Curs 7 - 8

Interpolarea Funcțiilor Numerice cu Aplicații în Ingineria Electrică

Ș.l. Dr. ing. **Levente CZUMBIL**
Laboratorul de Cercetare în Metode Numerice
Departamentul de Electrotehnică, Inginerie Electrică
E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro Site: http://users.utcluj.ro/~czumbil
UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Exemple de aplicaţii din ingineria electrică

❖ **Amplasarea tablourilor de distribuţie a energiei electrice** într-o construcţie industrială se face în faza proiectării instalaţiei electrice, pe baza determinării momentelor minime ale curenţilor ceruţi.

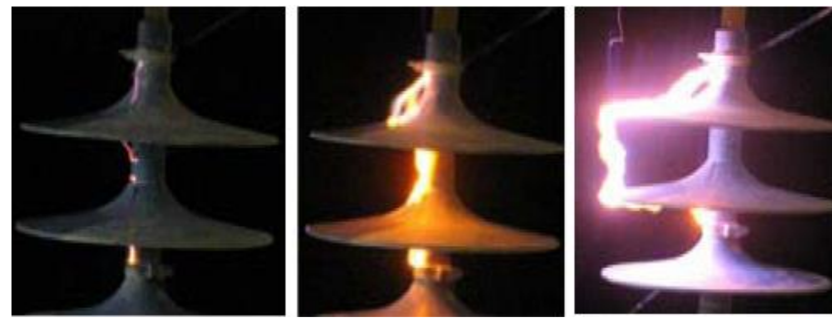
În relaţiile de calcul a acestor momente ale curenţilor ceruţi în instalatie, intră coeficientul numit: de influenţă. Acest coeficient este determinat experimental in cateva valori in functie de numarul receptoarelor.

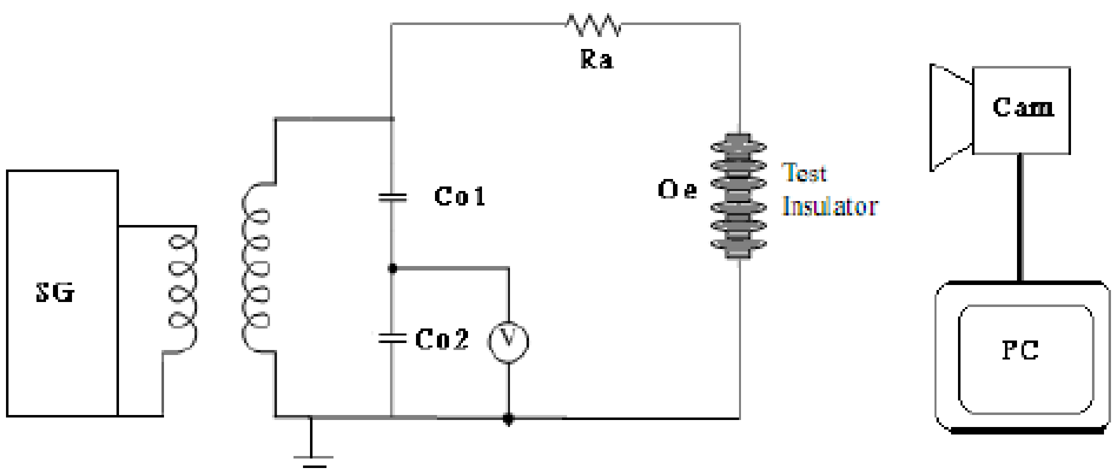
$$n = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 9 & 10 & 12 & 15 & 17 & 20 & 22 & 24 & 25 & 27 & 30 & 33 & 35 & 40 \end{pmatrix}$$

$$k_a = \begin{pmatrix} 1 & 1.4 & 1.8 & 2.35 & 2.5 & 3 & 3.4 & 4 & 4.5 & 5.1 & 5.8 & 6 & 6.35 & 6.9 & 7.2 & 8 & 8.5 & 9.2 \end{pmatrix}$$

❖ **Testarea izolatorilor liniilor electrice aeriene.** În faza de fabricaţie a izolatorilor siliconici de pe liniile electrice aeriene, testarea rezistenţei superficiale a acestora reprezintă *o problemă de importanţă considerabilă*!

Metoda de testare presupune alimentarea bornelor unui izolator cu o tensiune ridicată şi efectuarea mai multor măsurători de încercare, până la străpungerea izolaţiei, conform schemei electrice de principiu.





❖ **Stabilirea cantităţilor de energie consumate,** pe baza înregistrărilor de putere – curba de sarcină zilnică (prelucrarea curbelor de sarcină prin interpolare).

