\ \dots \\ a_{n,k+1}^{(k)} \cdot x_{k+1} + \dots + a_{nn}^{(k)} \cdot x_n = b_n^{(k)} \end{array} \right.$$

Faza eliminării se încheie, împărțind cea de a n -a ecuație la elementul pivot $a_{nn}^{(n-1)}$ care, pentru un sistem cu matrice **nesingulară**, trebuie să fie diferit de zero. Rezultă după acest pas sistemul:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1k}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2k}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_k \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \dots \\ b_k^{(k)} \\ \dots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}^{(1)} \cdot x_2 + a_{13}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{1k}^{(1)} \cdot x_k + a_{1,k+1}^{(1)} \cdot x_{k+1} + \dots + a_{1n}^{(1)} \cdot x_n = b_1^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)} \cdot x_3 + \dots + a_{2k}^{(2)} \cdot x_k + a_{2,k+1}^{(2)} \cdot x_{k+1} + \dots + a_{2n}^{(2)} \cdot x_n = b_2^{(2)} \\ \dots \\ x_n = b_n^{(n)} \end{array} \right.$$

sau matriceal, $A^{(n)} \cdot x = b^{(n)}$.

Din cele obținute, observăm matricea $A^{(n)}$ este superior triunghiulară, iar sistemul este echivalent cu cel inițial $A \cdot x = b$, adică are soluția $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Faza substituției inverse (mersul înapoi) presupune parcurgerea în sens invers a ecuațiilor sistemului cu matrice triunghiulară, rezultat în faza eliminării, și stabilirea soluției sistemului potrivit unui calcul recursiv prin substituție regresivă începând cu x_n din ultima ecuație continuând cu x_{n-1} și terminând cu x_1 din prima ecuație:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = b_n^{(n)} \\ \dots \\ x_k = b_k^{(k)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k)} \cdot x_j \\ \dots \\ x_2 = b_2^{(2)} - a_{23}^{(2)} x_3 \\ x_1 = b_1^{(1)} - (a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3) \end{array} \right.$$



După cum se observă, determinarea componentelor soluției are loc de la indici mari spre indici mici, fiecare nouă componentă depinzând în mod explicit numai de componentele determinate la pasul anterior.

Observație. Metoda de eliminare Gauss permite și calcularea *determinantului* matricii sistemului. Se observă că, matricea $A^{(n)}$ a sistemului final fiind *triunghiulară*, are determinantul egal cu produsul elementelor diagonale, adică: $\det(A^{(n)}) = 1$

$$\det(A^{(n)}) = \frac{\det(A)}{a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)}} = 1 \quad \det A = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)}$$



Metoda triangularizarii a lui Gauss

Algoritmul pentru anularea elementelor de sub diagonala principala (triangularizare).

```
F(A) := | n ← rows(A)
        | m ← cols(A)
        | W ← A
        | for k ∈ 2..n
        |   | for i ∈ k..n
        |   |   | for j ∈ k - 1..m
        |   |   |   |  $W_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - \frac{A_{k-1,j}}{A_{k-1,k-1}} \cdot A_{i,k-1}$ 
        |   |   |   | W
        |   |   |   | A ← W
        |   |   |   | W
        |   |   |   | W
```

**\| declararea numarului de
elemente de pe prima coloana a
matricei A**

**\| incarcarea matricii interne w cu
matricea A**

**\| inceperea instructiunii de iterare
for pentru k, i, j**

**\| recalcularea elementelor w,
dupa elementele matricei A
(fomula iterativa realizeaza
triangularizarea)**

**\| programul returneaza matricea
w recalculata**



Metode Iterative de Soluționare

În aplicațiile practice în care de obicei matricea coeficienților sistemului A este de dimensiuni mari și numărul elementelor diferite de zero ale acestei matrici este foarte mic atunci metoda eliminării a lui Gauss nu este cea mai indicată metodă de rezolvare a sistemului.

În aceste cazuri **tehnicele de eliminare vor fi încetinite mult** datorită spațiului mare de memorie necesar pentru a putea lucra cu aceste matrici de mari dimensiuni dar și faptul că elementele zero din matricea inițială ar fi transformate în elemente diferite de zero după triangularizare.

Deci aceste sisteme mari se vor rezolva cu **metode iterative**.



Metoda aproximărilor succesive - Jacobi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

$$\begin{array}{l} \det(A) \neq 0 \\ a_{ij} \neq 0 \end{array} \Downarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1 \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2 \\ \dots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n \end{cases}$$

$$\alpha = - \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

$$x = \alpha \cdot x + \beta$$

Se alege vectorul aproximațiilor inițiale ale soluțiilor $x^{(0)} = [x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad \dots \quad x_n^{(0)}]^T$

care se obține prin măsurători experimentale sau se alege de obicei în aplicațiile practice ca fiind egal cu vectorul termenilor liberi

$$x^{(0)} = \beta$$

Metoda lui Jacobi presupune calculul unui șir de aproximații succesive $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ cu ajutorul formulei de iterare într-un pas care se demonstrează prin inducție:

$$x^{(k+1)} = \alpha \cdot x^{(k)} + \beta$$

Vectorul soluție după prima iterație este: $x^{(1)} = \alpha \cdot x^{(0)} + \beta$

Dacă șirul vectorilor soluții la iterația k , $x^{(k)}$ care este un șir de soluții aproximative, converge, atunci limita lui este soluție a sistemului $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) = x$$



Demonstrație 1 pe tabla - Convergența metodei Jacobi

Demonstrație 2 pe tabla

Evaluarea erorii în metoda aproximațiilor succesive - Jacobi

$$er = \|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|\beta\|$$



Planificarea și Managementul Timpului

- Setarea priorităților

IMPORTANTĂ

	Scăzută	Ridicată
Scăzută	Nu face acum.	Fă mai târziu.
Ridicată	Delegarea sarcinii.	Fă acum, Fă tu.

URGENTĂ

