

Curs 6 - 8

Metode Numerice de Aproximare și Interpolare a Funcțiilor date Numerice

As. Dr. ing. Levente CZUMBIL

Laboratorul de Cercetare în Metode Numerice
Departamentul de Electrotehnică, Inginerie Electrică

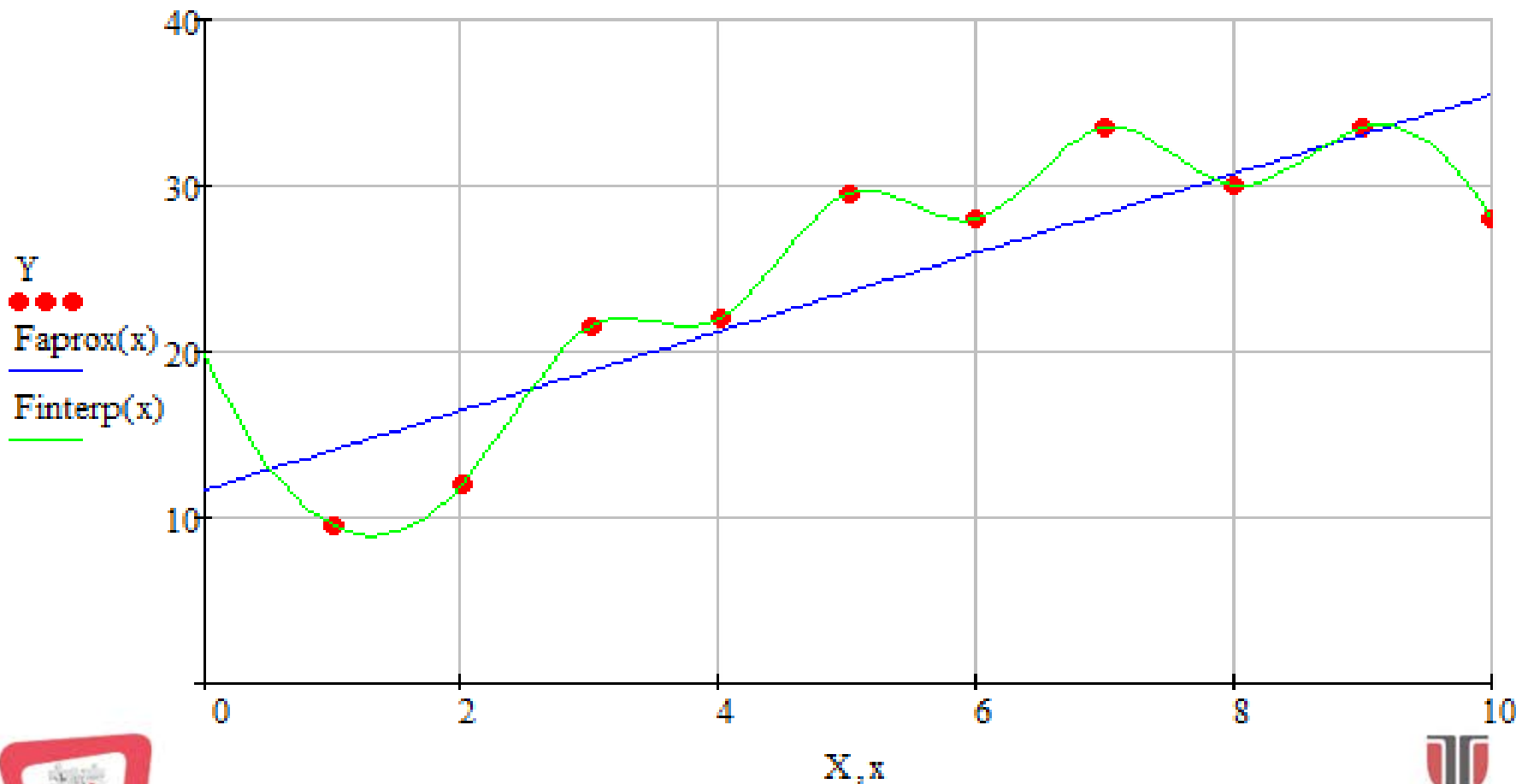
E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro Site: <http://users.utcluj.ro/~czumbil>



Funcții de Aproximare vs Polinoame de Interpolare

$$X = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10]$$

$$Y = [9.5 \ 12 \ 21.5 \ 22 \ 29.5 \ 28 \ 33.5 \ 30 \ 33.5 \ 28]$$



Curs 6

Noțiuni de Aproximare Analitică a Funcțiilor Numerice

As. Dr. ing. Levente CZUMBIL

Laboratorul de Cercetare în Metode Numerice

Departamentul de Electrotehnică, Inginerie Electrică

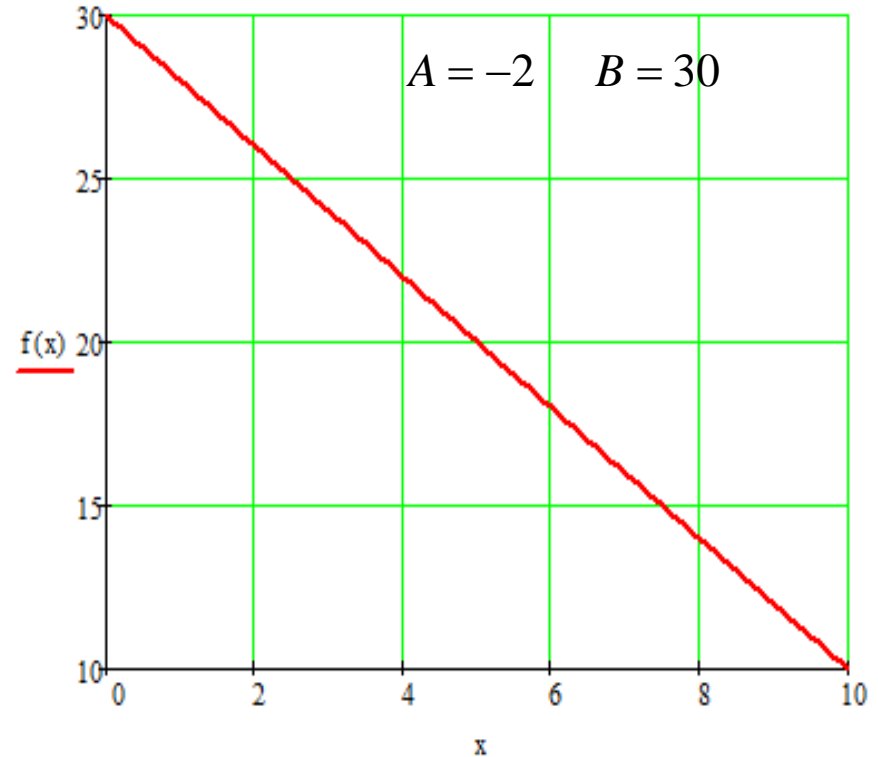
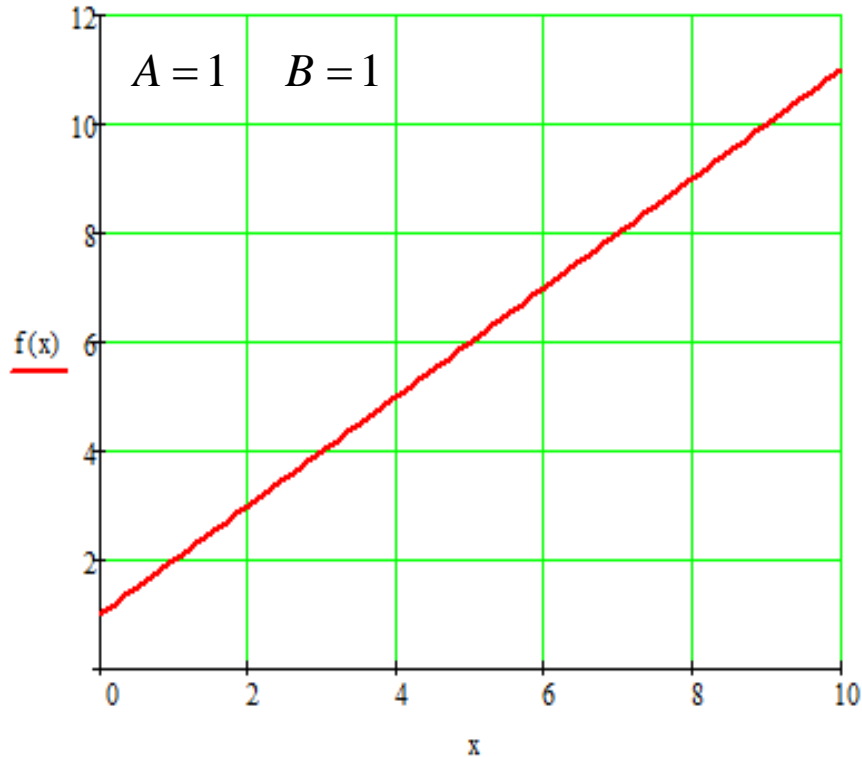
E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro Site: <http://users.utcluj.ro/~czumbil>



Forma Generală a Funcțiilor de Aproximare Utilizate

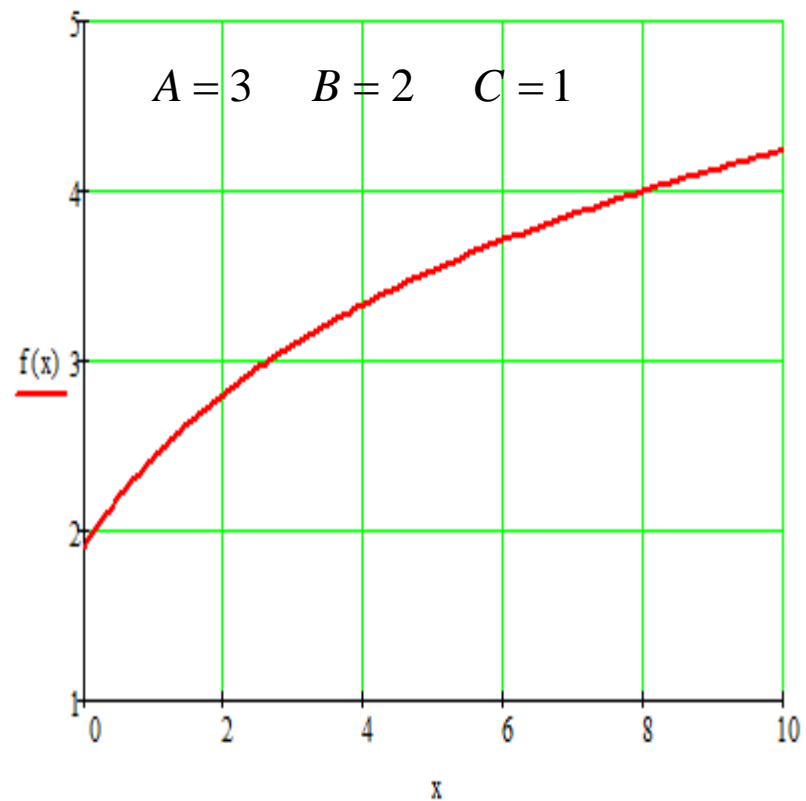
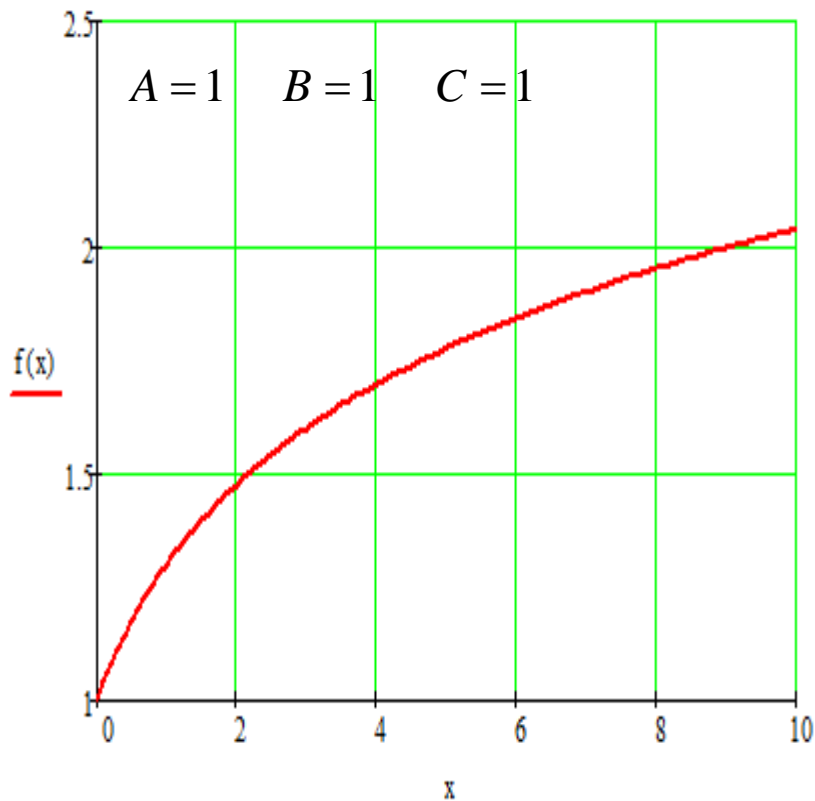
Funcții Liniare

