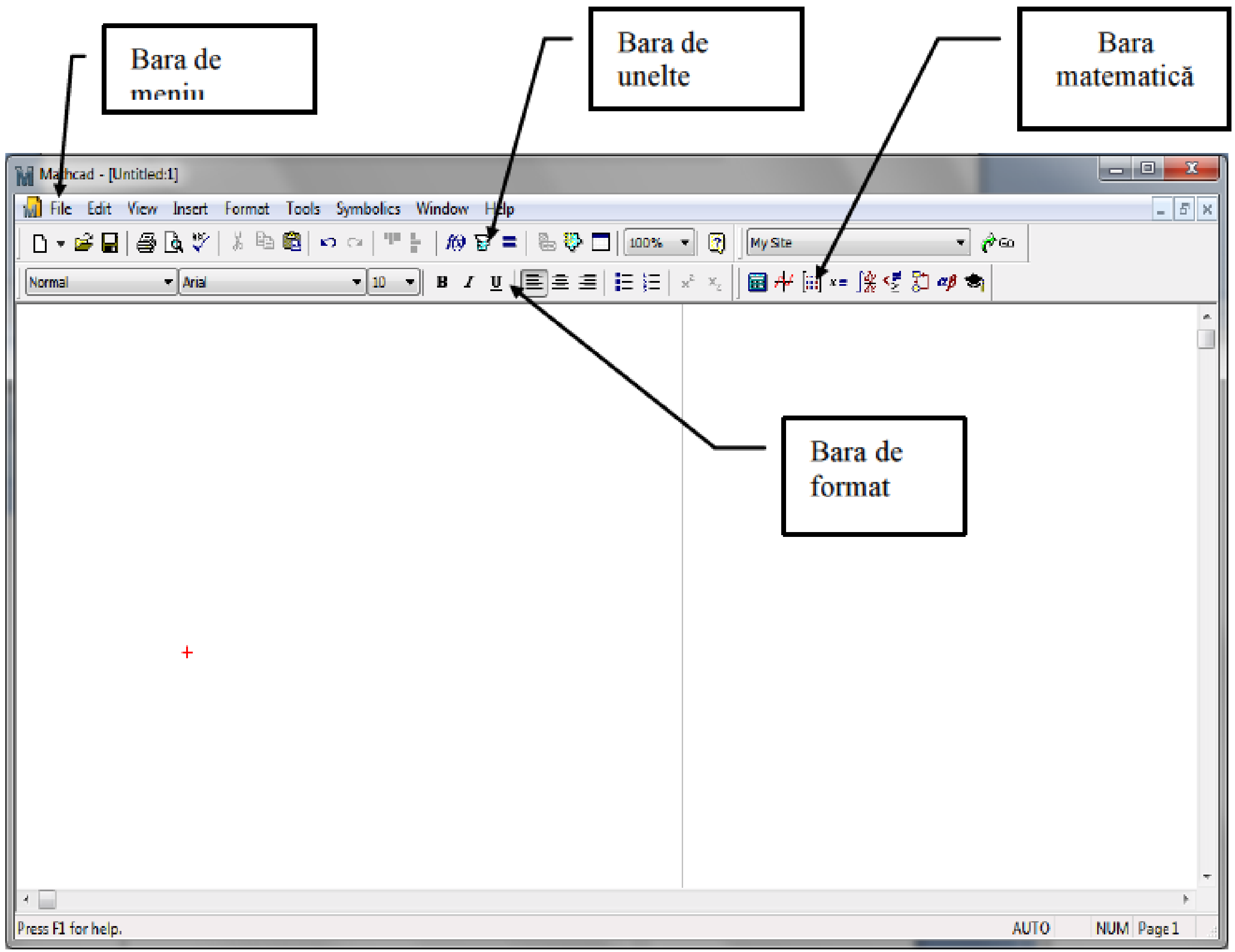
Rezolvarea Aproximativă a Ecuațiilor Algebrice și Transcendente