Se consideră un receptor de energie electrică pentru care se cunoaşte curba de sarcină zilnică referitoare la puterea activă consumată.

t [h]	P [MW]
0	1,42
2	1,06
4	2,17
6	2,83
8	2,75
10	2,67
12	2,59
14	2,55
16	2,57
18	2,84
20	3,43
22	3,02
24	1,53

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Exemple de aplicaţii din ingineria electrică

❖ Încărcarea inteligentă a vehiculelor electrice – **“smart charging”**, pentru mentinerea echilibrului în sistemele de distributie a energiei.

❖ **Aproximarea curbelor de magnetizare** corespunzătoare fenomenului de fero-rezonanţă - poate genera supratensiuni şi supracurenţi în sistemele energetice.

❖ Stabilirea caracteristicii flux – curent în proiectarea senzorilor de câmp magnetic; Aplicaţii: **detectarea conductelor metalice, detecţia submarinelor, măsurători geofizice**.

❖ **Interpretarea rezultatelor pneumografiei** (tomografie pulmonară), aplicată pacienţilor din zonele miniere; pune în evidenţă prezenţa prafului feromagnetic.

❖ Studiul descreşterii cu temperatura a rezistenţei înfăşurărilor maşinilor electrice utilizate în pompajul fluidelor criogenice; Aplicaţii: **transportul gazelor naturale sub formă lichidă**;

Introducere

➢ În aplicaţiile din domeniul electrotehnic nu se cunoaşte **expresia analitică a funcţiei** care trebuie aproximată ci doar **valorile ei într-un anumit număr de puncte** (tabelate - obţinute din calcule sau **măsurători experimentale**) urmărindu-se *determinarea aproximativă a valorilor corespunzătoare unor alte puncte* ***diferite*** *de cele date.*

➢ Aproximarea unei funcţii exprimată analitic sub forma unor formule explicite, implicite sau parametrice, sub forma unor serii, sau a unui algoritm se face cu scopul **simplificării calculelor de evaluare** a mărimii funcţiei , a **derivatelor** acesteia sau a **integralei definite**.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

- Evaluarea unei funcţii **definită sub formă numerică** (dată **tabelar**) în urma unor **măsurători experimentale**, presupune aproximarea ei (interpolarea) în intervalele dintre nodurile reţelei în orice punct al domeniului de definiţie.

- Cea mai simplă metodă de interpolare a unei funcţii definită sub formă numerică prin coordonatele (x_i, y_i) ale unor puncte numite **noduri**, constă în **aproximarea funcţiei cu un polinom** pentru a putea fi prelucrată în continuare (interpolare, derivare, integrare etc) evaluarea funcţiei reducându-se la operaţii aritmetice elementare (adunări şi înmulţiri).

- Se măsoară la momente discrete $\mathbf{x_0, x_1 \ldots, x_n}$ (noduri), valorile unor funcţii f(x) şi se pune problema de a găsi valorile sale în alte puncte diferite de noduri.

Forma Generală a Polinoamelor de Interpolare

Funcţia de aproximare este de forma:

$$f(x) \cong g(x; a_0, a_1, \ldots, a_n)$$ - model matematic.

- Interpolare Liniară

$$g(x, a_0, \ldots, a_n) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \ldots + a_n g_n(x)$$

- Interpolare Polinomială

$$g(x; a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

- Interpolare Trigonometrică

$$g(x; a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 e^{xi} + a_2 e^{2xi} + \ldots + a_n e^{nxi}, i = \sqrt{-1}$$

- Interpolare Raţională

$$g(x; a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Dacă nu există informaţii asupra problemei tehnice care a generat *modelul matematic*, atunci cel mai des se utilizează pentru ***interpolare polinoame***!

Avantaje:

- valoarea polinoamelor se calculează uşor;
- sumele, diferenţele, produsele de polinoame au ca rezultat polinoame;
- prin derivare şi integrare (care se fac uşor), rezultă tot polinoame;
- teoria interpolării polinomiale este simplă şi bine pusă la punct.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

I. Aproximarea prin Funcţii Polinomiale

Se porneşte de la teorema lui Weierstrass:

Fie *f* o funcţie definită şi continuă pe intervalul $[a,b]$, $f \in C_{[a,b]}$,

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, p_n(x)$ polinom de gradul *n* $\forall x \in [a,b]$ $|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$

➢ În **aplicaţiile electrotehnice** alegerea **funcţiei de aproximare** se bazează şi pe cunoaşterea formei funcţiei care trebuie aproximată ţinând cont de informaţiile asupra **aplicaţiei practice** care a generat **modelul matematic.**

➢ Problema care se pune este **determinarea polinomului $p_n(x)$** care satisface relaţia de mai sus.

$$x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b] \rightarrow f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n),\ x_i \neq x_j, i \neq j$$

$$p_n(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0,n}$$

Demonstraţie pe tablă:

Unicitatea Polinomului de Interpolare

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Se numeşte **polinom de interpolare** asociat tabelului de valori un polinom ***p*** de grad mai mic sau egal cu ***n***, cu coeficienţi reali astfel încât:

$$p(x_i) = y_i$$

are loc formula aproximativă:

$$f(x) \cong p(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$f(x_i) = p(x_i) = y_i, \quad i \in [0, n]$$

unde ***p(x)* este unic** pentru un tabel dat iar ***f*** şi ***p*** au aceleaşi valori în nodurile fixate.