$$f(x) = A \cdot x + B$$



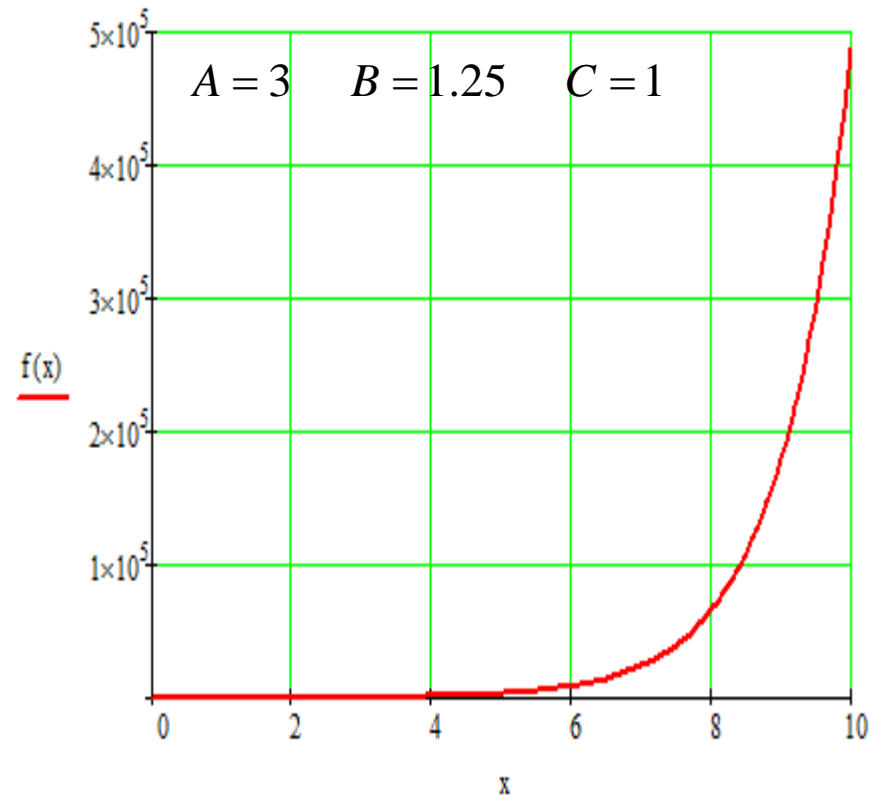
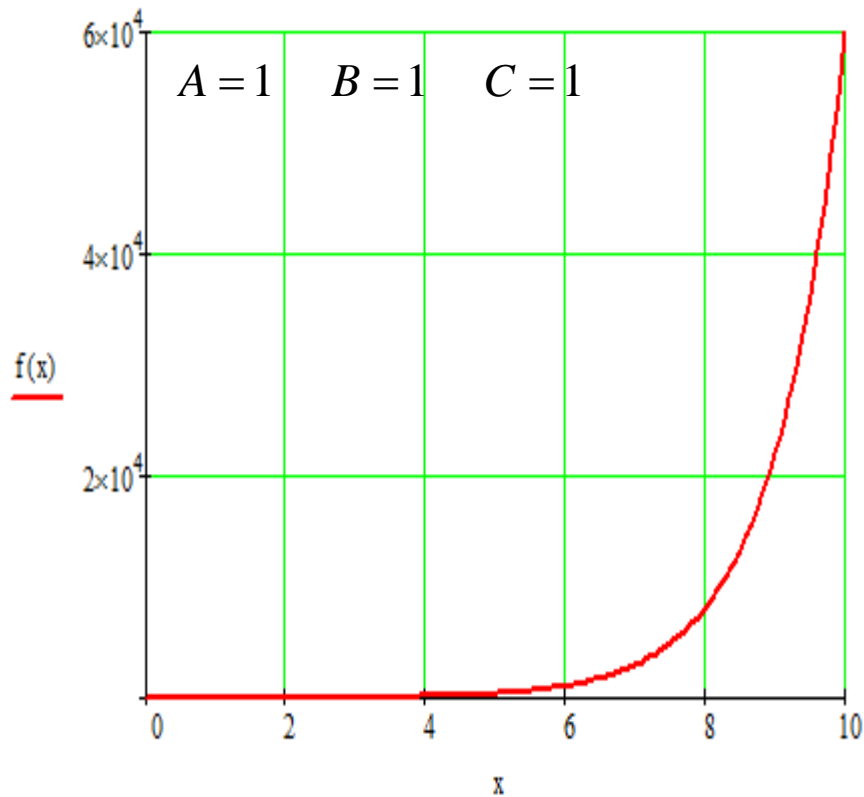
Funcții Logaritmice

$$f(x) = A \cdot \log(x + B) + C$$



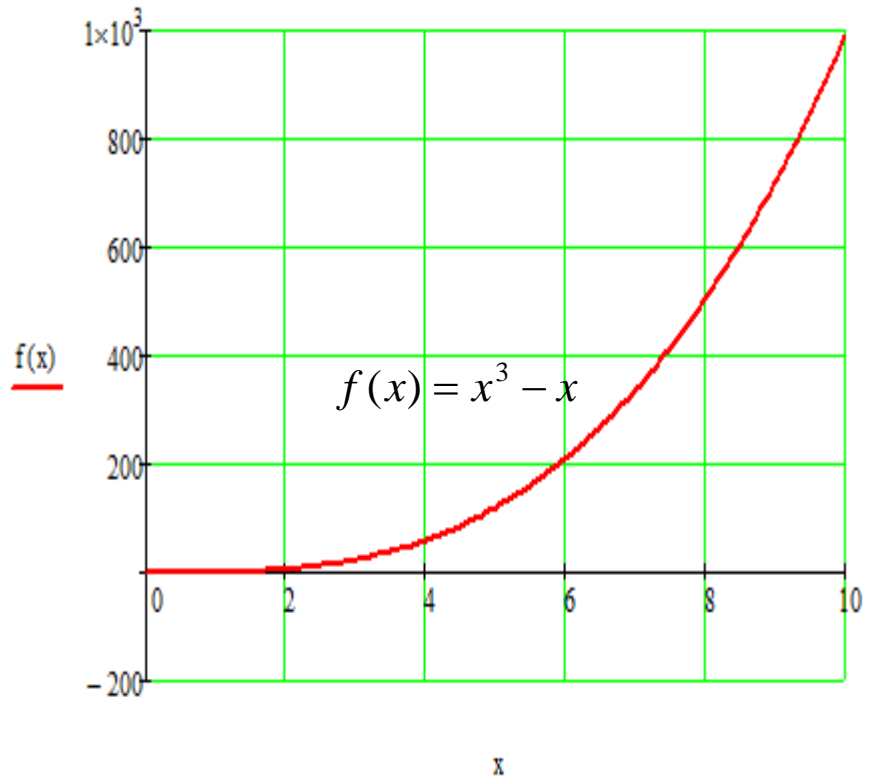
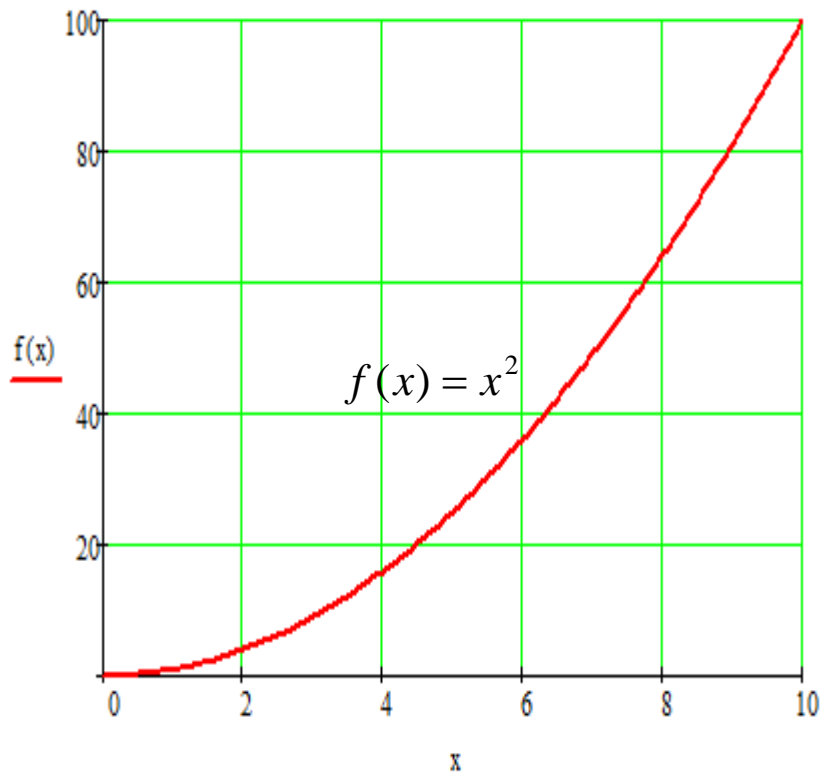
Funcții Exponențiale

$$f(x) = A \cdot e^{(B \cdot x)} + C$$



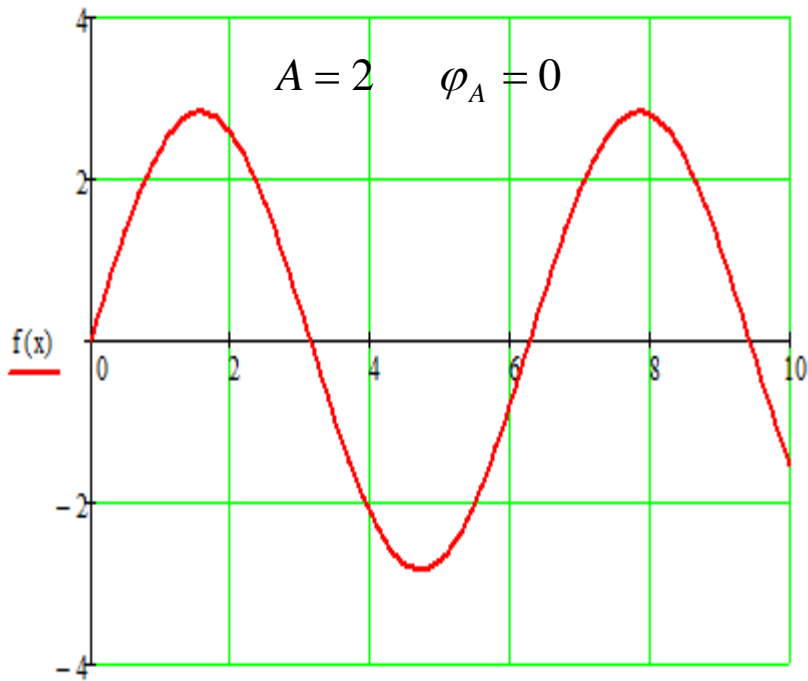
Funcții Polinomiale

$$f(x) = A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + \dots + A_n \cdot x^n$$

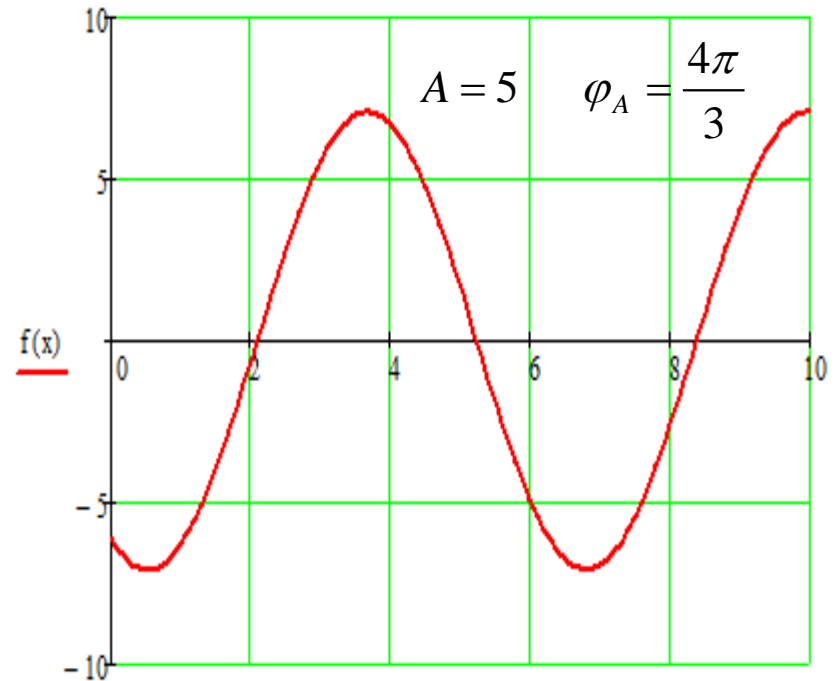


Funcții Trigonometrice

$$f(x) = A \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(x + \varphi_A)$$



x



x



Exemple de aplicații din ingineria electrică

❖ Evaluarea dinamică a încărcării liniilor electrice de transport, datorită fermelor eoliene și variației vitezei vântului;



Pe măsură ce crește viteza vântului, crește și puterea generată de fermele eoliene, dar se realizează și o ventilație naturală accentuată a liniilor electrice de evacuare a puterii, deci crește capacitatea de încărcare a liniilor existente;



Exemple de aplicații din ingineria electrică

❖ Alimentarea ventilatoarelor electrice de la panouri fotovoltaice (aproximarea curbelor de funcționare);

Aplicație: Ferme Avicole



Exemple de aplicații din ingineria electrică

- ❖ Evaluarea rezistivității volumice a materialelor siliconice utilizate la terminalele cablurilor de medie tensiune; Se studiază posibilitatea apariției unor defecte prin descărcări parțiale;
- ❖ Determinarea caracteristicilor de străpungere a gazelor de stingere a arcului electric din întreruptoarele de înalta tensiune;
- ❖ Variația cu temperatura a punctului optim de funcționare al pilelor electrice de combustie;
- ❖ Standardizarea prin aproximare a variației spațiale a curenților de întoarcere ai trăsnetelor, pe baza unor curbe numerice;
- ❖ Aproximarea curbelor de magnetizare corespunzătoare fenomenului de fero-rezonanță, fenomen care poate genera supratensiuni și supracurenți în sistemele energetice; Ferorezonanța apare datorită interacțiunii dintre inductanțele neliniare și capacitățile din sistemul energetic;

Exemple de aplicații din ingineria electrică

- ❖ Discriminarea între curenții interni de defect și curenți de magnetizare într-un transformator;



Aplicație: Implementare Curbă Analitică în Relele Digitale de Protecție



- ❖ Aproximarea polinomială sau cu funcții hiperbolice a curbelor de magnetizare a materialelor magnetice care intră în construcția hard-disk-urilor



