

Metode Numerice de Rezolvare a Sistemelor de Ecuații



Laboratorul de Cercetare
în **METODE NUMERICE**
NUMERICAL METHODS
Research Laboratory

Technical University of Cluj-Napoca



Ș.l. Dr. ing. Levente CZUMBIL

E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro

WebPage: <http://users.utcluj.ro/~czumbil>



Metoda aproximațiilor succesive (Jacobi)

$A \cdot x = B$ \ \ sistem linear de ecuatii ce urmeaza a fi rezolvat prin iteratii succesive

$$A := \begin{pmatrix} 15.3 & 0.2 & 6.6 & 1.1 \\ 4.5 & 29.8 & 0.3 & 6.5 \\ 7.3 & 9.7 & 17.9 & 4.1 \\ 8.1 & 2.7 & 8.7 & 11.9 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ -2.6 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} N := \text{rows}(A) - 1 \\ i := 0..N \end{array}$$

Sistemul se pune sub forma: $X = \alpha \cdot X + \beta$ care poate fi considerata recurenta;

$$\alpha := \begin{array}{l} \text{for } i \in 0.. \text{rows}(A) - 1 \\ \quad \text{for } j \in 0.. \text{cols}(A) - 1 \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} a_{i,j} \leftarrow 0 \text{ if } i = j \\ a_{i,j} \leftarrow -\frac{A_{i,j}}{A_{i,i}} \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \quad \quad \text{a} \end{array} \quad \begin{array}{l} \backslash \text{ începerea instructiunii iterative } \mathbf{for} \\ \text{pentru transformarea matricei } \alpha \\ \\ \backslash \text{ elementele de pe diagonala} \\ \text{principală se egaleaza } 0 \\ \\ \backslash \text{ celelalte elemente se scriu dupa} \\ \text{raportul dat} \end{array}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0.013 & -0.431 & -0.072 \\ -0.151 & 0 & -0.01 & -0.218 \\ -0.408 & -0.542 & 0 & -0.229 \\ -0.681 & -0.227 & -0.731 & 0 \end{pmatrix}$$

\ \ afisajul numeric al matricei α

Metoda aproximațiilor succesive (Jacobi)

$$\beta := \begin{cases} \text{for } i \in 0.. \text{last}(B) \\ b_i \leftarrow \frac{B_i}{A_{i,i}} \\ b \end{cases} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0.065 \\ 0.101 \\ 0.391 \\ -0.218 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \backslash\! \backslash \text{ procedeu analog de calcul} \\ \text{pentru vectorul termenilor} \\ \text{liberi } \beta \end{array}$$

$x^{(0)} := \beta$ $\backslash\! \backslash$ initializarea primei aproximatii cu valorile vectorului β (fiecare element din β se incarca si in x).

$m := 250$ $i := 1..m$ $\backslash\! \backslash$ numarul de iteratii propuse pentru determinarea solutiei;
se reduce până la valoarea la care solutia se stabilizează,
fapt ce se observă din afisajul numeric al procesului iterativ
(convergent).

$x^{(i)} := \beta + \alpha \cdot x^{(i-1)}$ $\backslash\! \backslash$ formula de recurentă

$$\text{sol} = \begin{pmatrix} -0.08277037 \\ 0.22287125 \\ 0.42372062 \\ -0.52249427 \end{pmatrix} \quad \backslash\! \backslash \text{ extragerea ultimei iteratii, care se adopta} \\ \text{ca solutie a sistemului de ecuatii}$$

$$\text{Eroare} := B - A \cdot \text{sol} \quad \text{Eroare} = \begin{pmatrix} -1.332 \times 10^{-15} \\ 0 \\ -2.665 \times 10^{-15} \\ -3.109 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$



Metoda Inversării Matriceale

Fie sistemul de ecuații de mai jos:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3$$

Se scrie sistemul de ecuații sub formă matriceală și se identifică matricea coeficienților A , respectiv vectorul termenilor liberi B .

$$[A] \cdot [x] = [B]$$

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad [B] = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Ecuția matriceală obținută se înmulțește la stânga cu inversa matricei A , astfel obținându-se relația de calcul a vectorului necunoscutelor x