Observaţie:

Polinomul p(x) permite calculul valorilor sale şi în punctele $x \neq x_i$

deci între noduri, ceea ce justifică denumirea de **interpolare.**

Problema interpolării presupune parcurgerea etapelor:

- **determinarea coeficienţilor polinomului de interpolare** prin rezolvarea unui sistem liniar de ecuaţii algebrice;
- **evaluarea polinomului** de interpolat.

Această variantă de interpolare poate fi aplicată doar pentru valori mici ale gradului polinomului (***n<5***) deoarece are ***două mari dezavantaje***:

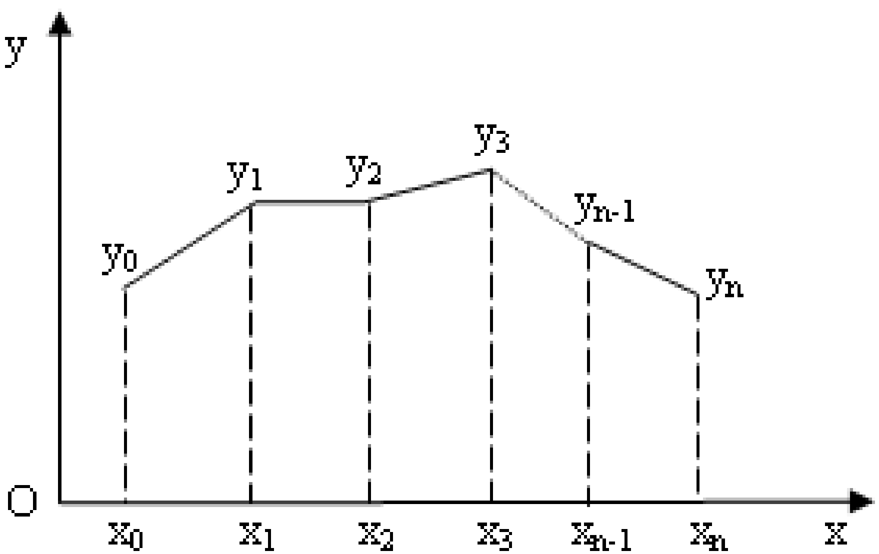
- **Efort de calcul mare** pentru determinarea coeficienţilor (Cramer);
- **Erorile soluţiei sunt mari** deoarece sistemul poate fi **rău condiţionat** pentru valori mari a gradului polinomului.

II. Interpolarea Lagrange

- Metoda de interpolare bazată pe **polinomul de interpolare Lagrange elimină dezavantajele** metodei clasice de interpolare polinomială, în schimb **timpul** necesar evaluării polinomului de interpolare **crește** de la ordinul liniar *O(n)* la cel pătratic ***O(n²)*.**

Fie o funcţie f(x) definită pe [a,b], ale cărei valori y_i sunt cunoscute numai în nodurile

$$x_i,\ y_i = f(x_i)\ \mathrm{i} \in [0, \mathrm{n}]$$ - interpolare liniară



Polinomul de interpolare Lagrange

x_i - noduri de interpolare

x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	…	y_n

Tabel de valori - din măsurători experimentale

Se construieşte **polinomul de interpolare Lagrange** de grad cel mult ***n***:

$$L_n(x) \overbrace{=}^{not} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x)$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

$$L_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x_k) = y_k = f(x_k)$$

Deci ***$L_n(x)$*** este polinomul Lagrange de interpolare asociat tabelului de valori