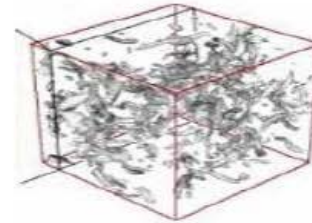
1000+ years ago
experimental
science



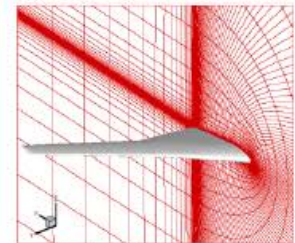
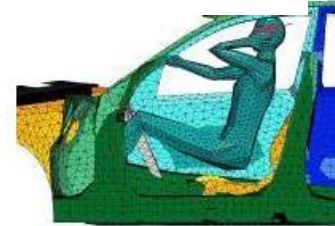
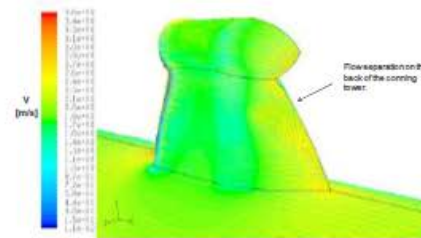
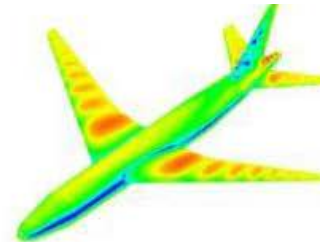
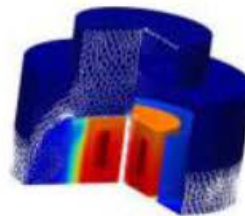
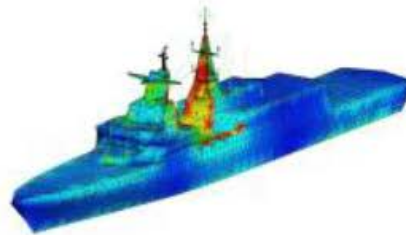
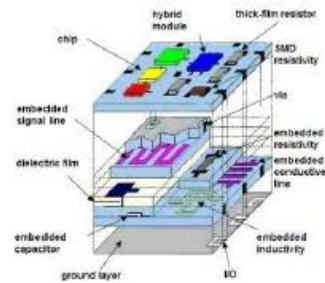
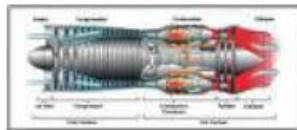
$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{4\pi G\rho}{3} - K\frac{c^2}{a^2}$$

100+ years ago
theoretical
science

10+ years ago
computational
science

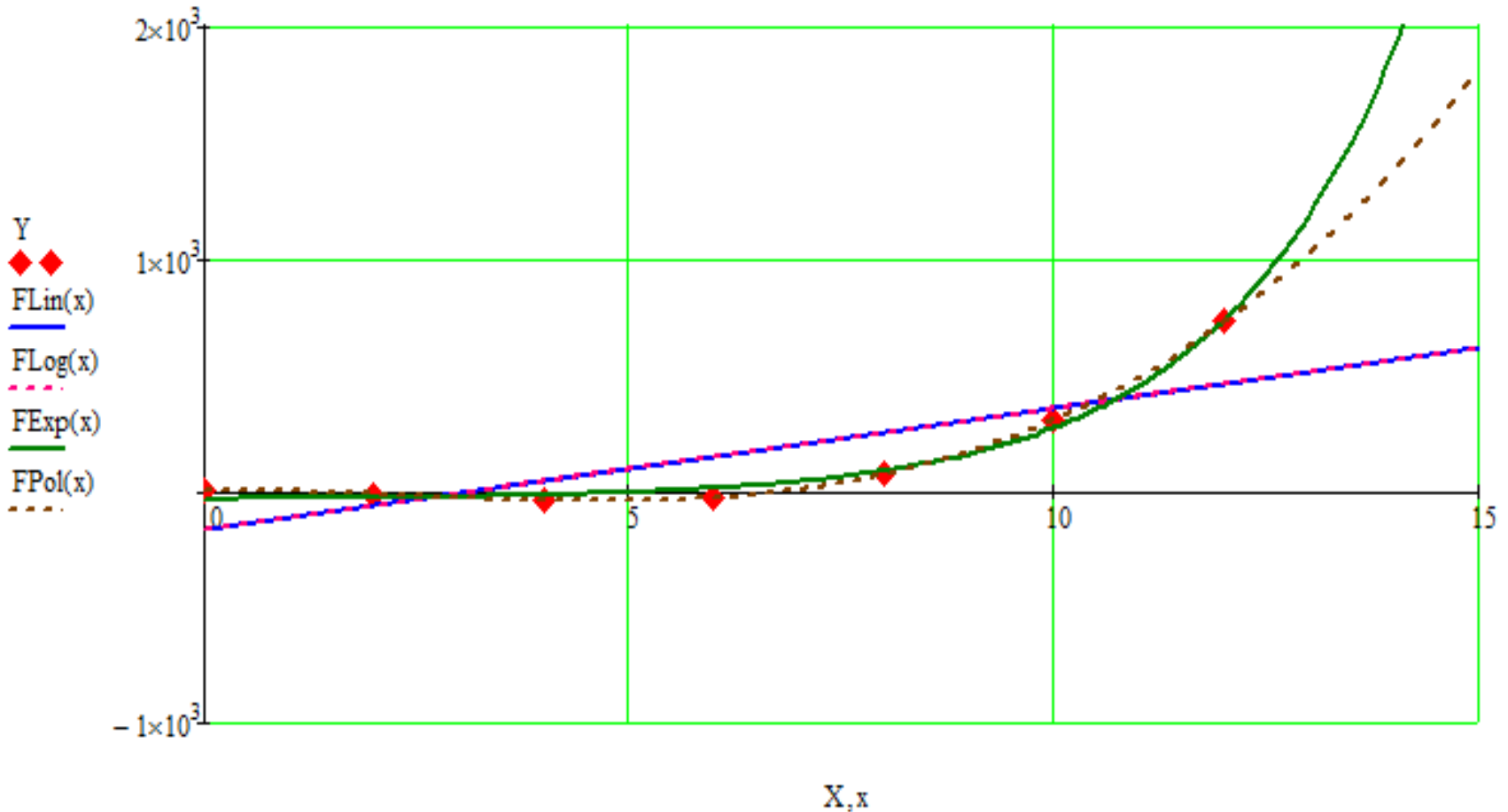


today
data-centric
science



$$X = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$$

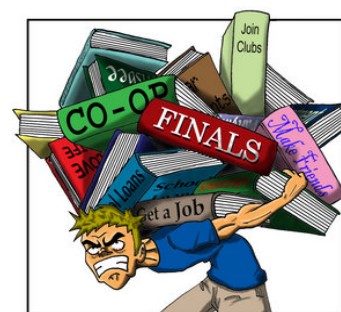
$$Y = [2.77 \quad -16.42 \quad -43.84 \quad -31.39 \quad 68.97 \quad 305.28 \quad 725.553]$$



Seria Taylor – instrument matematic

Abaterăa celor mai mici pătrate

Seria Fourier – analiza armonică



Descompunerea în serie Taylor:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left[\frac{(x-x_0)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0) \right]$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} \cdot f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \cdot f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} \cdot f'''(x_0) + \dots$$

Nucleu din care se pot deduce metodele numerice!



Exemplu Numeric – Evaluarea Funcției Exponențiale

$f(x) := e^x$ \\ funcția test;

$x := 0, 0.1 \dots 4.5$ $F(x, n) := \frac{d^n}{dx^n} f(x)$

$x_0 := 1$ \\ punctul în jurul căruia se realizează aproximarea;

$T_1(x) := f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} \cdot F(x_0, 1)$ \\ aproximarea în serie Taylor de gradul I;

$T_2(x) := f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} \cdot F(x_0, 1) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \cdot F(x_0, 2)$ \\ aproximarea în serie Taylor de gradul II;

$T_3(x) := f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} \cdot F(x_0, 1) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \cdot F(x_0, 2) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} \cdot F(x_0, 3)$
\\ aproximarea în serie Taylor de gradul III;

$T_4(x) := f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} \cdot F(x_0, 1) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \cdot F(x_0, 2) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} \cdot F(x_0, 3) + \frac{(x - x_0)^4}{4!} \cdot F(x_0, 4)$
\\ aproximarea în serie Taylor de gradul III;



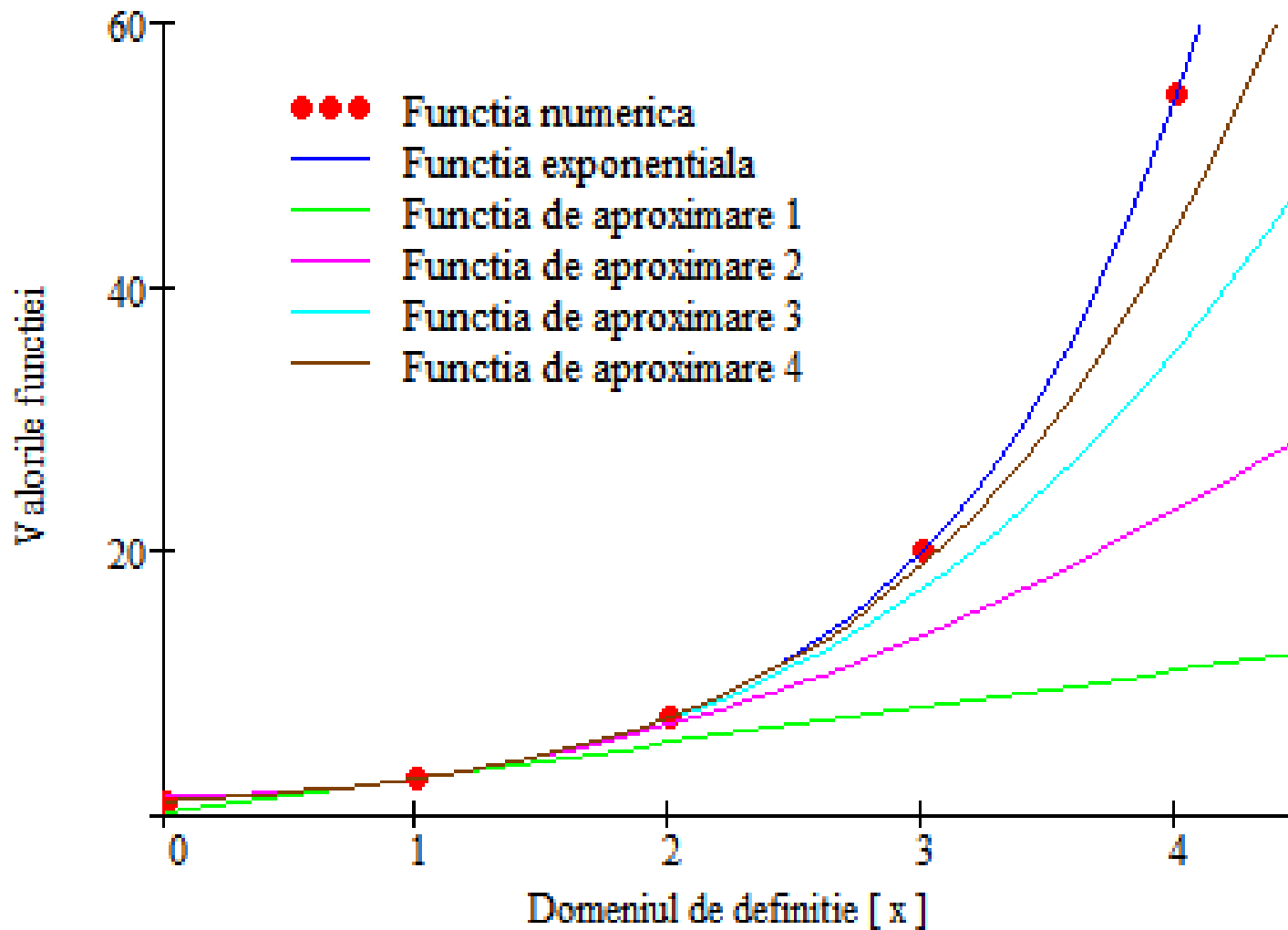
$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$Y := f(X)$

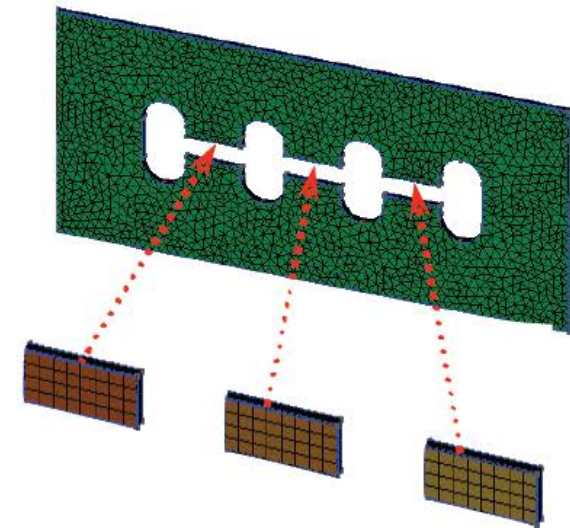
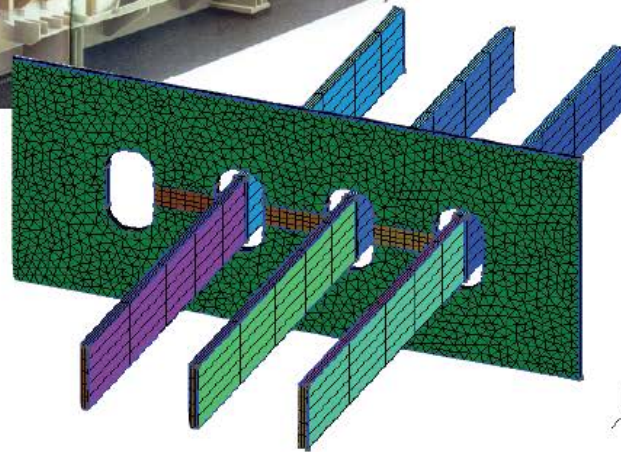
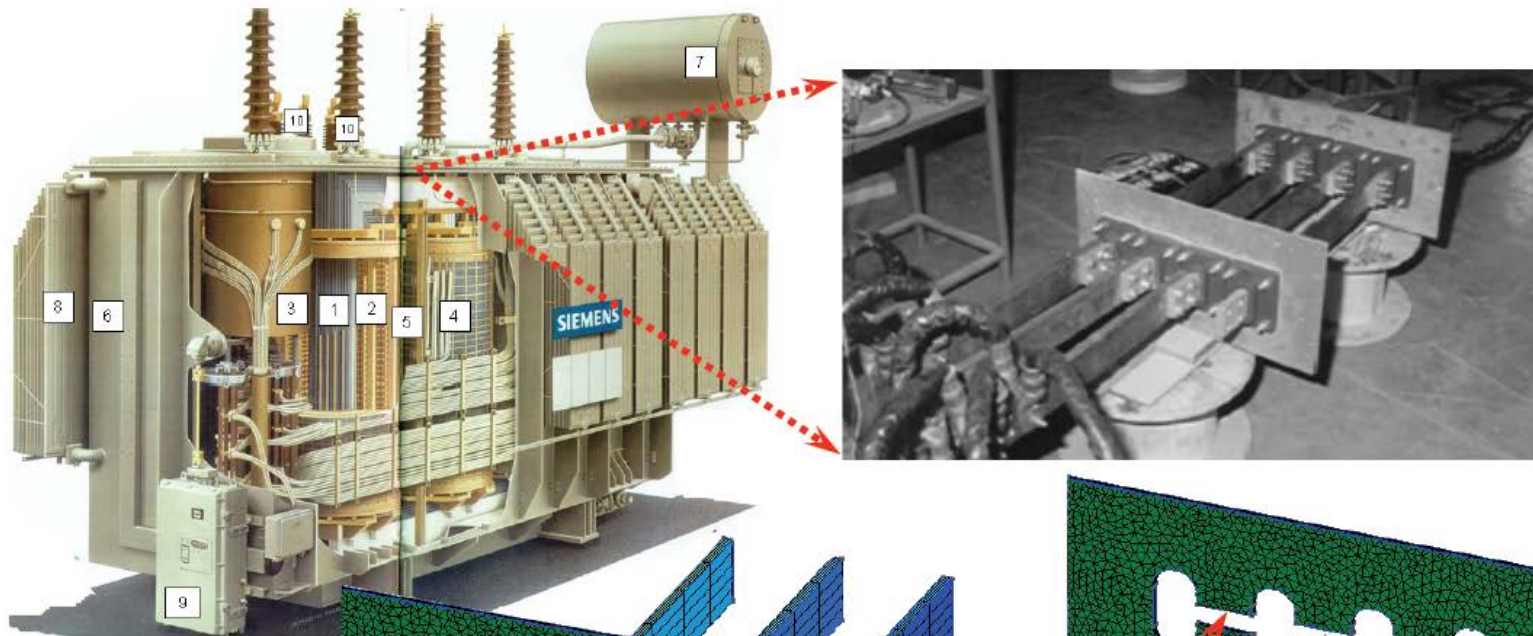
$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.718 \\ 7.389 \\ 20.086 \\ 54.598 \end{pmatrix}$$