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

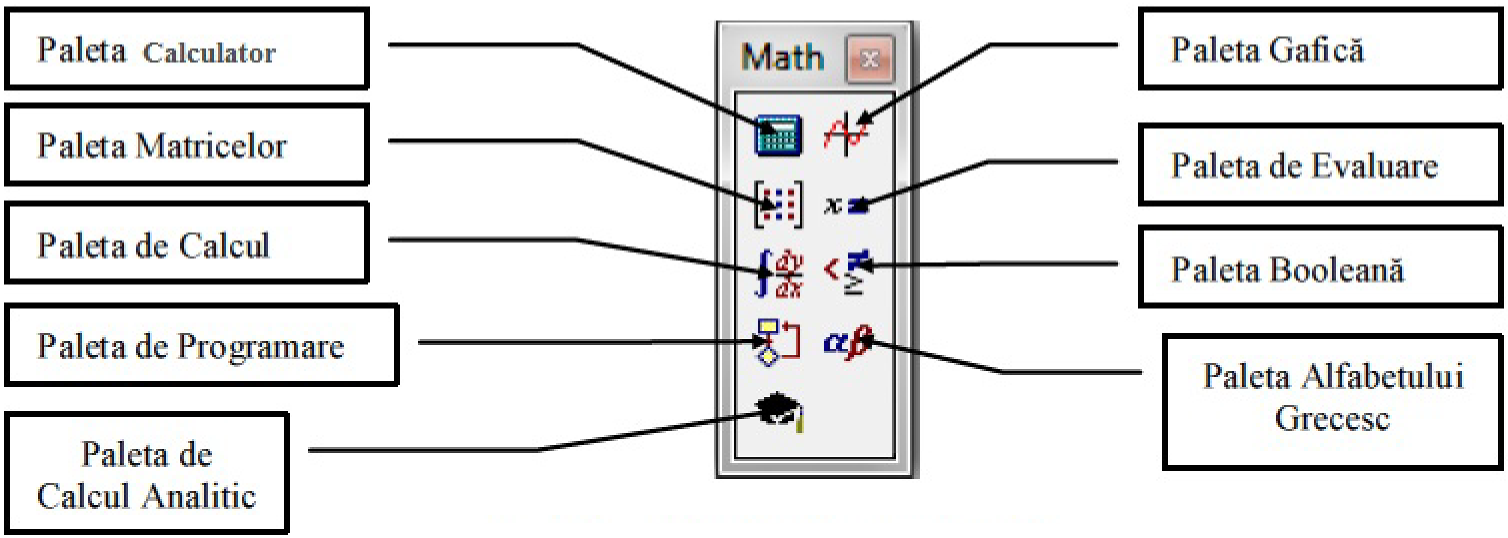
Laboratorul de Cercetare în METODE NUMERICE
NUMERICAL METHODS Research Laboratory
Technical University of Cluj-Napoca

Ș.l. Dr. ing. **Levente CZUMBIL**
E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro
WebPage: http://users.utcluj.ro/~czumbil

Introducere în Mathcad



Paleta *Math*



UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Introducerea datelor

- Utilizarea Semului ”Egal”

  - Egal de atribuire := (tasta :)
  - Egal de evaluare = (tasta =)
  - Egal boolean **=** (tasta Ctrl =)

- Nu este necesar declararea variabilelor în prealabil

~~var i,x,n:integer~~

- Se poate da click oriunde în fereastra de comandă pentru a repoziționa cursorul +

- După introducerea comenzilor se poate tasta ↵ sau se poate da click în afara căsuței de introducere a comenzilor

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Introducerea datelor

Afișaj Mathcad	Tastele introduse	Observații
$a := 4$	a : 4 ↵	Se atribuie variabilei *a* valorea 4
$b := 5$	b : 4 ↵	Se atribuie variabilei *b* valorea 5
$a + b = 9$	a + b = ↵	Se afișează suma celor două numere
$x_1 := \sqrt{3}$	x . 1 : \ 3 ↵	Se atribuie variabilei x_1 valorea √3
$x_2 := \dfrac{x_1}{a + b}$	x . 2 : / x . 1 → a + b ↵	
$x_2 = 0.192$	x . 2 =	Indicii care sunt folosiți pentru denumirea unor variabile se numesc indici formali și se introduc utilizând tasta punct .

Introducerea șirurilor

Afișaj Mathcad	Tastele introduse	Observații
$x := 0 .. 2$ $\quad x = \begin{array}{|r|}\hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array}$	x : 0 ; 2 ↵ x =	Pasul implicit la definirea unui șir este 1
$x := -8, -7.9 .. -7$ $\quad x = \begin{array}{|r|}\hline -8 \\ \hline -7.9 \\ \hline -7.8 \\ \hline -7.7 \\ \hline -7.6 \\ \hline -7.5 \\ \hline -7.4 \\ \hline -7.3 \\ \hline\end{array}$	x : - 8 , - 7 . 9 ; - 7 ↵ x =	Se poate schimba pasul șirului prin introducerea elementului al doilea. Diferența dintre primul și al doilea element va desemna atât pasul pentru toate elementele șirului cât și direcția acestuia.

Metoda Grafică de rezolvare a ecuațiilor

Această metodă constă în **reprezentarea grafică a funcției** și citirea datelor direct de pe grafic. Cu ajutorul **instrumentului zoom**, se mărește o porțiune din grafic și se citesc **coordonatele** punctului în care graficul intersectează axa Ox, adică se determină o rădăcină pentru funcția reprezentată grafic.