x	x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

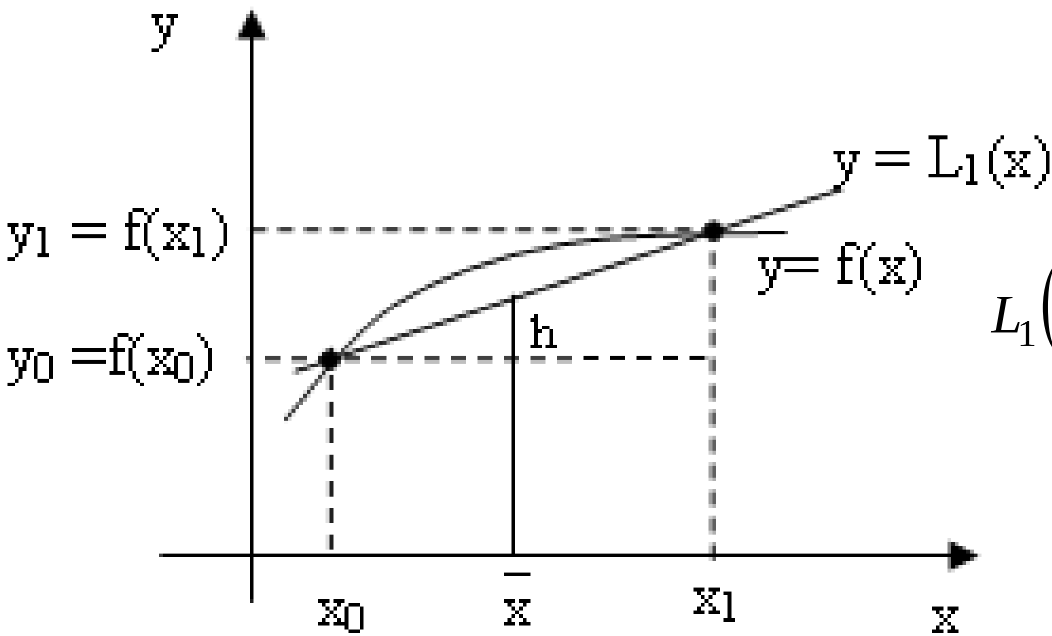
Funcția ***f*** şi polinomul ***L_n***
au aceleaşi valori în nodurile fixate!!!

Demonstrație pe tablă:
Forma polinomului elementar l_i

Demonstrație pe tablă:

Exemplificarea unei interpolari Lagrange de gradul I

Dacă ***n=1*** atunci se cunoaşte funcţia în două noduri $x_0, x_1 \rightarrow f(x_0), f(x_1)$



$$L_1(\bar{x}) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (\bar{x} - x_0)$$

Interpolarea Lagrange de ordinul I

- ***$L_1(x)$*** este polinomul Lagrange unic care trece prin punctele **(x_0,y_0)** şi **(x_1,y_1)** şi aproximează funcţia ***f(x)*** pe intervalul **[x_0, x_1]**.

- **Generalizare:** polinom de grad cel mult ***n*** care trece prin ***n+1*** puncte în care funcţia se cunoaşte!

Exemplu de aplicare a Polinomului Lagrange

$$f(x) = e^{x} \qquad \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\} \quad \text{- noduri}$$

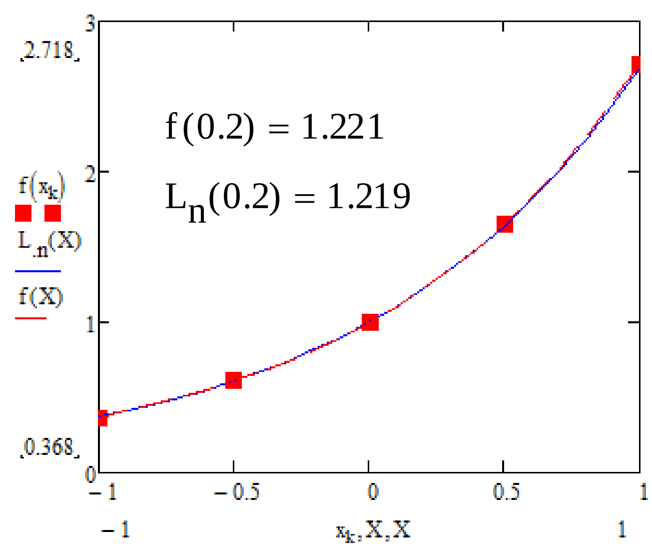
Se interpolează pe intervalul [-1,1] funcţia dată prin polinomul Lagrange $\boldsymbol{L_n(x)}$:

$$L_n(x) = \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot(x-0)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-1)}{\left(-1+\frac{1}{2}\right)\cdot(-1-0)\cdot\left(-1-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1-1)}\cdot e^{-1} + \frac{(x+1)\cdot(x-0)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-1)}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-0\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)}\cdot e^{-\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{(x+1)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-1)}{(0+1)\cdot\left(0+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(0-\frac{1}{2}\right)\cdot(0-1)}\cdot e^{0} + \frac{(x+1)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot(x-0)\cdot(x-1)}{\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-0\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}\cdot e^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{(x+1)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot(x-0)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(1+1)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot(1+0)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)}\cdot e^{1}$$

$$L_n(x) = 1.0 + 0.99\cdot x + 0.49\cdot x^2 + 0.17\cdot x^3 + 0.04\cdot x^4$$



Exemplu de aplicare a Polinomului Lagrange

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \{x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 4\}$$