\\ valorile funcției numerice;

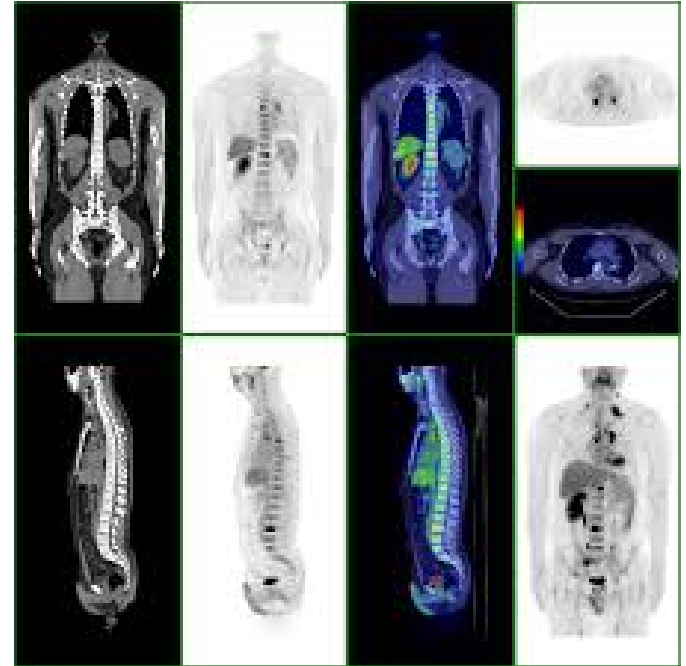
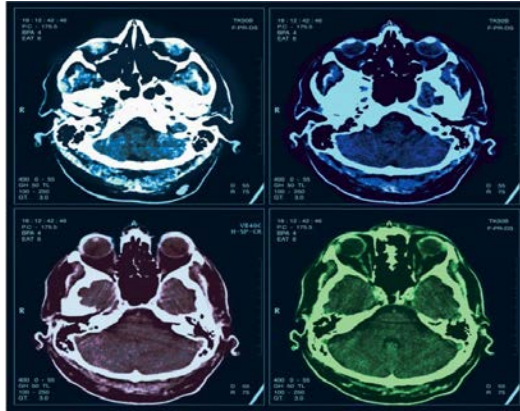
Rezultate Numerice Obținute:



Curbe de Magnetizare



Curbe de Magnetizare



Conceptul de Aproximare

Una din problemele principale legate de aproximarea numerică o reprezintă ajustarea funcțiilor de aproximare la datele experimentale înregistrate.

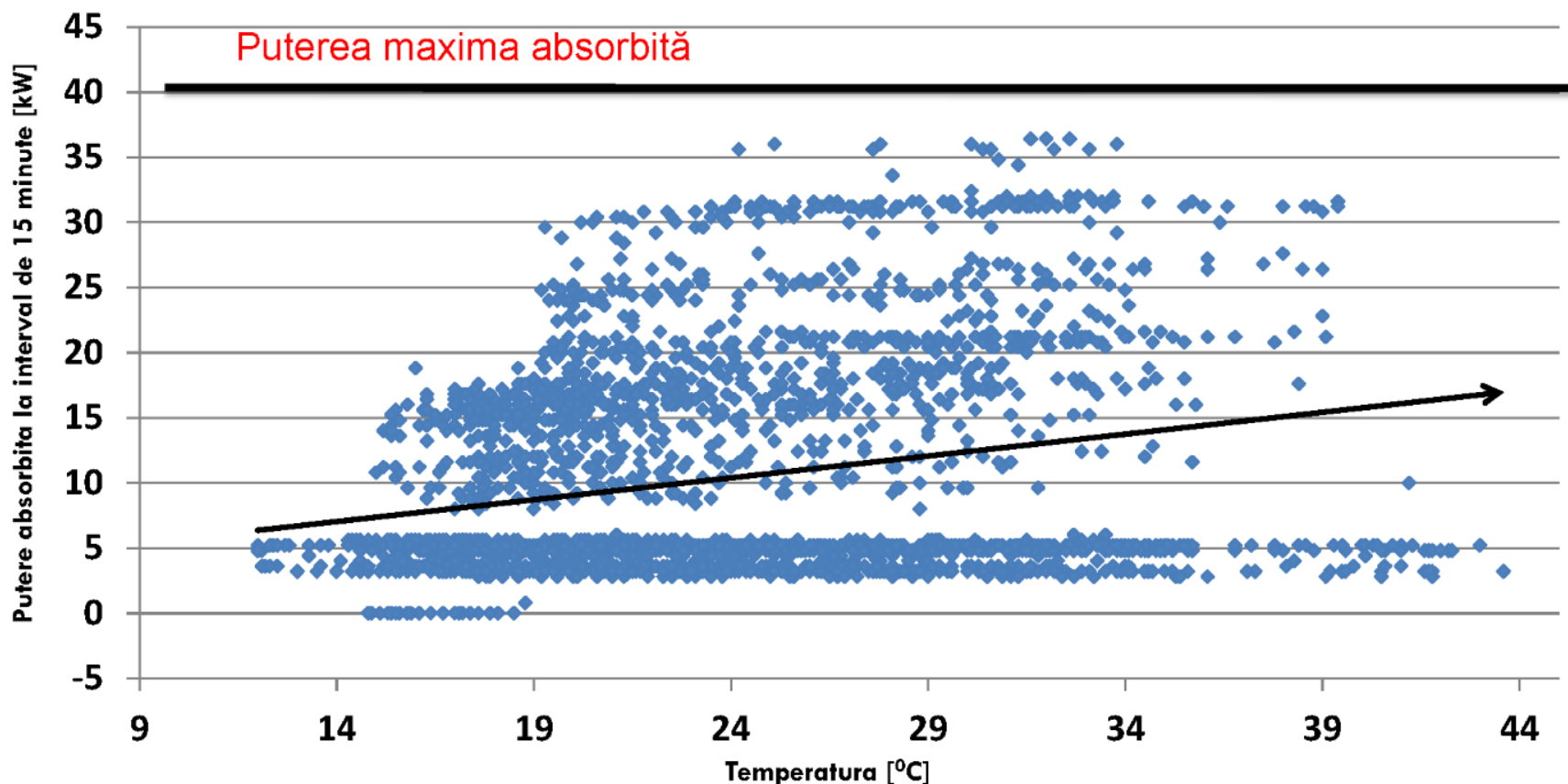
Din moment ce datele de intrate sunt obținute experimental se presupun a fi afectate de erori – în general datorate preciziei aparatelor de măsură – și ca urmare nu se dorește neapărat determinarea unei funcții care să treacă prin toate punctele date.

Se caută, în schimb, o funcție care să descrie tendința de variație a mărimilor experimentale studiate și să reprezinte o aproximare fidelă a datelor înregistrate.





Corelare temperatura exterioara - putere absorbita chiller – Iulie 2016

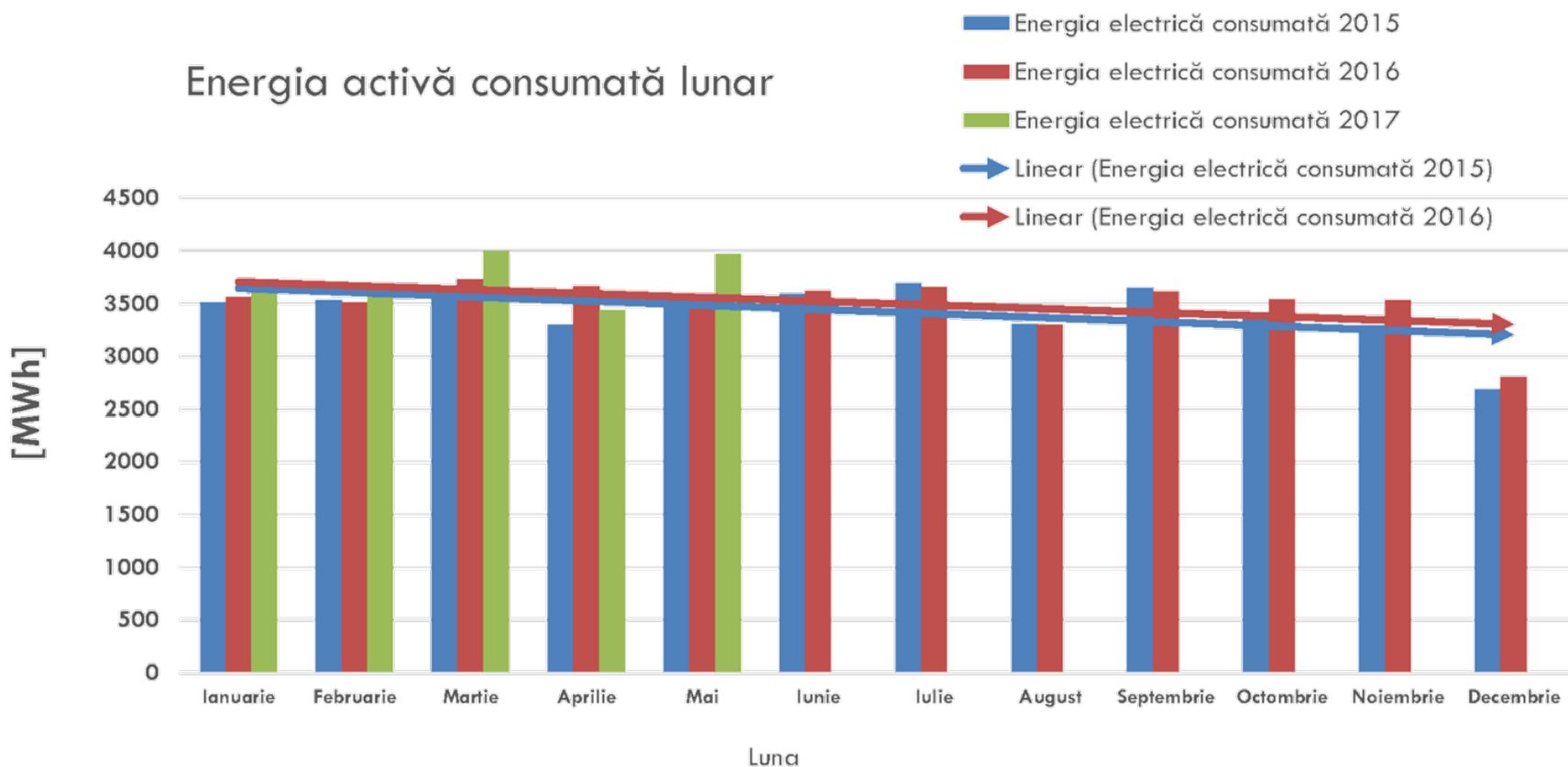


Regimul de funcționare nu este corelat cu temperatura ambientală. În schimb este evident regimul de recirculare a agentului de răcire, unde avem o putere absorbită de 5 kW.