Se consideră ecuația: $4x^3 + e^{2x} - 16 = 0$ Să se determine o soluție a acesteia.

Pasul 1. Se introduce ecuația în *Mathcad*. La introducerea ecuațiilor se folosește **egalul boolean**. (Ctrl =)

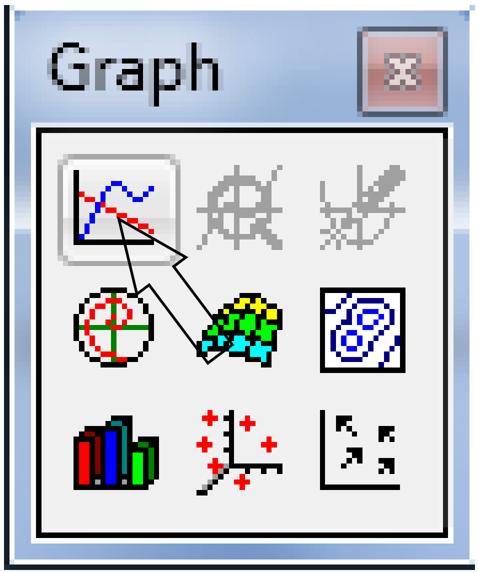
$$4x^3 + e^{2x} - 16 = 0$$

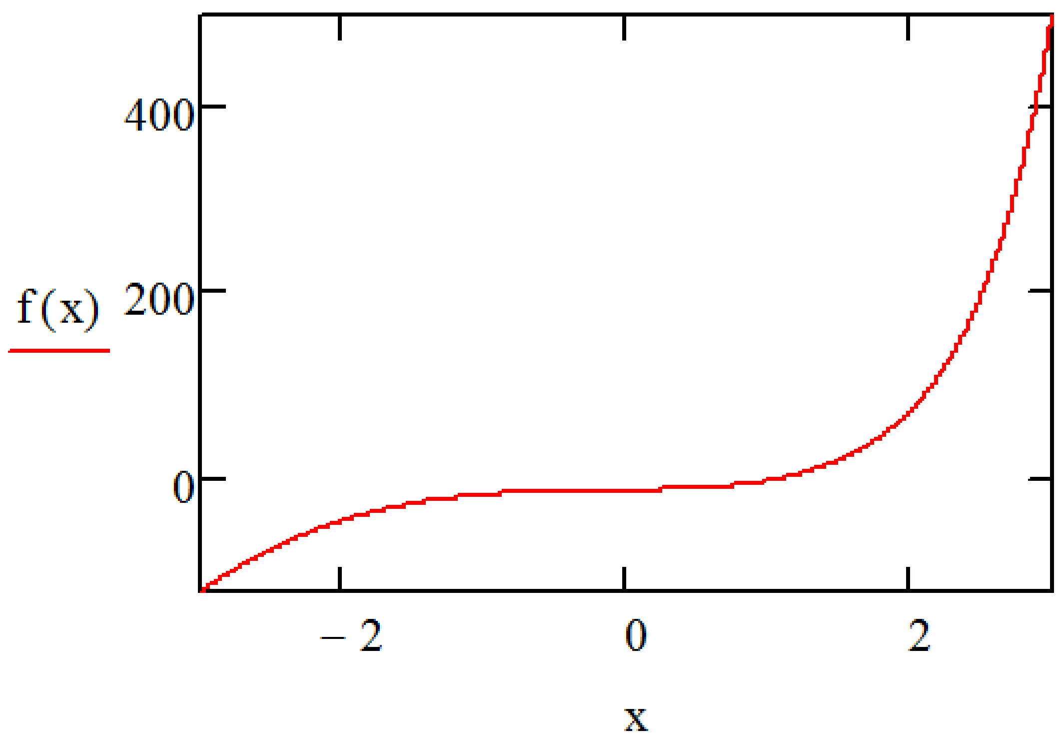
Pasul 2. Se definește funcția atașată ecuației. La definirea funcției se folosește operatorul de atribuire (:=)