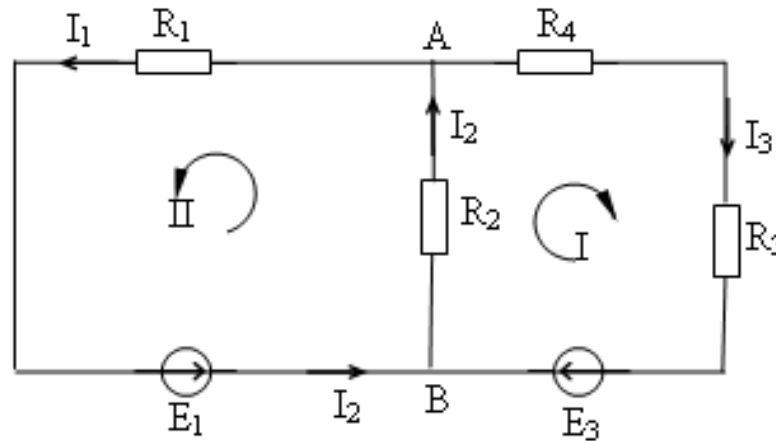
$$[A]^{-1} \mid [A] \cdot [x] = [B] \Rightarrow [A]^{-1} \cdot [A] \cdot [x] = [A]^{-1} \cdot [B]$$

$$[x] = [A]^{-1} \cdot [B]$$



Blocul Given - Find

Să se rezolve circuitul electric de mai jos implementând teoremele lui Kirchhoff într-un bloc *Given – Find*.



Se cunosc parametrii circuitului electric:

$$R_1 := 20 \, \Omega, \quad R_2 := 10 \, \Omega, \quad R_3 := 15 \, \Omega, \quad R_4 := 10 \, \Omega,$$
$$E_1 := 80 \, \text{V}, \quad E_3 := 90 \, \text{V}.$$



Blocul Given - Find

Pasul 1. Se inițializează valorile necunoscutele cu zero.

$$I_1 := 0 \quad I_2 := 0 \quad I_3 := 0$$

Pasul 2. Se introduce cuvântul cheie *Given*.

Pasul 3. Se scriu teoremele lui Kirchhoff pentru circuitul studiat.

Pasul 4. Se determină soluția sistemului apelând funcția *Find*.

Given

$$I_2 - I_1 - I_3 = 0$$

$$R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = E_1$$

$$R_2 \cdot I_2 + R_4 \cdot I_3 + R_3 \cdot I_3 = E_3$$

$$\text{sol} := \text{Find}(I_1, I_2, I_3)$$

$$\text{sol} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ A}$$



Blocul *Given - Minerr*

În cazul în care blocul *Given-Find* nu converge spre o soluție exactă atunci acesta se poate înlocui cu blocul se poate utiliza la calculul direct al valorii uneia sau a mai multor variabile. *Given-Minerr* care va returna o soluție aproximativă astfel încât această înlocuită în sistemul de ecuații inițial să determine o abatere medie pătratică minimă.

- se inițializează necunoscutele problemei;
- se introduce cuvântul cheie *Given*;
- se introduc ecuațiile ce trebuie rezolvate în interiorul blocului *Given-Find*;
- se introduce comanda *Minerr* pentru determinarea necunoscutelor.

$$x_1 := 0 \quad x_2 := 0$$

Given

$$x_1 + e^{x_2} = 9$$

$$\sin(x_1) - x_2 = -5$$

$$\text{sol} := \text{Find}(x_1, x_2)$$

înlocuim *Find* cu *Minerr*

$$x_1 + e^{x_2} = 9.15$$

$$\underline{x}_1 := 0 \quad \underline{x}_2 := 0$$

Given

$$x_1 + e^{x_2} = 9$$

$$\sin(x_1) - x_2 = -5$$

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} := \text{Minerr}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -1.663 \\ 2.381 \end{pmatrix}$$



Metode Numerice de Rezolvare a Sistemelor de Ecuații



Ș.I. Dr. Ing. Levente CZUMBIL