Se interpolează pe intervalul [1,5] funcţia dată prin polinomul Lagrange de ordinul II:

$$l_0(x) = \frac{(x-2.5)\cdot(x-4)}{(2-2.5)\cdot(2-4)} = (x-6.5)x+10$$

$$l_1(x) = \frac{(x-2)\cdot(x-4)}{(2.5-2)\cdot(2.5-4)} = \frac{(-4x+24)x-32}{3}$$

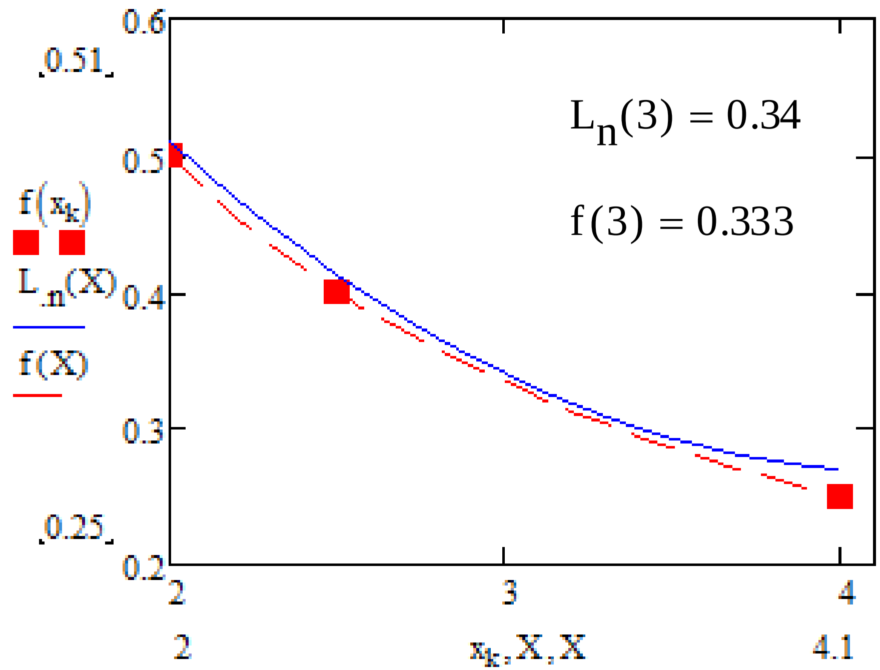
$$l_2(x) = \frac{(x-2)\cdot(x-2.5)}{(4-2)\cdot(4-2.5)} = \frac{(x-4.5)x+5}{3}$$

$$f(x_0) = f(2) = 0.5;$$
$$f(x_1) = f(2.5) = 0.4;$$
$$f(x_2) = f(4) = 0.25$$

$$P(x) = L_2(x) = \sum_{i=0}^{2} l_i(x)\cdot f(x_i)$$
$$= (0.05x-0.42)\cdot x + 1.15$$

O aproximaţie pentru $f(3) = \frac{1}{3} = 0.333$

este: $f(3) \cong L_2(3) = 0.34$



Polinoame de interpolare de tip Lagrange

Fie un interval [*a*,*b*] în care se cunosc un set de valori *x(i)* cărora le corespunde în mulţimea numerelor reale un alt set de valori *y(i)*. Se cere să se determine relaţia de dependenţă între cele două seturi de numere utilizând polinomul de interpolare de tip Lagrange şi să se traseze graficul aferent acesteia pe intervalul [*a*,*b*].

Pasul 1. Se definesc limitele intervalului de studiu [*a*,*b*], numărul de puncte intermediare şi pasul de parcurgere a acestui interval.

$$a := 0 \qquad b := 10 \qquad N := 50 \qquad h := \frac{b-a}{N} \qquad h = 0.2$$

Pasul 2. Se definesc șirurile de valori *x(i)* și *y(i)* având *N* elemente. Elementele celor două şiruri se definesc utilizându-se „[” pentru a indica indexul *i* al şirurilor:

$$i := 0..N \qquad x_i := a + h \cdot i \qquad y_i := \frac{i^2 - 3}{N}$$

Pasul 3. Se definește coeficientul diferență dintre două elemente x_i, x_j cunoscute folosindu-se instrucțiunea condițională ***IF*** sub forma unui șir cu *N* elemente. Acest coeficient ia valoarea 1 dacă diferența se face între acelaș element *i*=*j*:

$$j := 0..N \qquad coef_i := \prod_j \left[if\left[(i = j), 1, \left(x_i - x_j\right)\right]\right]$$