$$f(x) := 4x^3 + e^{2x} - 16$$

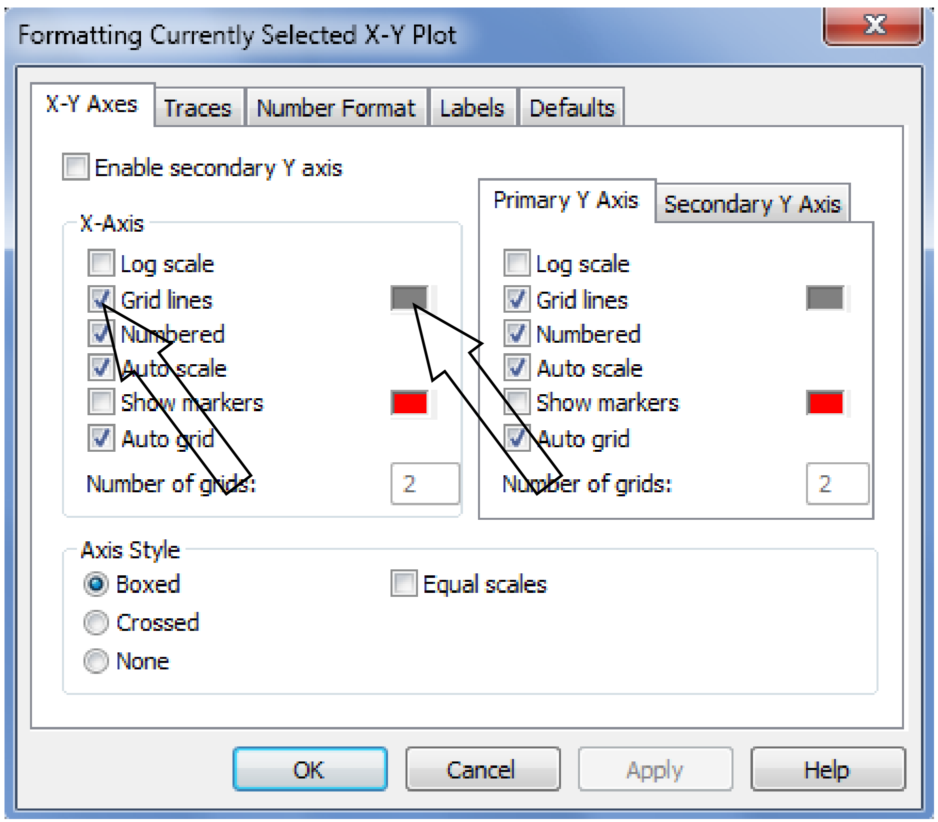
Pasul 3. Se reprezintă grafic funcția f(x) de la -3 până la 3, cu o un pas de 0,01. Graficul se introduce cu ajutorul toolbar-ului *Graph*. Se selectează *X – Y Plot* (Shortcut @)

$$x := -3, -2.995 .. 3$$



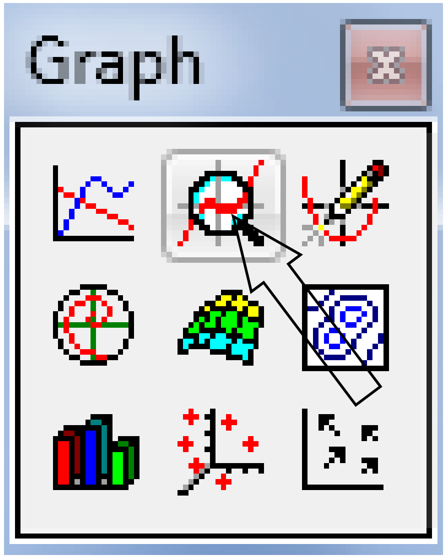


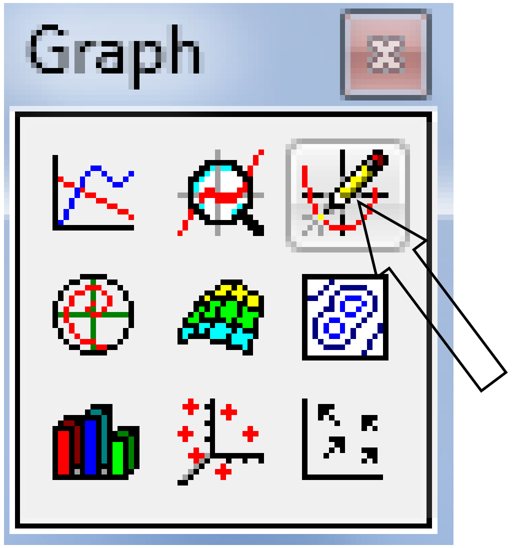
Pasul 4. Făcând dublu-click pe grafic se pot edita proprietățile acestuia. Se setează afișarea grilei pe ambele axe, cu o culoare gri, bifând căsuța din stânga lui *Grid lines*, pe ambele axe. Facând click pe culoare în dreapta *Grid lines*, se poate edita culoarea linilor grilei.



Pasul 5. Se caută rădăcina ecuației – adică **locul unde graficul funcției intersectează axa Ox** – cu ajutorul comenzii *Zoom*. Cu graficul selectat, din toolbar-ul *Graph* se selectează *Zoom*.