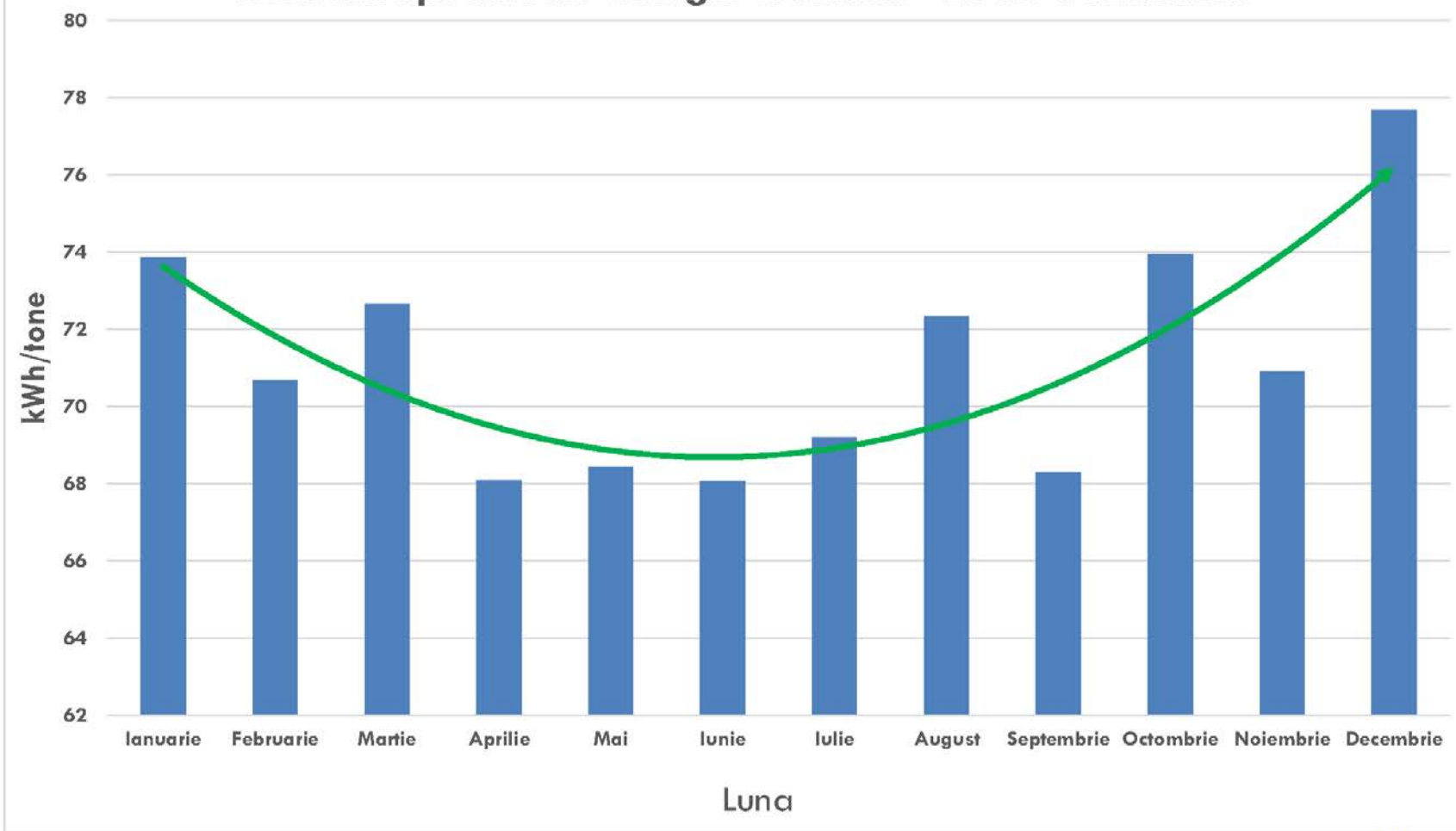




Energia activă consumată lunar



Consum specific de energie electrică - 2016 OTELINOX



Metoda Abaterii celor Mai Mici Pătrate

Fie $y = f(x)$ o funcție discretă, definită într-un număr limitat de puncte.

Se caută o funcție de aproximare $g(x)$, numită funcție de regresie, care să aibă același profil de variație cu funcția discretă, obiectiv îndeplinit prin minimizarea expresiei:

$$FO = \sum_{i=0}^n (y_i - g(x_i))^2$$

Funcțională de abatere medie pătratică

În continuare, definim funcția de aproximare printr-o combinație liniară de funcții cunoscute și ponderate prin coeficienți necunoscuți:

$$g(x) = \sum_{k=0}^m a_k \cdot g_k(x)$$

Minimizarea expresiei funcționalei FO implică anularea derivatelor parțiale ale acesteia, în raport cu coeficienții necunoscuți:

$$\frac{\partial FO}{\partial a_k} = \frac{\partial}{\partial a_k} \sum_{i=0}^n \left(y_i - \sum_{k=0}^m a_k \cdot g_k(x_i) \right)^2 \quad k=0..m$$



În cazul particular în care funcțiile $g_k(x)$ sunt un set de funcții independente de forma:

$$g_k(x) = x^{k-1}$$

atunci relațiile aferente derivatelor parțiale capătă următoarea formă specifică:

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \left[\sum_{i=0}^n \left(y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2 - \dots - a_m \cdot x_i^m \right)^2 \right] = 0$$

Astfel în situația utilizării unei funcții de aproximare liniare de gradul I, sistemul de ecuații aferent metodei abaterii celor mai mici pătrate devine:

$$n \cdot a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i \right) \cdot a_1 = \sum_{i=0}^n y_i$$

$$\left(\sum_{i=0}^n x_i \right) \cdot a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^2 \right) \cdot a_1 = \sum_{i=0}^n (y_i \cdot x_i)$$



just an
Example

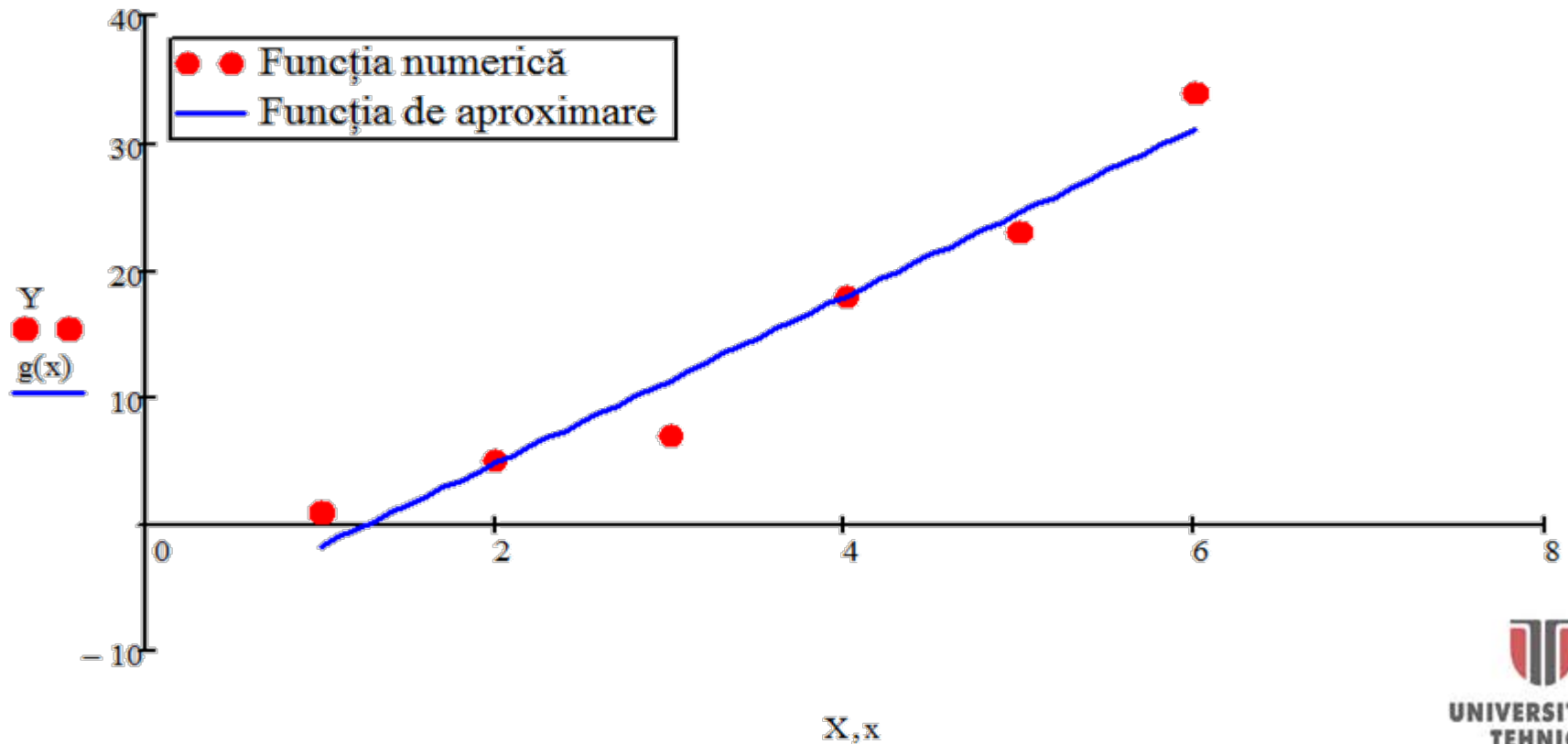
$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 18 \\ 23 \\ 34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} := \text{line}(X, Y)$$

$$g(x) := a_0 + a_1 \cdot x$$

$$x := 1, 1.1 \dots 6$$





Eficiența aproximării liniare este dată de:

$$a_c = \frac{\sum_{i=0}^n (x_i \cdot y_i) - \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=0}^n x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^n y_i \right)}{\sqrt{\left[\sum_{i=0}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=0}^n x_i \right)^2 \right] \cdot \left[\sum_{i=0}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=0}^n y_i \right)^2 \right]}}$$

Coeficientul de corelație – cât mai apropiat de valoarea 1



În schimb, dacă aproximarea se realizează cu o funcție polinomială de ordinul II:

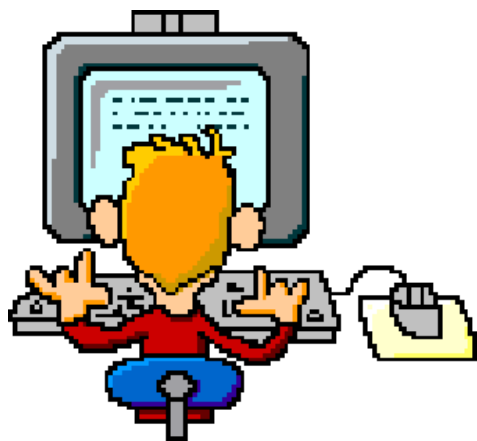
$$g(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

Atunci se obține sistemul:

$$n \cdot a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i \right) \cdot a_1 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^2 \right) \cdot a_2 = \sum_{i=0}^n y_i$$

$$\left(\sum_{i=0}^n x_i \right) \cdot a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^2 \right) \cdot a_1 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^3 \right) \cdot a_2 = \sum_{i=0}^n (y_i \cdot x_i)$$

$$\left(\sum_{i=0}^n x_i^2 \right) \cdot a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^3 \right) \cdot a_1 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^4 \right) \cdot a_2 = \sum_{i=0}^n (y_i \cdot x_i^2)$$



just an
Example

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 51 \\ 66 \\ 97 \\ 118 \end{pmatrix}$$