Polinoame de interpolare de tip Lagrange

Pasul 4. Se definește un polinom intermediar de ordin *N+1* care are soluții, elementele șirului *x(i)*:

$$\mathrm{intermediar}(z) := \prod_{j} \left(z - x_j\right)$$

Pasul 5. Pe baza acestui polinom intermediar și a șirului de coeficienți diferență se definesc funcțiile de baza ce intră în definirea polinomului Lagrange. Această funcție ia valoarea 1 pentru orice element din șirul *x(i)*:

$$l(i,z) := \mathrm{if}\left[z = x_i, 1, \frac{\mathrm{intermediar}(z)}{\left(z - x_i\right)\cdot \mathrm{coef}_i}\right]$$

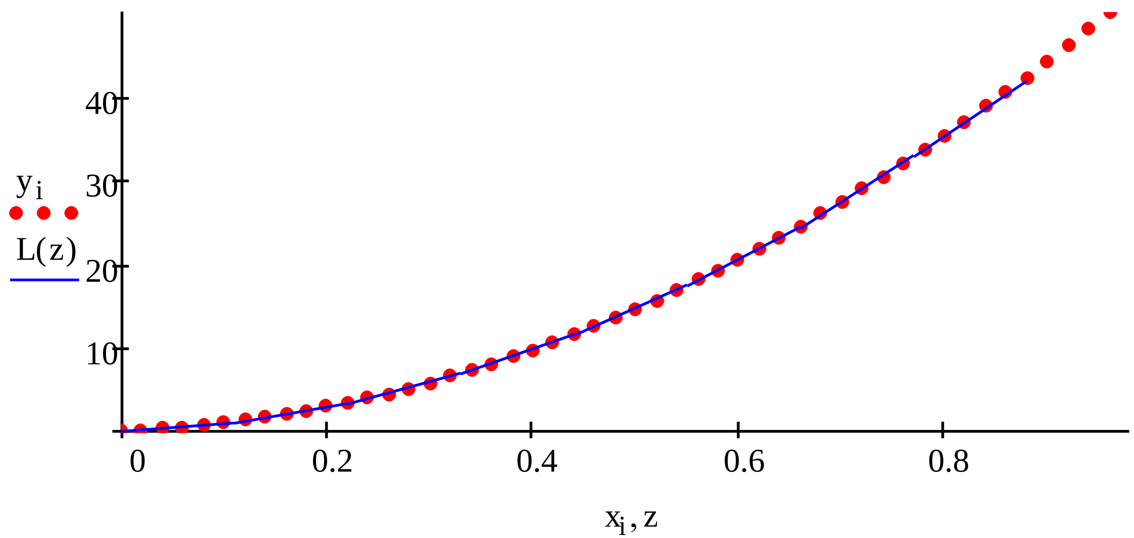
Pasul 6. Însumând aceste funcții de bază ponderate de elementele șirului *y(i)*, se obține polinomul Lagrange ce interpolează funcția de legătură, *f(z)*, dintre cele două șiruri *x(i)* și *y(i)* pe intervalul [*a*,*b*]:

$$L(z) := \sum_{i} \left(l(i,z)\cdot y_i\right)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Pasul 7. În final se face reprezentarea grafică a polinomului de interpolare *L(z)* pe intervalul [*0*,*0.9*] dorit şi valorile date tabelar y_i.

$$z := 0, 0.11 .. 0.9$$



Comentarii asupra Metodelor Numerice de Interpolare Utilizate

Polinomul de interpolare de tip Lagrange

- Polinomul de interpolare Lagrange permite calculul valorilor sale şi în dintre noduri, ceea ce justifică denumirea de interpolare;

- Eroarea aproximării este dificil de estimat, necesitând cunoaşterea valorilor derivatei de ordinul $n+1$;

- Se elimină dezavantajele metodei clasice de interpolare polinomială adică efort de calcul mare şi erori mari ale soluţiei;

- Funcţiile de bază $l_i(x)$ se aleg astfel încât să se anuleze în n puncte;

- Timpul necesar evaluării polinomului de interpolare creşte de la ordinul liniar $O(n)$ la cel pătratic $O(n^2)$;

- Are acurateţe a aproximaţiei pe întreg intervalul.

Polinoame de interpolare de tip Spline

Metodele de aproximare cu funcţii spline utilizează porţiuni de polinoame $P_n(x_i)$ de gradul *m*, mult mai mic decât numărul de puncte în care se cunoaşte valoarea lui $f(x)$. Coeficienţii funcţiilor spline rezultă din condiţii de forma $P_n(x_i) = y_i = f(x_i), i = \overline{0,n}$, la care se adaugă şi cele legate de egalitatea valorilor derivatelor segmentelor de polinoame în punctele date.