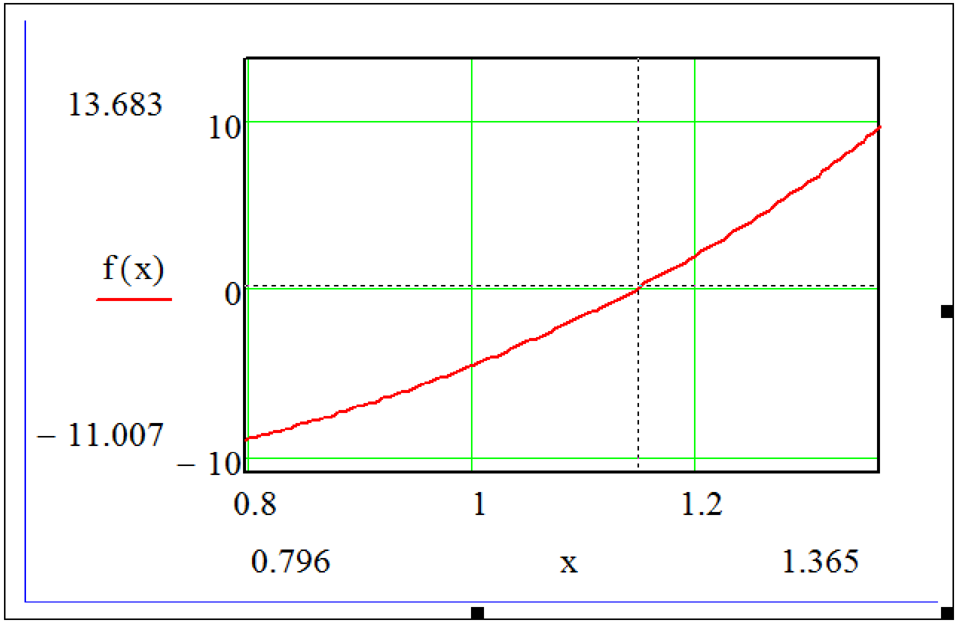
Valoarea lui x se citește direct de pe axa Ox, ori se utilizează mijlocul *Trace* din toolbar-ul *Graph*.

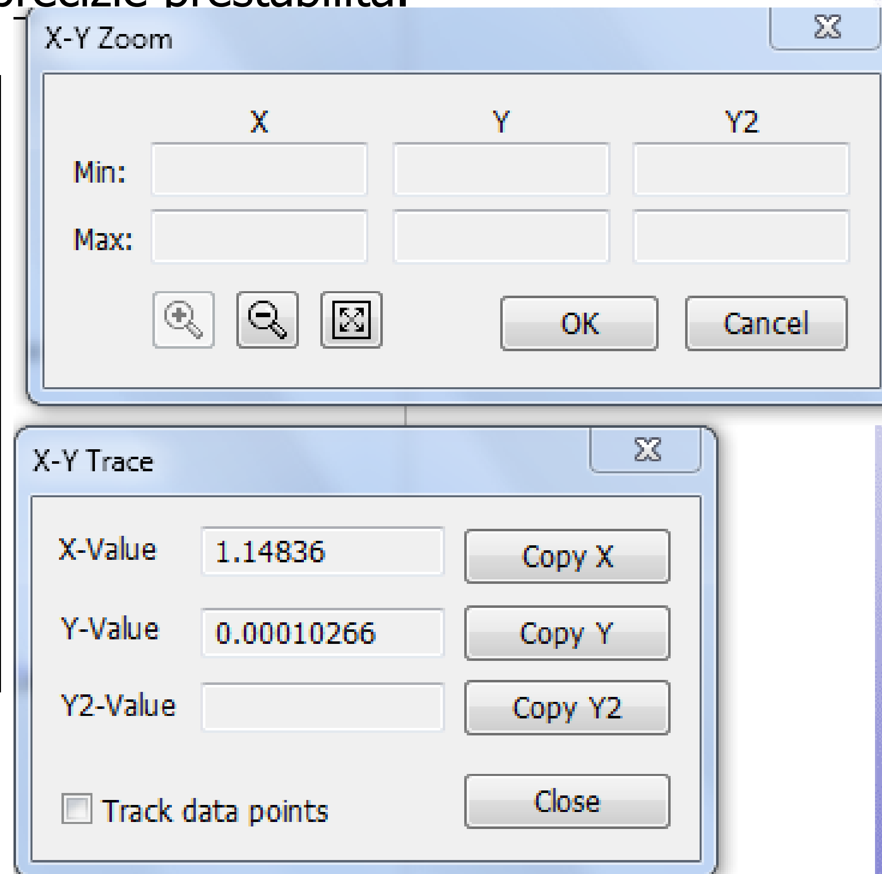




Metoda Grafică de rezolvare a ecuațiilor

Pasul 6. Se selectează aria pentru mărire, și apoi se apasă tasta +. Se repetă operația până se obține o anumită precizie prestabilită.





$$x_0 := 1.145$$

$$f(x_0) = -0.121$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Metoda lui Newton (tangente)

Se consideră ecuația polinomială: $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)-4x+15=0$

Să se determine o rădăcină a ecuației utilizând metoda lui Neuton.