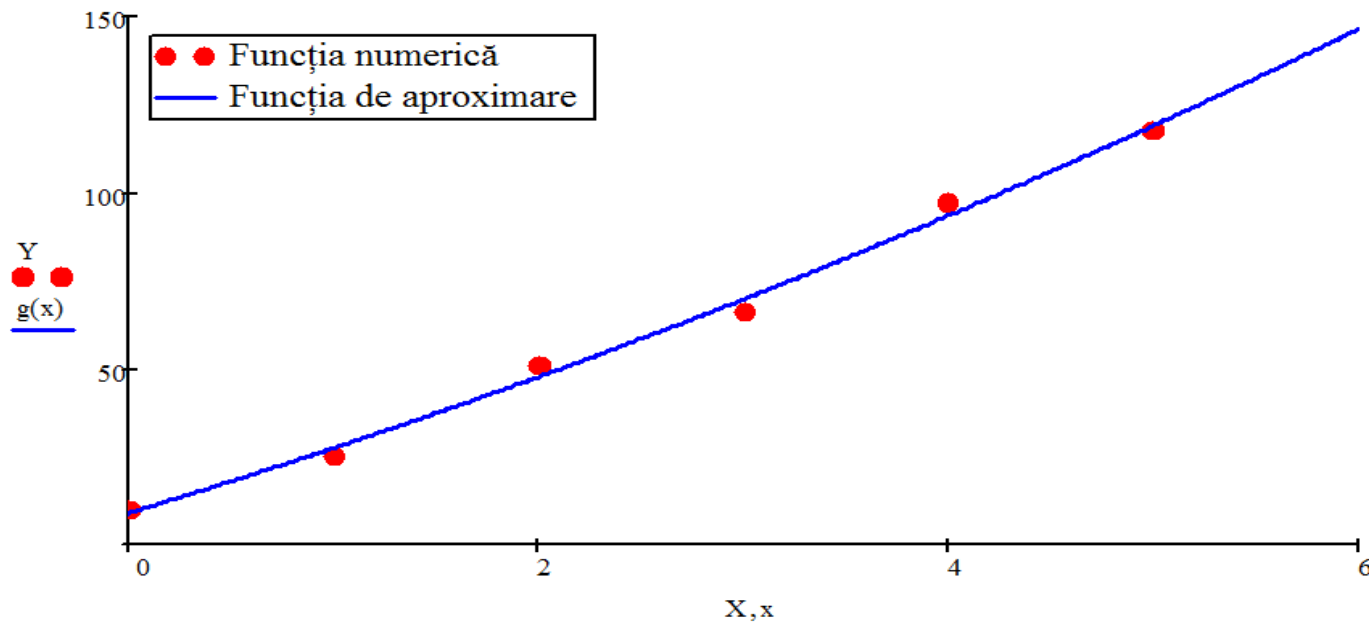
\ \ funcția numerică

$$g(x) := 9.07 + 17.56 \cdot x + 0.89 \cdot x^2$$

\ \ funcția de aproximare

$$x := 0, 0.01 \dots 6$$

\ \ intervalul de definire a funcției de aproximare



Rezolvarea Sistemelor de Ecuații Nedeterminate

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

$$A^T \cdot A \cdot X = A^T \cdot B$$

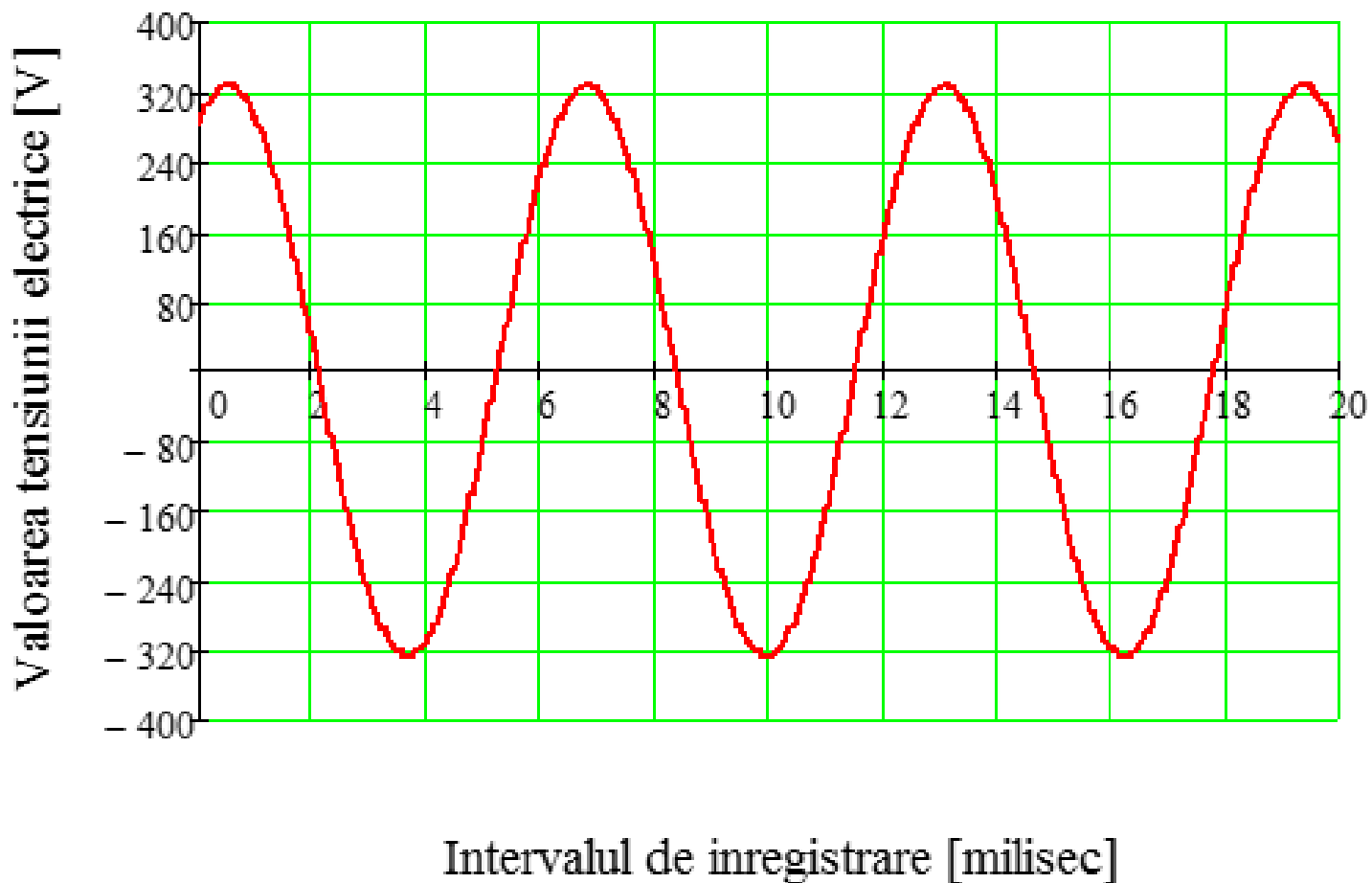
$$X = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 1.75 \\ 3.5 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



Seria Fourier – Analiza Armonică a Semnalelor



Aproximarea prin serii Fourier

$$u(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{2} \cdot C_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t + \varphi_k) \right)$$

$$u(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sqrt{2} \cdot C_k \cdot (\cos(\varphi_k) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) + \sin(\varphi_k) \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t)) \right]$$

$$u(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{2} \cdot A_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{2} \cdot B_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) \right)$$

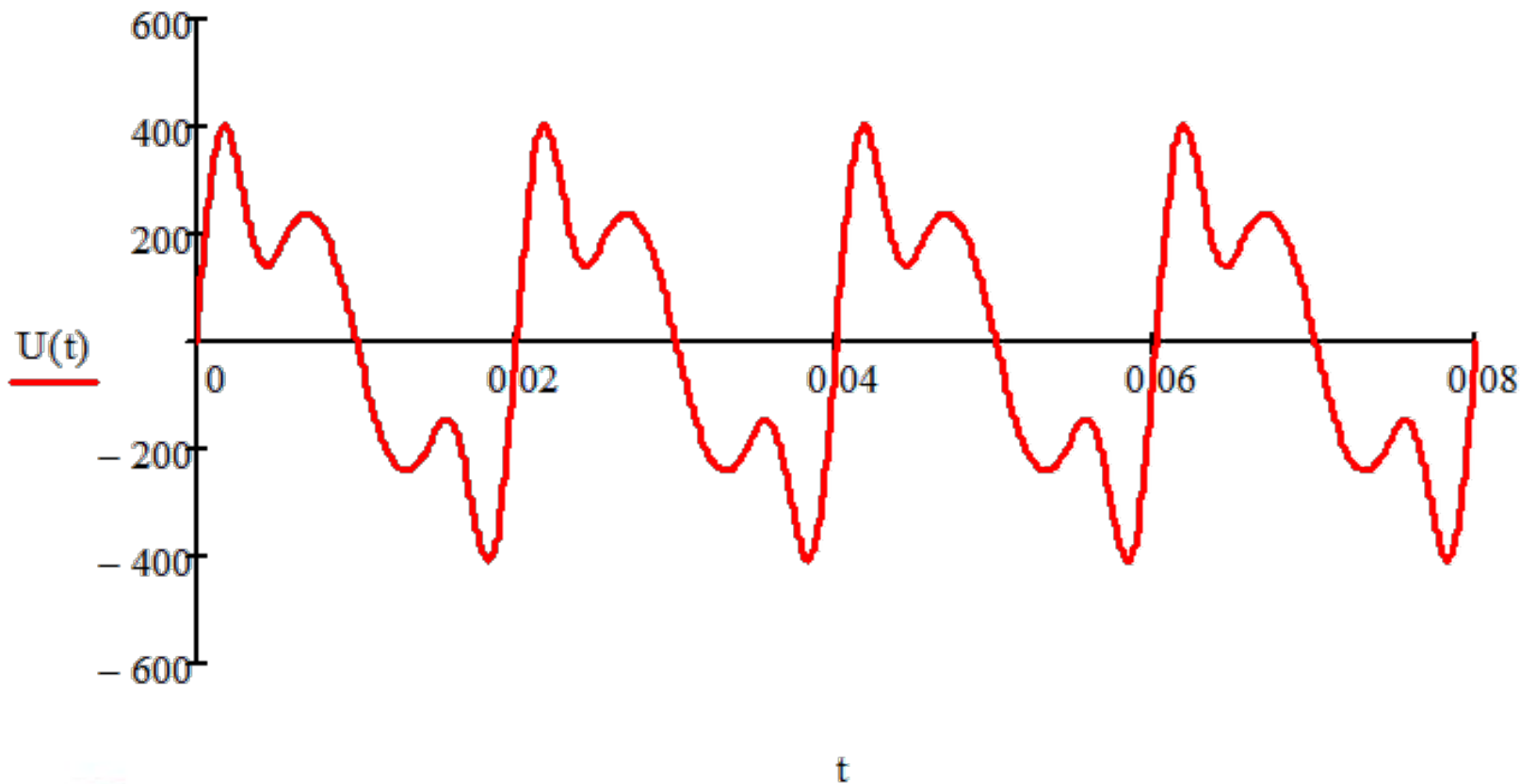
$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$$

$$\varphi_k = \arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right)$$



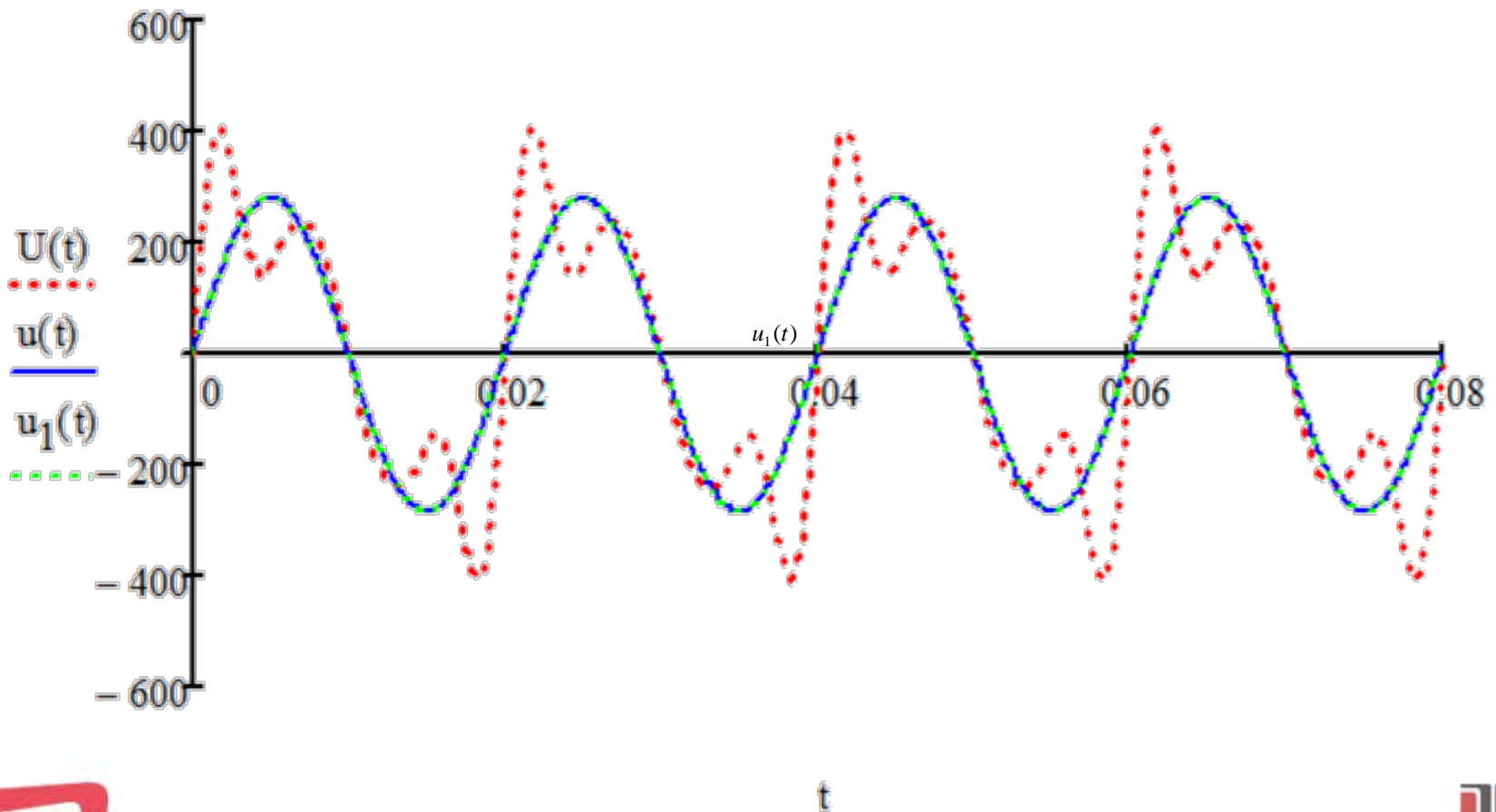
Exemplu Numeric

$$U(t) := 200\sqrt{2}\cdot\sin(\omega\cdot t) + 40\sqrt{2}\cdot\sin(2\cdot\omega\cdot t) + 100\sqrt{2}\cdot\sin(3\omega\cdot t) + 50\sqrt{2}\cdot\sin(4\cdot\omega\cdot t) + 15\sqrt{2}\cdot\sin(5\cdot\omega\cdot t)$$



$$u(t) = u_1(t)$$

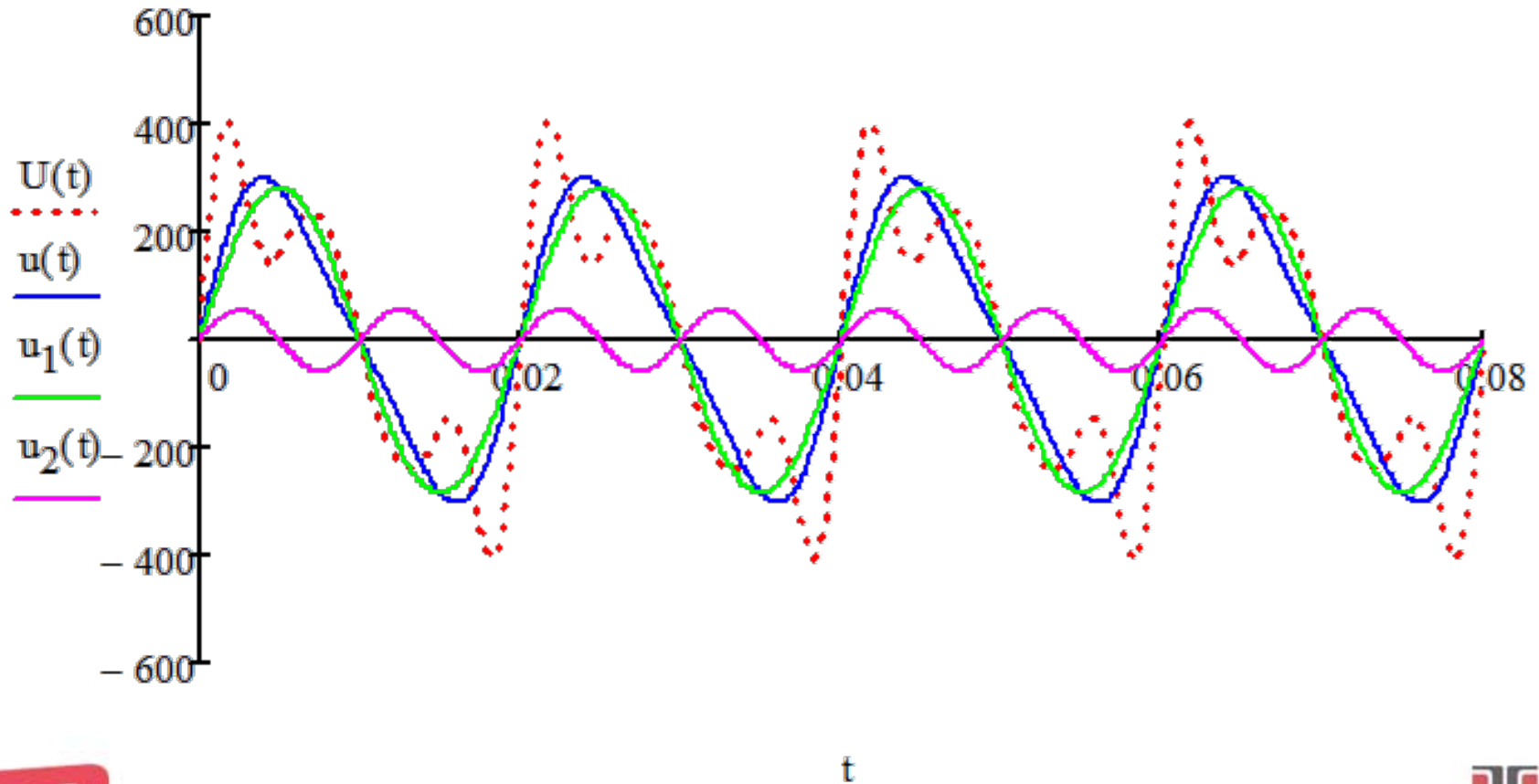
$$u_1(t) = 200 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$