Termenul de spline (engleză: dispozitiv pentru trasarea curbelor netede) a fost introdus pentru a desemna o funcţie formată din mai multe polinoame, definite pe intervale adiacente şi care se racordează între ele împreună cu un număr de derivate ale acestora.

Se utilizează funcţii de aproximare de tip spline liniare, parabolice şi cubice.

- **lspline**
- **pspline**
- **cspline**

În timpul unui experiment de laborator, se execută niște măsurători în punctele $\mathbf{x_i}$, care aparțin vectorului **X**. Rezultatele măsurătorilor $\mathbf{y_i}$ se trec în vectorul **Y**. Folsind datele din tabelul de mai jos pentru **X** și **Y**, să se ridice caracteristica **Y=f(X)**, **interpolând rezultatele**.

Pasul 1. Se definesc vectori X și Y:

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \\ 24 \\ 45 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Polinoame de interpolare de tip Spline

Pasul 2. Se construiește un vector auxiliar, necesar interpolării, folosind comanda **spline**. Funcția de interpolare **interp** din Matchad construiește un polinom de interpolare, folosind coeficienții din acest vector auxiliar.

Vectorul auxiliar poate fi construit prin chemarea funcției **lspline** (linear), **cspline** (cubic) sau **pspline** (parabolic). Conform acestuia, coefcienții o să fie calculați utilizând o funcție **liniară** ori una **parabolică** ori una **cubică**.

Se definesc cele trei vectori M_1, M_2 și M_3, utilizâd funcțiile **lspline**, **pspline** și **cspline**, pe rând. Se afișează rezultatele.

$$M_1 := \mathrm{lspline}(X, Y)$$

$$M_2 := \mathrm{pspline}(X, Y)$$

$$M_3 := \mathrm{cspline}(X, Y)$$

Aproximarea folosind de interpolare spline

Pasul 3. Se apelează funcția **interp**, pentru fiecare vector de coefcienți recent calculați.

funcția **interp** are 4 arguemente: **interp(M,X,Y,z)**

- M: vectorul de coeficienți
- X: vectorul nodurilor de interpolare
- Y: vectorul rezultatelor determinate experimental
- z: variabila de funcție

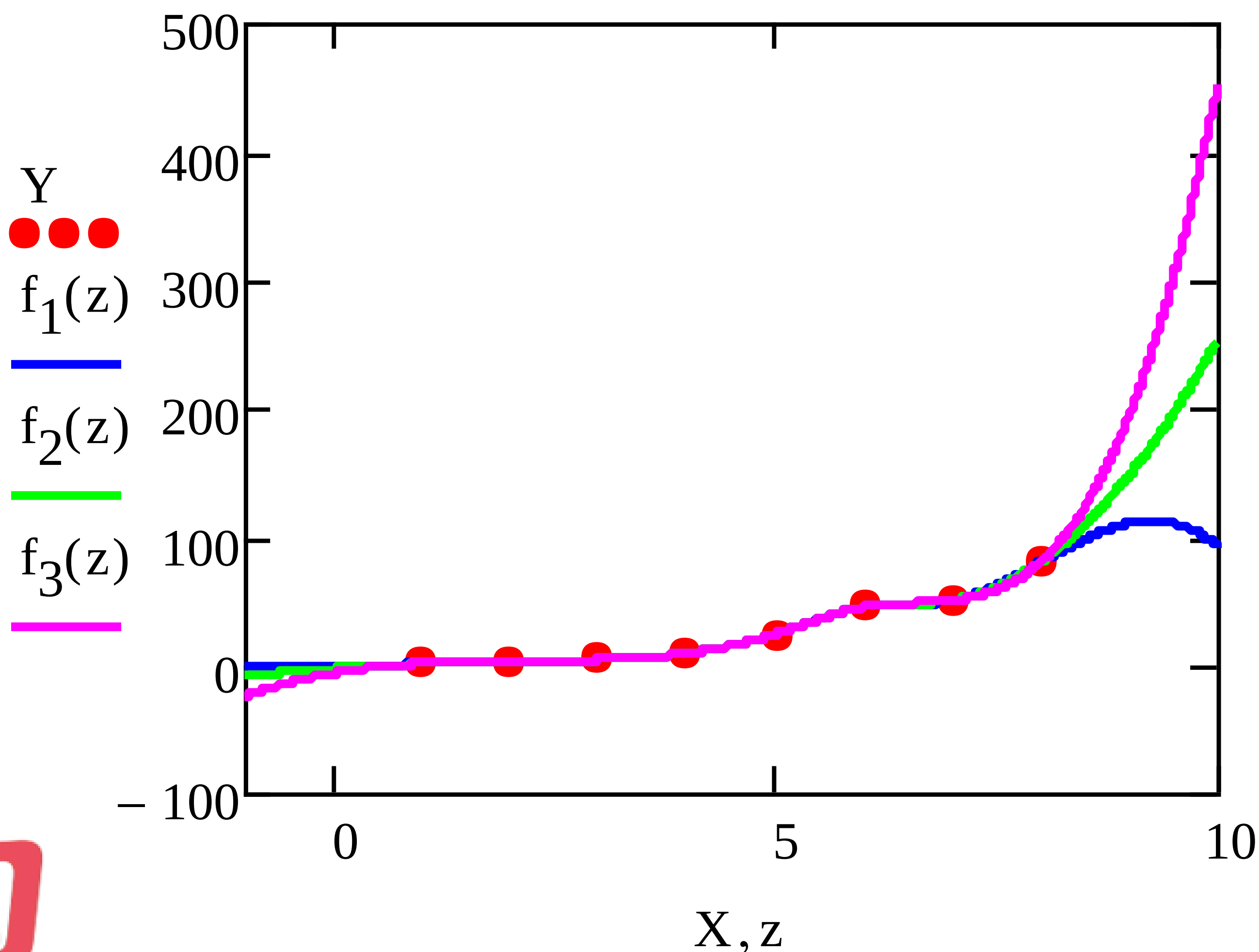
$$f_1(z) := \mathrm{interp}\left(M_1, X, Y, z\right)$$