Pasul 1. Se introduce ecuația în Mathcad, folosind **egalul boolean**. (Ctrl =)

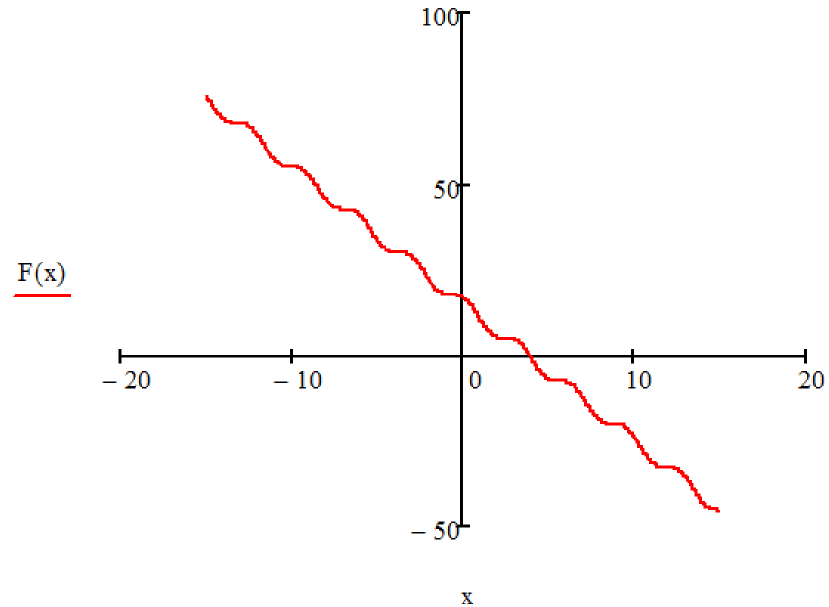
$$2\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)-4x+15 = 0$$

Pasul 2. Se determină **funcția atașată ecuației**.

$$F(x) := 2\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)-4x+15$$

Pasul 3. Se reprezintă grafic funcția f(x) de la -15 până la 15, cu o precizie de 0,1.

$$x := -15, -14.99 .. 15$$



Pasul 4. Se alege o aproximație a soluției. De exemplu x_0=-12. Indicele se introduce utilizând paranteza pătratică ([ ).

$$x_0 := -12$$

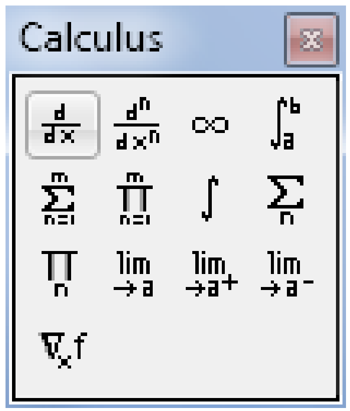
UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Metoda lui Newton (tangente)

Pasul 5. Se definește funcția *f ’(x),* derivata funcției atașate ecuație studiate.

În fereastra de comandă se introduce numele funcției (f de obicei) urmat de un **apostrof** (`) după care se introduce un operator de atribuire (:=).

Pe partea dreaptă a operatorului de atribuire se **introduce formula derivatei**, selectând *Derivative* din toolbar-ul *Calculus*, prezentat pe figura 3.10.



$$F'(x) := \frac{d}{dx}F(x)$$

Pasul 6. Se calculează iterativ soluția ecuația cu formula recursivă determinată din seria lui Taylor:

$$N := 20 \qquad k := 0..N \qquad x_{k+1} := x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$$

Metoda lui Newton (tangente)

Pasul 7. Se afișează rezultatul:

x =

	0
0	-12
1	-2.894
2	2.894
3	6.782
4	5.189
5	0.156
6	4.052
7	3.904
8	3.903
9	3.903
10	3.903
11	3.903
12	3.903
13	3.903
14	3.903
15	...

x =

	0
0	-12
1	-2.89369
2	2.89428
3	6.78159
4	5.18894
5	0.15618
6	4.05244
7	3.90394
8	3.90271
9	3.90271
10	3.90271
11	3.90271
12	3.90271
13	3.90271
14	3.90271
15	...