$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

$$u_1(t) = 200 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$u_2(t) = 40 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)$$

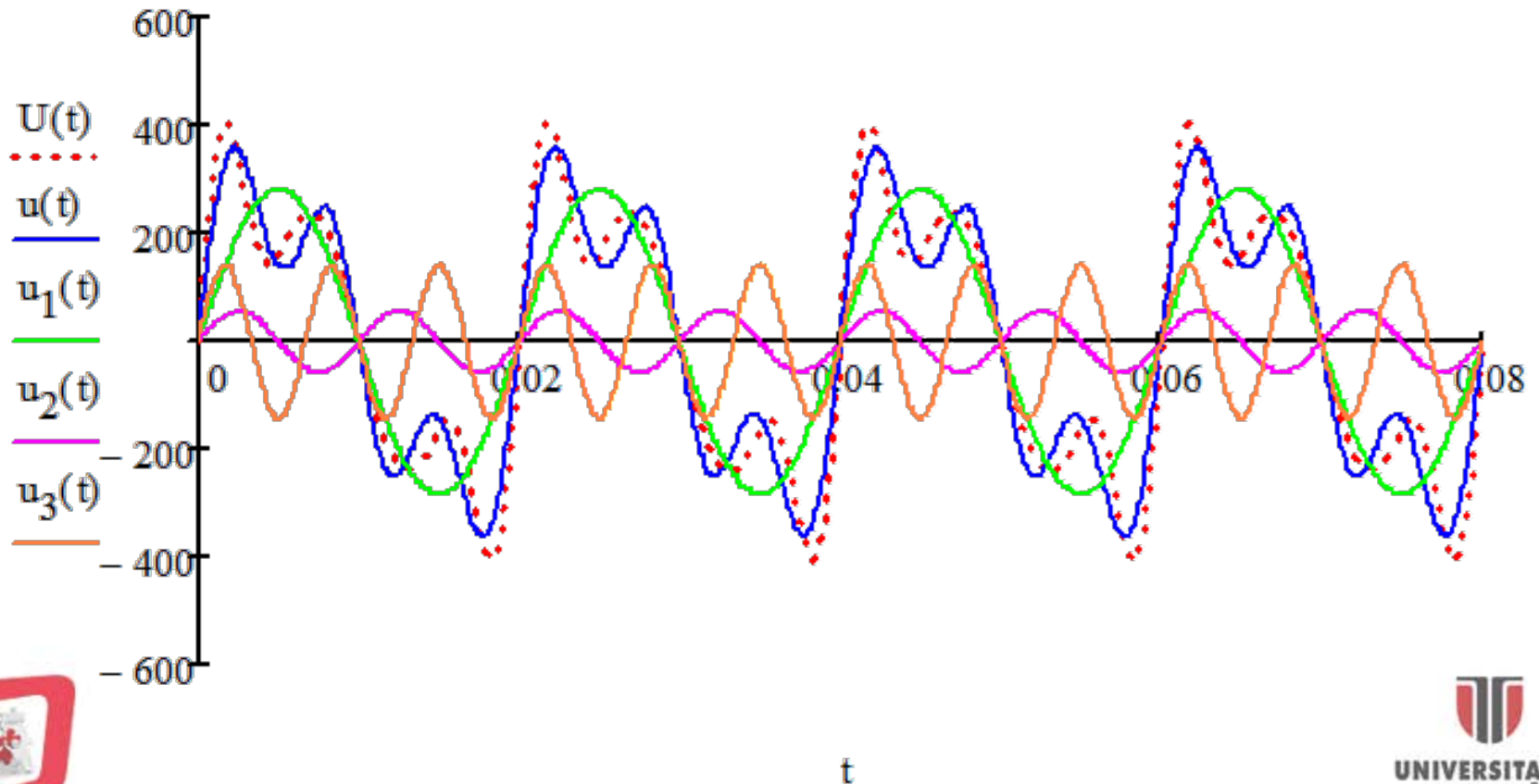


$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

$$u_1(t) = 200 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$u_2(t) = 40 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)$$

$$u_3(t) = 100 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t)$$



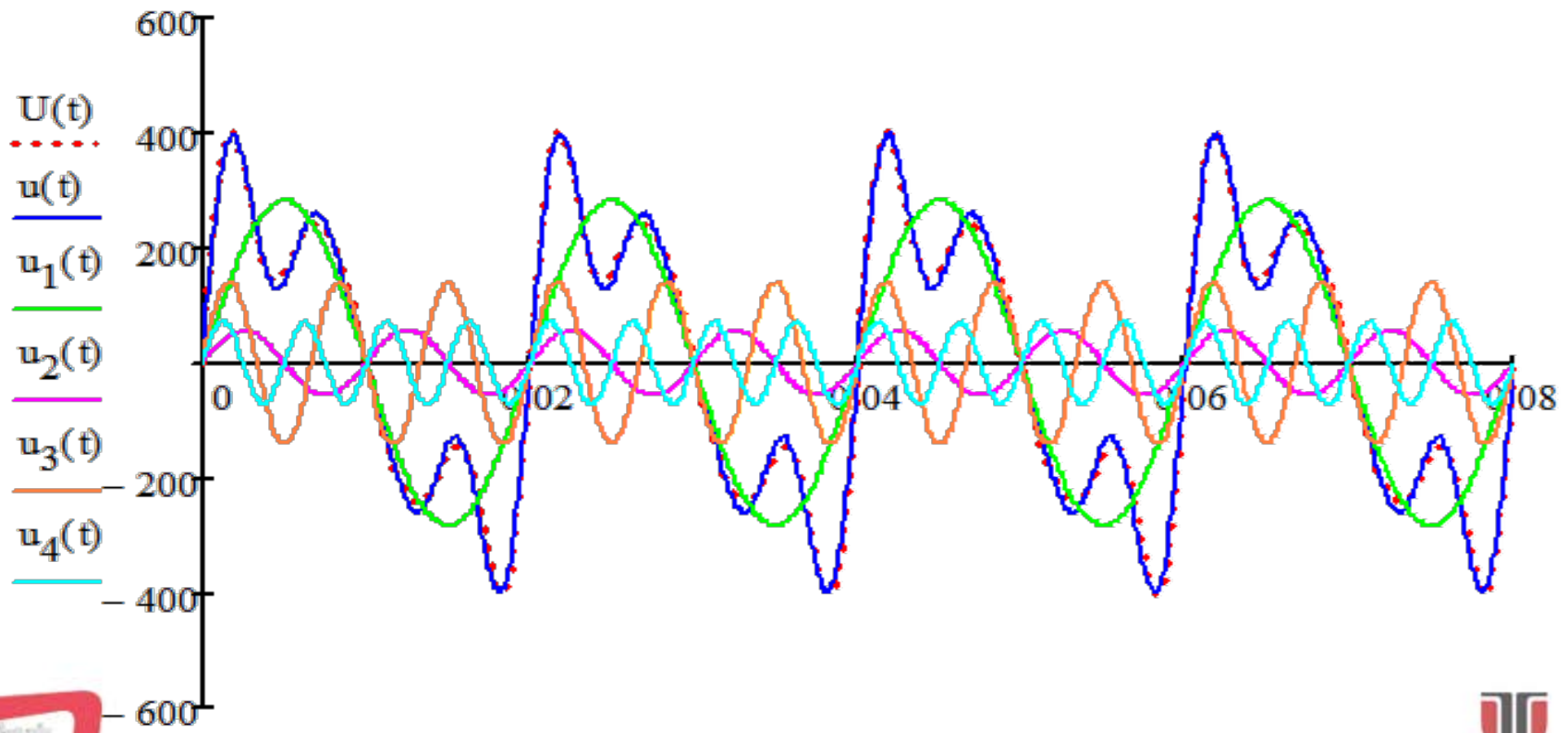
$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + u_4(t)$$

$$u_1(t) = 200 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$u_2(t) = 40 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)$$

$$u_3(t) = 100 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t)$$

$$u_4(t) = 50 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(4 \cdot \omega \cdot t)$$



t

Coeficienții Seriei Fourier

Calcul pe baza mărimii analitice

$$C_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t) dt$$

$$\sqrt{2} \cdot A_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T (u(t) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t)) dt$$

$$\sqrt{2} \cdot B_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T (u(t) \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t)) dt$$

$$k = 1.. \infty$$

Calcul pe baza mărimii numerice

$$C_0 = \frac{1}{2 \cdot p} \cdot \sum_{i=1}^{2 \cdot p} U_i$$

$$\sqrt{2} \cdot A_k = \frac{1}{p} \cdot \sum_{i=1}^{2 \cdot p} \left(U_i \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot k \cdot \pi \cdot i}{p}\right) \right)$$

$$\sqrt{2} \cdot B_k = \frac{1}{p} \cdot \sum_{i=1}^{2 \cdot p} \left(U_i \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot k \cdot \pi \cdot i}{p}\right) \right)$$

$$k = 1..p$$

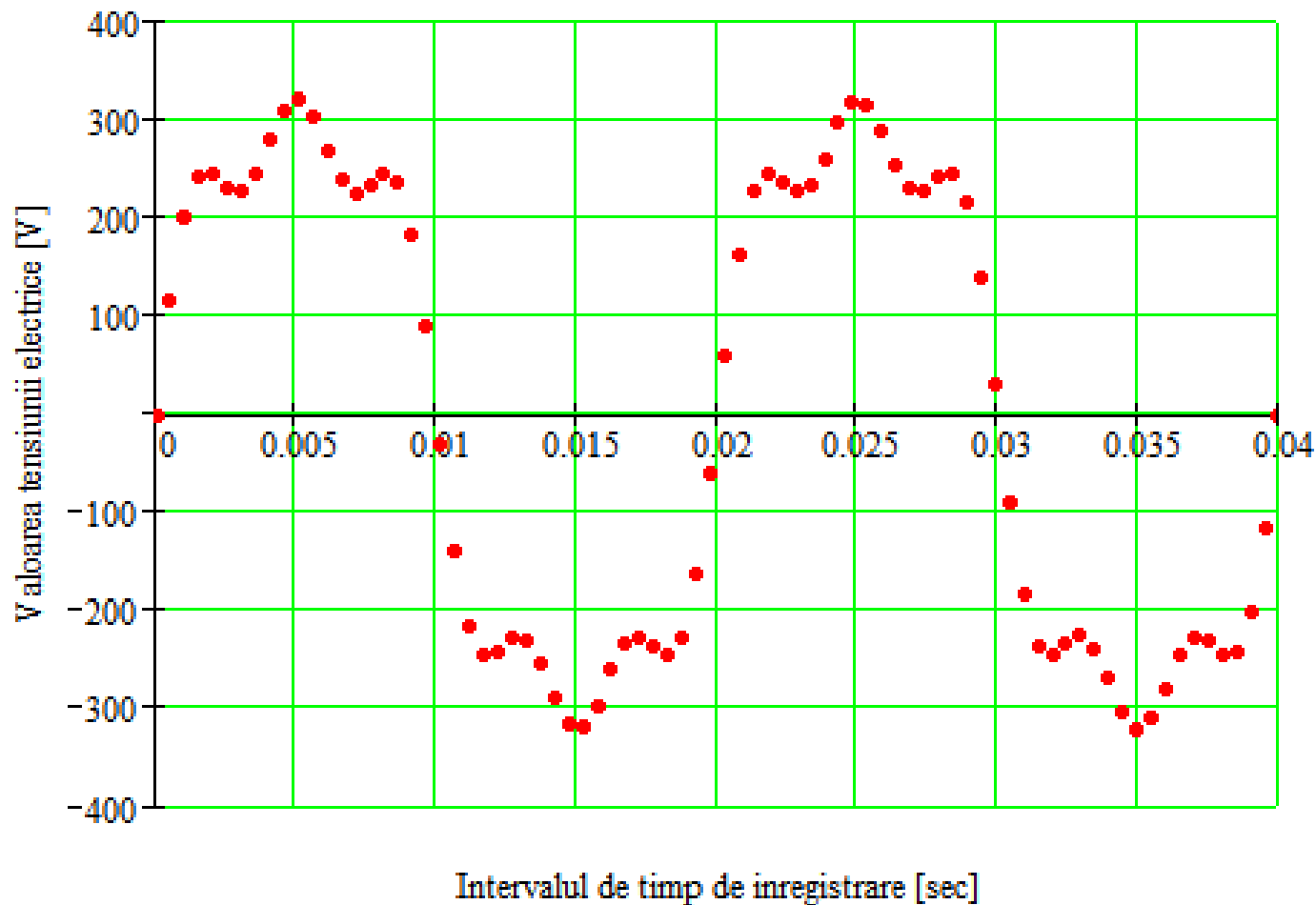


- NUTRIENTUL Bihor
- DELTA Mioveni
- UPRUC Făgăraș
- CONTINENTAL Sibiu
- THUNDERFLEX Huedin