$$f_2(z) := \mathrm{interp}\left(M_2, X, Y, z\right)$$

$$f_3(z) := \mathrm{interp}\left(M_3, X, Y, z\right)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Pasul 4. Se reprezintă grafic cele trei funcții obținute și tabelul de valori. Limitele da afișare pentru axa OX se setează de la -1 la 10.



Aproximarea folosind de interpolare spline

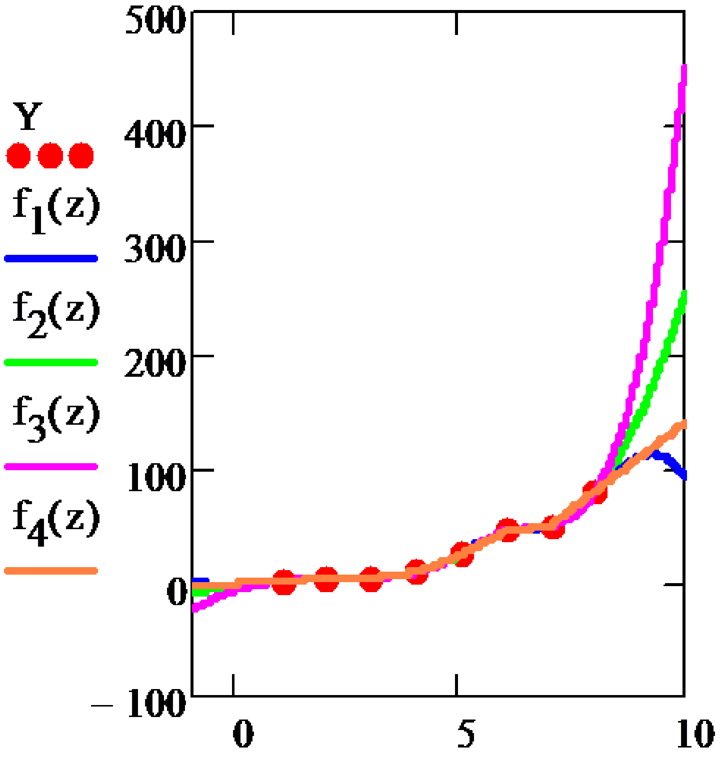
Pasul 5. Folosind funcția **linterp** două puncte consecutive se conectează prin intermediul unei linii.

funcția **linterp** are 3 arguemente: **linterp(X,Y,z)**

- X: vectorul nodurilor de interpolare
- Y: vectorul rezultatelor determinate experimental
- z: variabila de funcție

$$f_4(z) := \mathrm{linterp}(X, Y, z)$$

Pasul 6. Se reprezintă grafic funcția obținută prin **linterp**. Pe un alt grafic se compară cu funcțiile obținute prin utilizarea comenzilor **spline** și **interp**. Limitele da afișare pentru axa OX se setează de la -1 la 10.



Aproximarea folosind de interpolare spline

Pasul 7. Se compară cu rezultatul obținut plin **linterp** și rezultatul obținut prin **lspline -> interp**. Limitele da afișare pentru axa OX se setează de la 4,5 până la 8,5.