Metoda bisecției (înjumătățirii intervalului)

Se aleg de pe grafic două valori A_0 și B_0 astfel încât funcția caracteristică atașată ecuației să fie **negativă** pentru valorarea A_0 și **pozitivă** pentru valoarea B_0. Se definește valoare erorii cu care se dorește determinarea soluției.

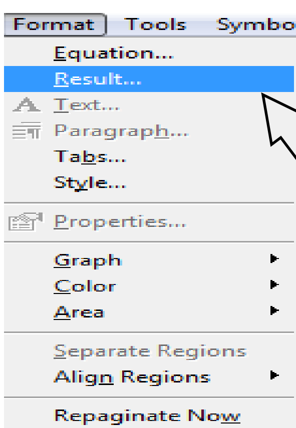
$$A_0 := -12 \qquad f(A_0) = 64.288$$

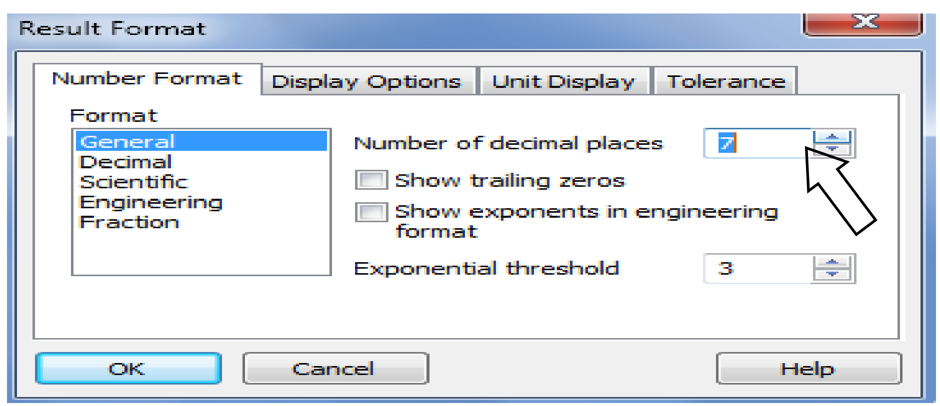
$$B_0 := 12 \qquad f(B_0) = -32.649$$

$$\varepsilon := 10^{-5}$$

Se calcluează numărul minim de iterații necesare, conform relației .

$$n := \frac{\log(B_0 - A_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)} \qquad n = 21.195 \qquad n := 22$$





Metoda bisecţiei (înjumătăţirii intervalului)

$$
sol := \left|\begin{array}{l}
a_0 \leftarrow A_0 \\
b_0 \leftarrow B_0 \\
\text{for } k \in 0..n \\
\quad \left|\begin{array}{l}
c_{k+1} \leftarrow \dfrac{a_k + b_k}{2} \\
a_{k+1} \leftarrow \text{if}\left(f(a_k)\cdot f(c_{k+1}) < 0, a_k, c_{k+1}\right) \\
b_{k+1} \leftarrow \text{if}\left(f(b_k)\cdot f(c_{k+1}) < 0, b_k, c_{k+1}\right)
\end{array}\right. \\
c
\end{array}\right.
$$

sol =

	0
0	0
1	0
2	6
3	3
4	4.5
5	3.75
6	4.125
7	3.9375
8	3.84375
9	3.89063
10	3.91406
11	3.90234
12	3.9082
13	3.90527
14	3.90381
15	...

sol =

	0
8	3.84375
9	3.89063
10	3.91406
11	3.90234
12	3.9082
13	3.90527
14	3.90381
15	3.90308
16	3.90271
17	3.90253
18	3.90262
19	3.90266
20	3.90269
21	3.9027
22	3.9027
23	...

Funcția predefinită *ROOT*

Funcția *root* permite determinarea unei soluții a unei ecuații algebrice f(x)=0 **în vecinătatea unui punct arbitrar fixat**.

$$solutie := root(f(x), x)$$

root(expresia sau numele funcției, variabila în raport cu care se rezolvă ecuația)

Să se rezolve ecuația: $x^2 - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$ utilizând funcția *root* din *Mathcad*.