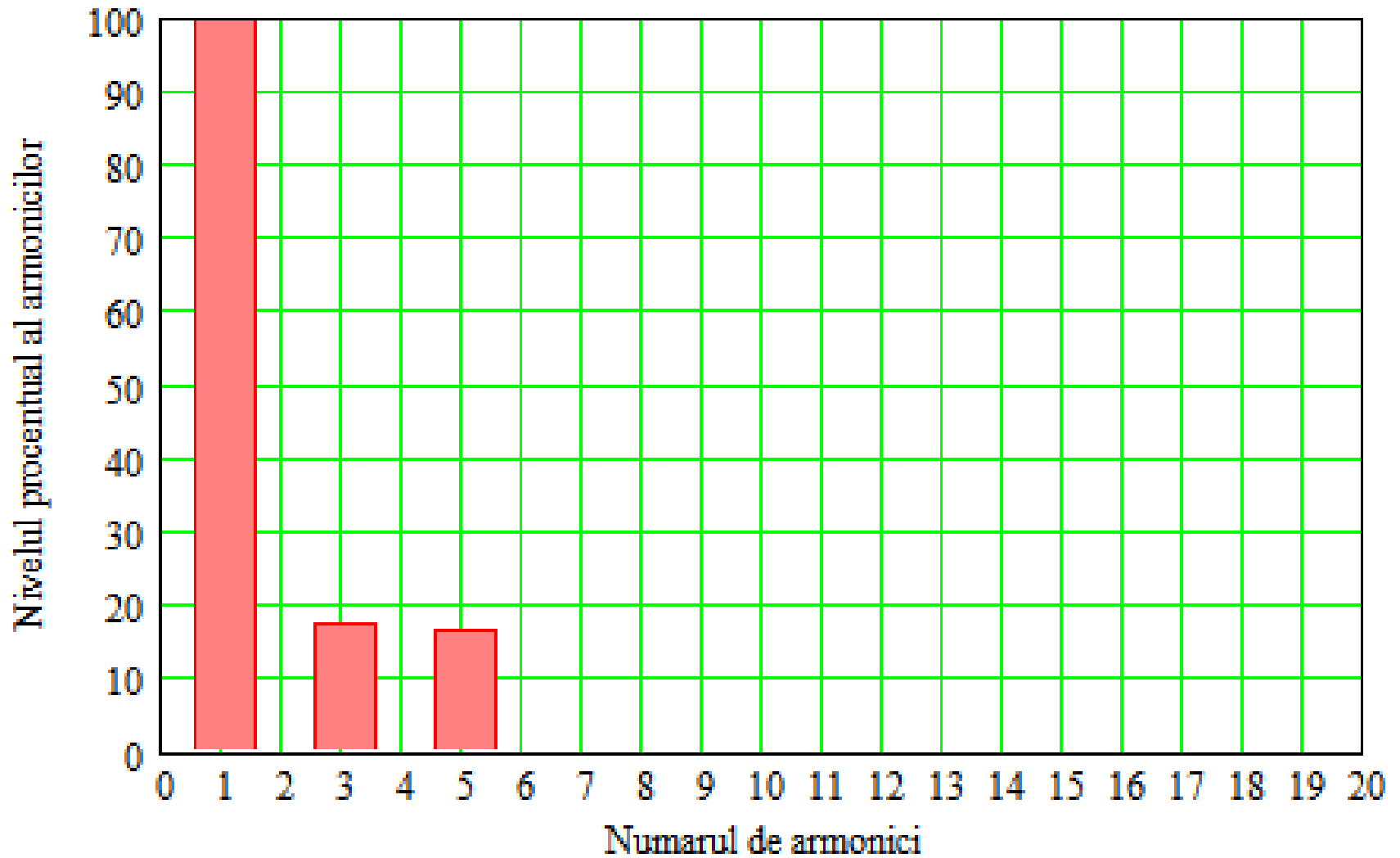


Studiu de Caz I

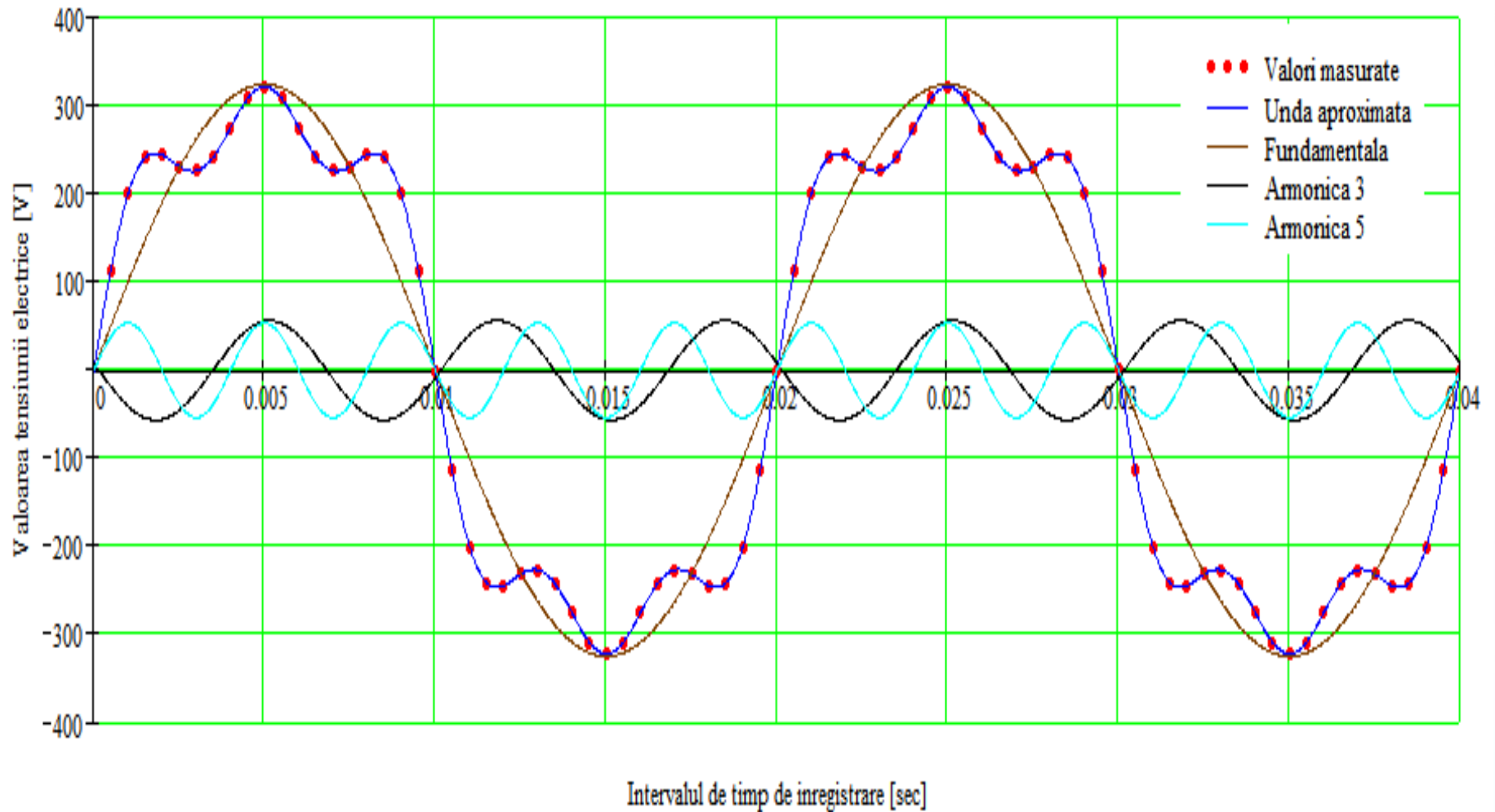
Inregistrarea formei de unda cu analizorul ION 8800



Analiza Armonică

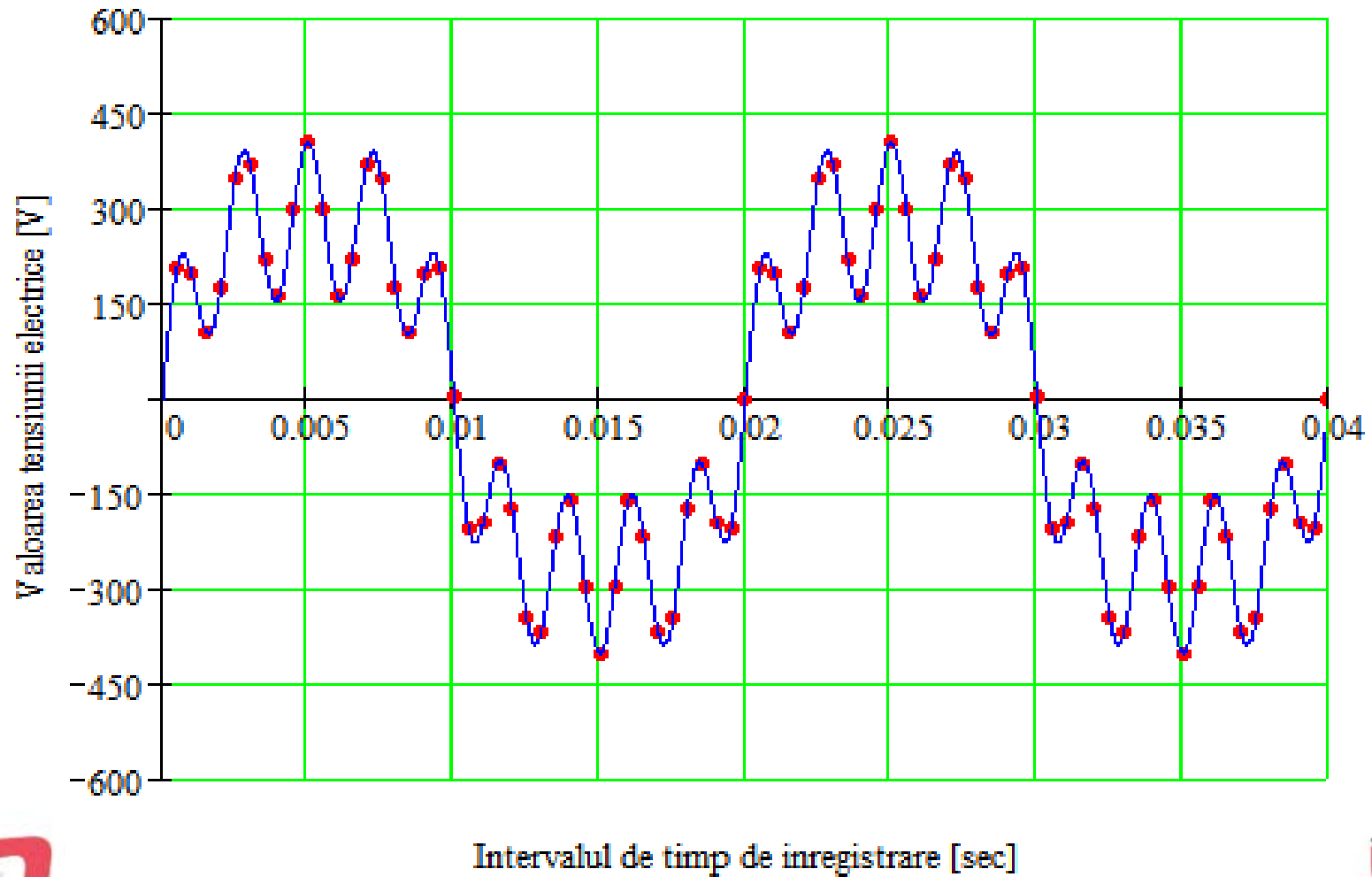


Reconstrucția formei de undă

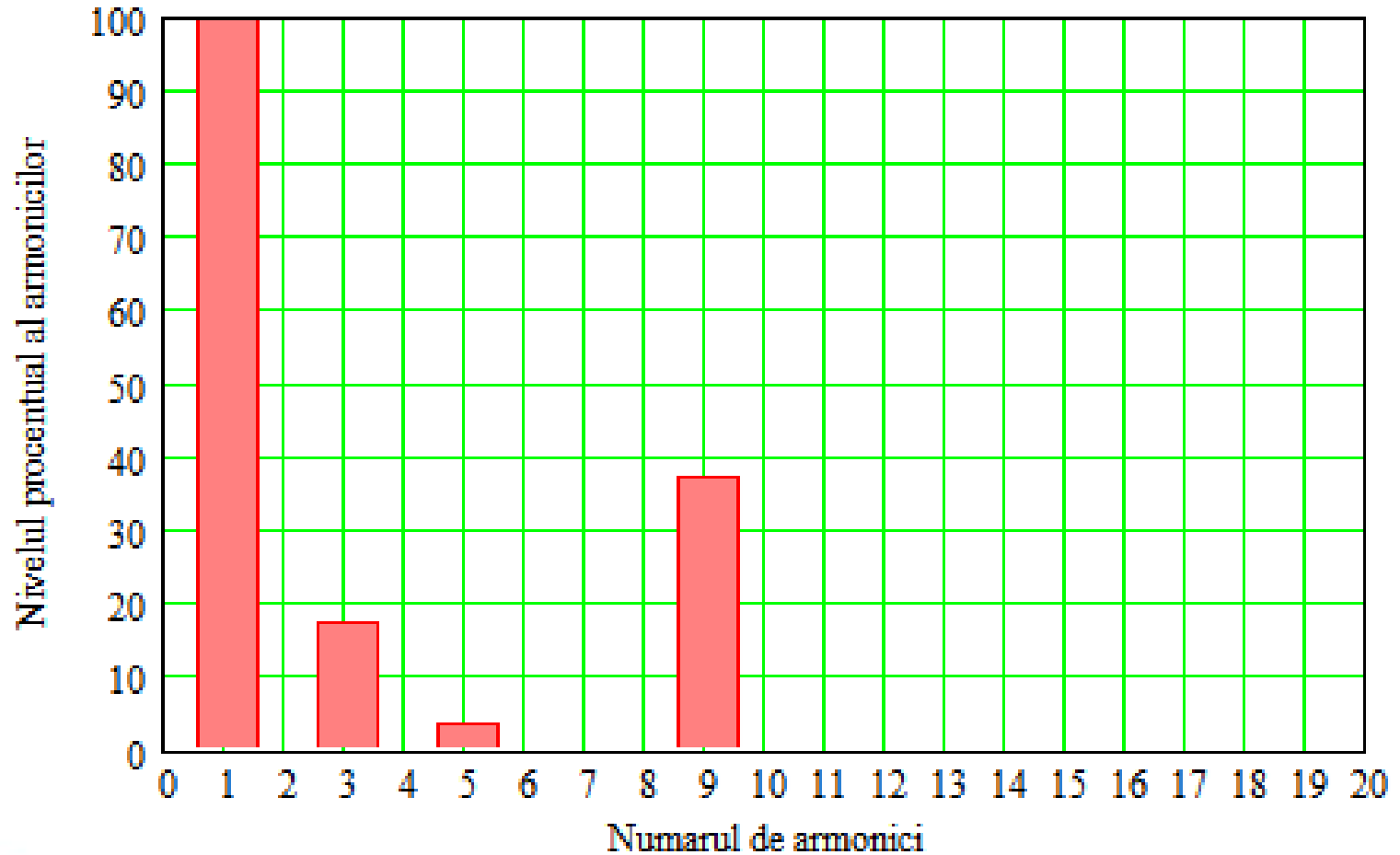


Studiu de Caz III

Inregistrarea formei de unda cu analizorul ION 8800



Analiza Armonică



Reconstrucția formei de undă