Pasul 1. Se introduce ecuația și funcția atașată ecuației în *Mathcad*.

$$x^2 - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$$

$$f(x) := x^2 - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Funcția predefinită *ROOT*

Pasul 2. Se definește o primă aproximare arbitrară a soluției.

$$x_0 := -5$$

Pasul 3. Se aplică funcția *root.*

$$sol := root(f(x_0), x_0)$$

$$sol = -0.323628$$

Pasul 4. Se verifică soluția obținută apelând din meniul principal *Symbolics – Variable – Solve*.

$$x^2 - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \text{ solve } \rightarrow -0.32362771106016612114$$

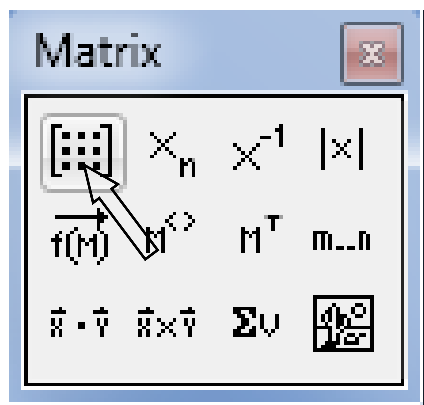
Funcția predefinită *POLYROOTS*

Să se rezolve ecuația polinomială $x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 6x - 10 = 0$ utilizând funcția *polyroots* din *Mathcad*.

Pasul 1. Se introduce ecuația în *Mathcad*. $x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 6x - 10 = 0$

Pasul 2. Se definește vectorul coeficienților:

• Vectorul se introduce cu ajutorul toolbar-ului *Matrix*. Se selectează prima icoană, *Matrix or Vector* (Shortcut: Ctrl+M), conform figurii de mai jos:



Pasul 3. Apare fereastra *Insert Matrix*.

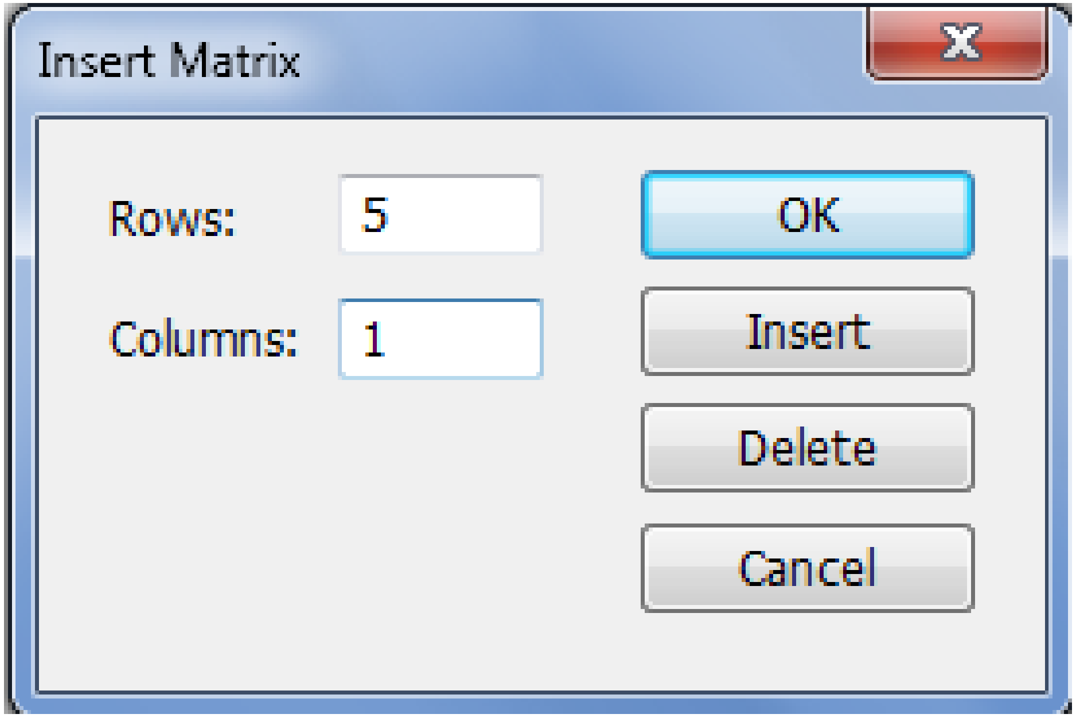


Fig. 2.22.

Pasul 4. Se creează un vector cu 5 linii (*Rows*) și 1 coloană (*Columns*).

Funcția predefinită *POLYROOTS*

Pasul 5. Se introduc coeficienții începând cu **gradul cel mai mic**.

$$x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 6x - 10 = 0 \qquad v := \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pasul 6. Se determină soluțiile în modul prezentat mai jos. Rezultatul obținut este tot un vector, numit vectorul soluțiilor.

$$v := \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad sol := \mathrm{polyroots}(v) \qquad sol = \begin{pmatrix} -1.204 \\ 0.805 + 0.782i \\ 0.805 - 0.782i \\ 6.594 \end{pmatrix}$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Rezolvarea Aproximativă a Ecuațiilor Algebrice și Transcendente

Ș.l. Dr. Ing. Levente CZUMBIL

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA