

# Aproximarea și Interpolarea Numerică a Funcțiilor



Laboratorul de Cercetare  
în **METODE NUMERICE**  
**NUMERICAL METHODS**  
Research Laboratory

Technical University of Cluj-Napoca

***Ș.l. Dr. ing. Levente CZUMBIL***

**E-mail: [Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro](mailto:Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro)**

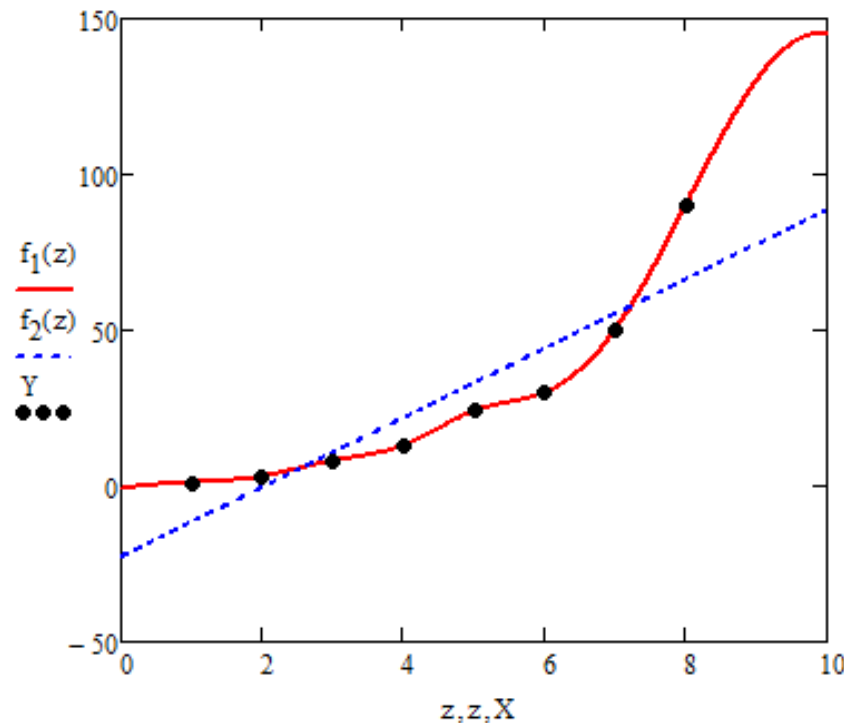
**WebPage: <http://users.utcluj.ro/~czumbil>**

# Introducere

În general în aplicațiile din domeniul electrotehnic **nu se cunoaște expresia analitică** a funcției care trebuie aproximată ci **doar valorile** ei într-un anumit număr de puncte.

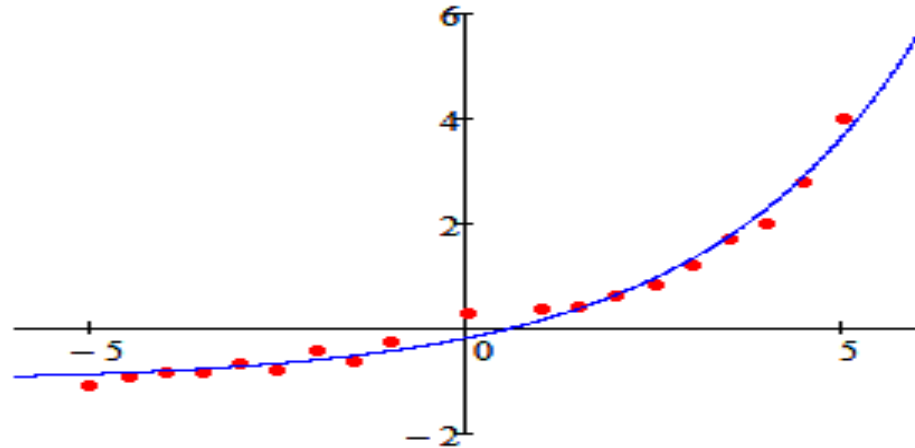
În cadrul procesului de aproximare numerică se pot utiliza două tipuri de funcții:

- funcții de **interpolare**, care **trec prin toate punctele cunoscute**;
- funcții de **aproximare**, care **nu trec prin toate punctele cunoscute**, dar au o formă predefinită;



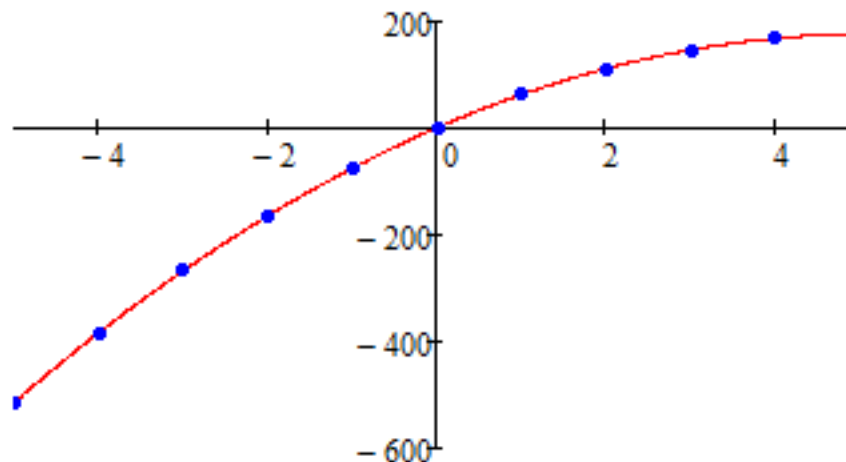
Aproximarea bazată pe funcții având o anumită formă predefinită:

- **line**
- **medfit**
- **linfit**
- **logfit**
- **expfit**
- **genfit**



Interpolarea folosind funcțiile predefinite de tip **spline** din Mathcad:

- **interp**
- **linterp**
- **lspline**
- **pspline**
- **cspline**



## Aproximarea cu abatere medie pătratică minimă

Se utilizează pentru aproximarea funcțiilor definite prin noduri ale căror coordonate prezintă un oarecare grad de incertitudine. Este cazul funcțiilor ce exprimă dependențe obținute experimental prin măsurători sau ca urmare a unor calcule care folosesc rezultatele măsurătorilor.

Funcția de aproximare  $f(x)$  nu trece prin toate cele  $n$  noduri sau chiar prin nici unul dar este cel mai aproape de toate acestea. Metoda urmărește minimizarea erorii calculate de norma euclidiană (suma pătratelor abaterilor dintre datele experimentale și cele determinate teoretic).

$$f(x) = m \cdot x + b$$

$$F(m, b) = \sum_{k=1}^n [y_k - f(x_k)]^2$$

Determinarea aproximării în sensul celor mai mici pătrate se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice liniare cu un număr de ecuații mai mare decât numărul de necunoscute, care este supradeterminat.

$$\begin{cases} m \cdot \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) + b \cdot \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k \\ m \cdot \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) + b \cdot \left( \sum_{k=1}^n 1 \right) = \sum_{k=1}^n y_k \end{cases}$$



## Aproximarea cu abatere medie pătratică minimă

Fie un șir de puncte  $x(i)$  cărora le corespund valorile  $y(i)$ . Să se aproximeze printr-un polinom de gradul 2 funcția de legătură dintre cele două șiruri de valori.

**Pasul 1.** Se definesc cele două șiruri  $x(i)$ , respectiv  $y(i)$ . Pentru definirea șirului de valori  $y(i)$  se folosește funcția:  $f(x) = -6.78 \cdot x^2 + 69 \cdot x + 1$

$$f(x) := -6.78 \cdot x^2 + 69 \cdot x + 1$$

$$n := 9 \quad i := 0..n \quad x_i := i - 5 \quad y_i := f(x_i)$$

$$x^T = (-5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$$

$$y^T = (-513.5 \quad -383.48 \quad -276.02 \quad -164.12 \quad -74.78 \quad 1 \quad 63.22 \quad 111.88 \quad 146.98 \quad 168.52)$$

**Pasul 2.** Polinom de gradul 2 care trebuie să aproximeze funcția de legătură dintre șirurile  $x(i)$  și  $y(i)$  are forma:  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

Pe baza acestui polinom eroarea medie pătratică va fi definită de următoarea formulă:

$$\text{ErrMedPat}(a, b, c) = \sum_{k=0}^n \left[ y_k - \left[ a \cdot (x_k)^2 + b \cdot x_k + c \right] \right]^2$$



## Aproximarea cu abatere medie pătratică minimă

**Pasul 3.** Condiția de minimizare a abaterii medii pătratice este dată sistemul de ecuații reprezentate de derivatele parțiale ale acestei abateri în funcție de coeficienții  $a$ ,  $b$  și  $c$  ai polinomului de aproximare:

$$\frac{d}{da} \text{ErrMedPat}(a, b, c) = 0 \quad \frac{d}{db} \text{ErrMedPat}(a, b, c) = 0 \quad \frac{d}{dc} \text{ErrMedPat}(a, b, c) = 0$$

**Pasul 4.** Acest sistem de ecuații se rezolvă folosindu-se blocul **GIVEN – MINERR**:  
(sau FIND)

$$a := 1 \quad b := 1 \quad c := 1$$

Given

$$a \cdot \left[ \sum_{k=0}^n (x_k)^4 \right] + b \cdot \left[ \sum_{k=0}^n (x_k)^3 \right] + c \cdot \left[ \sum_{k=0}^n (x_k)^2 \right] = \sum_{k=0}^n [(x_k)^2 \cdot y_k]$$

$$a \cdot \left[ \sum_{k=0}^n (x_k)^3 \right] + b \cdot \left[ \sum_{k=0}^n (x_k)^2 \right] + c \cdot \left( \sum_{k=0}^n x_k \right) = \sum_{k=0}^n (x_k \cdot y_k)$$

$$a \cdot \left[ \sum_{k=0}^n (x_k)^2 \right] + b \cdot \left( \sum_{k=0}^n x_k \right) + c \cdot \left( \sum_{k=0}^n 1 \right) = \sum_{k=0}^n y_k$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := \text{Minerr}(a, b, c)$$



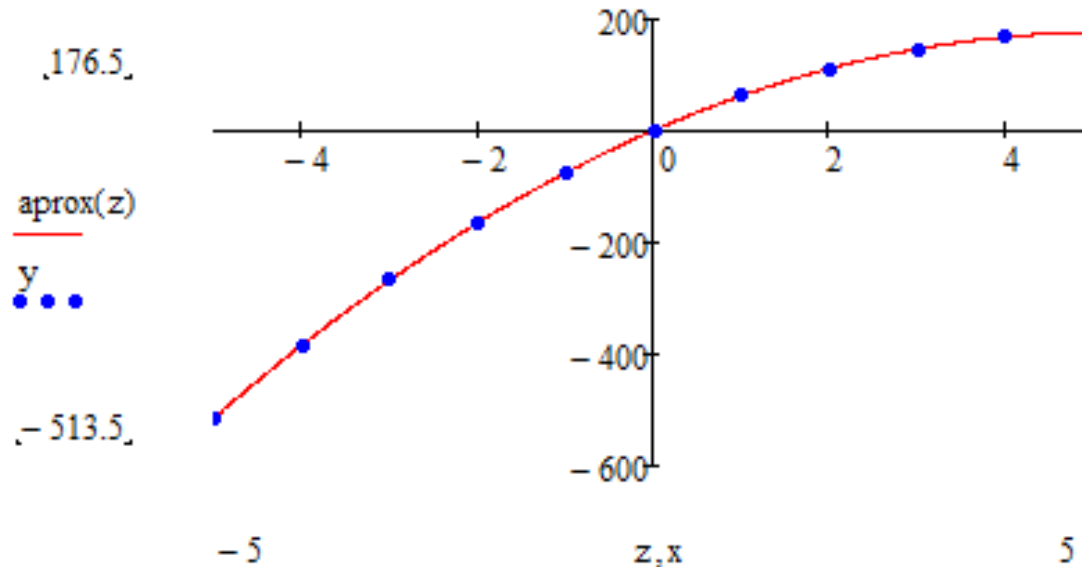
## Aproximarea cu abatere medie pătratică minimă

**Pasul 5.** Astfel coeficienții polinomului de aproximare vor fi egali cu:

$$a = -6.78 \quad b = 69 \quad c = 1$$

**Pasul 6.** Pe baza coeficienților  $a$ ,  $b$  și  $c$  se reconstituie polinomul de aproximare și se reprezintă grafic:

$$\text{aprox}(z) := a \cdot z^2 + b \cdot z + c$$



## Aproximarea folosind funcții predefinite din Mathcad

În timpul unui experiment de laborator, se execută niște măsurători în punctele  $x_i$ , care aparțin vectorului  $\mathbf{X}$ . Rezultatele măsurătorilor  $y_i$  se trec în vectorul  $\mathbf{Y}$ . Să se aproximeze funcția exponențială de legătură dintre mărimile de intrare și rezultatele obținute.

**Pasul 1.** Se definesc vectori  $\mathbf{X}$  și  $\mathbf{Y}$ .

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \\ 24 \\ 45 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix}$$

**Pasul 2.** Pentru aproximarea legăturii dintre rezultatele obținute și mărimile de intrare se folosește o funcție exponențială de forma:

$$f(x) = \text{coef}_0 \cdot e^{\text{coef}_1 \cdot x} + \text{coef}_2$$

a cărei coeficienți se determină cu ajutorul funcției **expfit**.

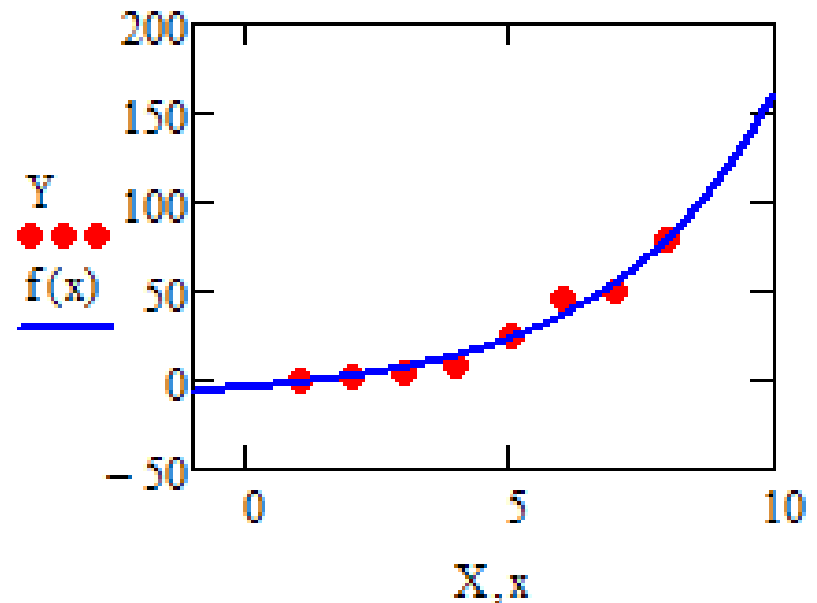
## Aproximarea folosind funcții predefinite din Mathcad

Această funcție primește ca și parametrii vectorii **X** și **Y** respectiv **vectorul coeficienților funcției exponențiale** care trebuie predefiniți:

$$\text{coef} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{coef} := \text{expfit}(X, Y, \text{coef}) \quad \text{coef} = \begin{pmatrix} 5.13 \\ 0.354 \\ -7.651 \end{pmatrix}$$

**Pasul 3.** Se definește și se reprezintă grafic funcția exponențială de aproximare. Limitele de afișare pentru axa OX se setează de la -1 la 10.

$$f(x) := \text{coef}_0 \cdot e^{\text{coef}_1 \cdot x} + \text{coef}_2$$



## Aproximarea folosind funcții predefinite din Mathcad

Să se aproximeze funcția de legătură dintre mărimile de intrare și rezultatele obținute prin măsurători de la problema anterioară, folosind funcțiile predefinite din MathCad: **line**, **medfit**, **linfit**, **logfit**, **expfit** și **genfit** și să se compare rezultatele obținute.

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \\ 24 \\ 45 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix}$$

**Pasul 2.** Se definesc pe rând funcțiile de interpolare, bazate pe diferitele metode de calcul a coeficienților:

$$\text{coef} := (1 \ 1 \ 1)^T$$

$$\text{coef} := \text{logfit}(X, Y, \text{coef})$$

$$f_{\text{logfit}}(z) := \text{coef}_0 \cdot \ln(z + \text{coef}_1) + \text{coef}_2$$

Aproximare logaritmică

# Aproximarea folosind funcții predefinite din Mathcad

$\text{coef} := \text{line}(X, Y)$

$f_{\text{line}}(z) := \text{coef}_1 \cdot z + \text{coef}_0$

Aproximare liniară – bazată eroarea minimă pătratică

$\text{coef} := (1 \ 1 \ 1)^T$

$\text{coef} := \text{expfit}(X, Y, \text{coef})$

$f_{\text{expfit}}(z) := \text{coef}_0 \cdot e^{\text{coef}_1 \cdot z} + \text{coef}_2$

Aproximare exponențială

$\text{coef} := \text{medfit}(X, Y)$

$f_{\text{medfit}}(z) := \text{coef}_1 \cdot z + \text{coef}_0$

Aproximare liniară – bazată pe regresione mediană-mediană



## Aproximarea folosind funcții predefinite din Mathcad

Aproximare **generalizată liniară**: funcția de aproximare este o combinație liniară de funcții de aproximare:

$$f(x) = \text{coef}_0 \cdot f_0(x) + \text{coef}_1 \cdot f_1(x) + \dots + \text{coef}_n \cdot f_n(x)$$

$$f(x) := (\ln(x) \quad \sqrt{x} \quad 1)^T$$

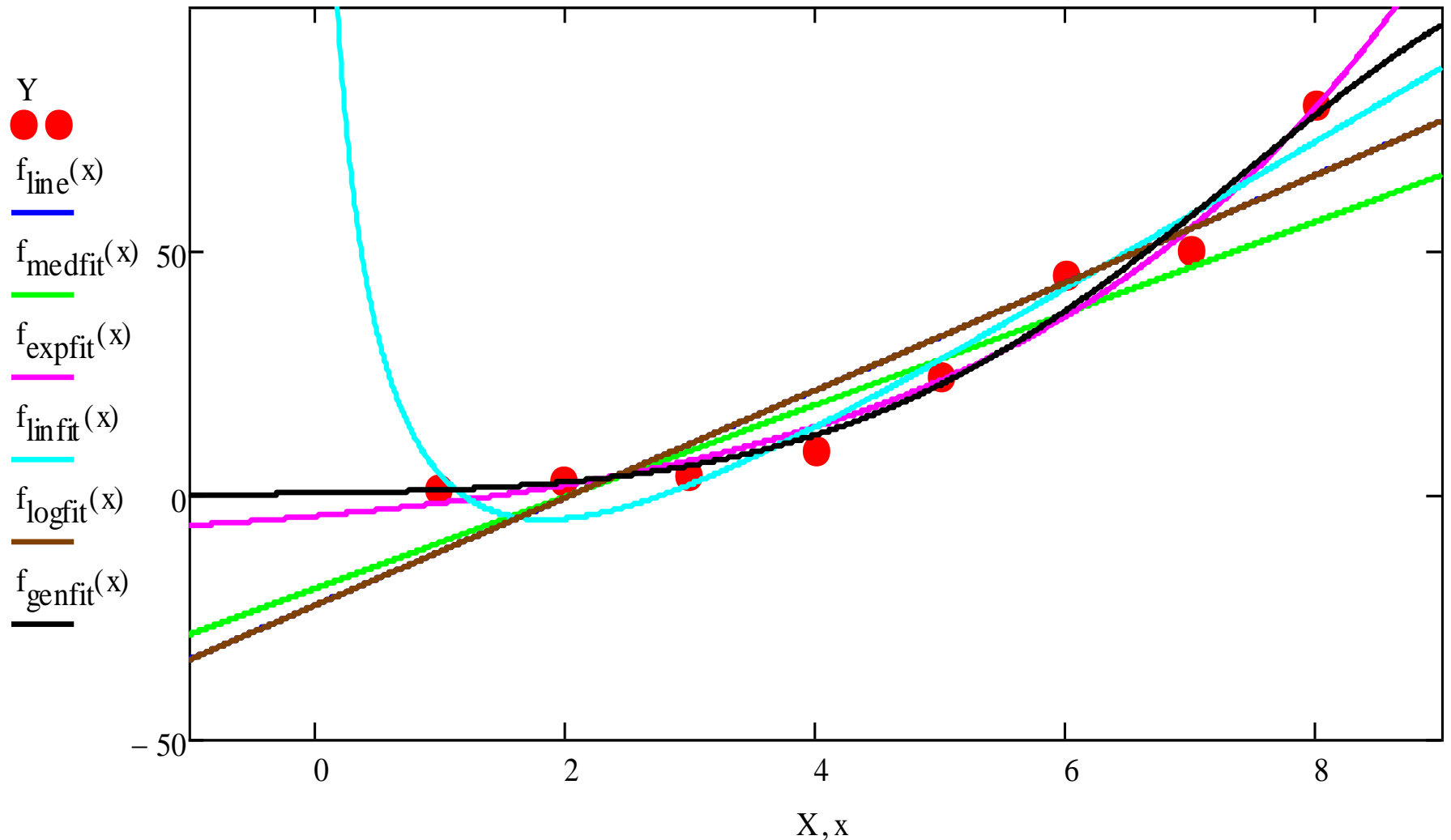
$$\text{coef} := \text{linfit}(X, Y, f)$$

$$f_{\text{linfit}}(z) := \text{coef} \cdot f(z)$$



## Aproximarea folosind funcții predefinite din Mathcad

**Pasul 3.** Se reprezintă pe același grafic toate funcțiile obținute. Limitele de afișare pentru axa OX se setează de la -1 la 9, respectiv la axa OY la -50, 100.



# Polinoame de interpolare de tip Lagrange

Problema care se pune este determinarea polinomului  $p_n$  care satisface relația  $|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$ , unde  $f(x)$  este o funcție definită și continuă pe intervalul  $[a, b]$ ,  $f \in C_{[a, b]}$ , iar  $\forall \varepsilon > 0$ . Cunoscând valorile funcției  $f(x)$ , determinate experimental prin măsurători în nodurile  $x_i$ ,  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b] \rightarrow f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ ,  $x_i \neq x_j, i \neq j$   $y_i = f(x_i)$ , se pune problema determinării valorilor funcției în alte puncte, adică găsirea unui polinom  $p_n$ , astfel încât:  $p_n(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, n}$ . Polinomul  $p_n$  trebuie să coincidă cu  $f(x)$  pe  $n+1$  puncte. Se știe că există un polinom și numai unul de grad mai mic ca  $n$  care îndeplinește această condiție. Acesta este polinomul de interpolare.

Se poate construi polinomul de interpolare de tip Lagrange  $L_n(x)$  de grad cel mult  $n$ :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot l_i(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot l_i(x) \stackrel{\text{not}}{=} L_n(x)$$

cu funcțiile de bază:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$l_i(x_k) = \delta_{ki} = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & k = i \end{cases} \quad 0 \leq i, k \leq n$$

$$L_n(x_i) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot l_i(x_k) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \delta_{ki} = y_i$$



## Polinoame de interpolare de tip Lagrange

Fie un interval  $[a,b]$  în care se cunosc un set de valori  $x(i)$  cărora le corespunde în mulțimea numerelor reale un alt set de valori  $y(i)$ . Se cere să se determine relația de dependență între cele două seturi de numere utilizând polinomul de interpolare de tip Lagrange și să se traseze graficul aferent acestuia pe intervalul  $[a,b]$ .

**Pasul 1.** Se definesc limitele intervalului de studiu  $[a,b]$ , numărul de puncte intermediare și pasul de parcurgere a acestui interval.

$$a := 0 \quad b := 10 \quad N := 50 \quad h := \frac{b - a}{N} \quad h = 0.2$$

**Pasul 2.** Se definesc șirurile de valori  $x(i)$  și  $y(i)$  având  $N$  elemente. Elementele celor două șiruri se definesc utilizându-se „[” pentru a indica indexul  $i$  al șirurilor:

$$i := 0..N \quad x_i := a + h \cdot i \quad y_i := \frac{i^2 - 3}{N}$$

**Pasul 3.** Se definește coeficientul diferență dintre două elemente  $x_i$ ,  $x_j$  cunoscute folosindu-se instrucțiunea condițională **IF** sub forma unui șir cu  $N$  elemente. Acest coeficient ia valoarea 1 dacă diferența se face între același element  $i=j$ :

$$j := 0..N \quad \text{coef}_i := \prod_j \left[ \text{if} \left[ (i = j), 1, (x_i - x_j) \right] \right]$$



# Polinoame de interpolare de tip Lagrange

**Pasul 4.** Se definește un polinom intermediar de ordin  $N+1$  care are soluții, elementele șirului  $x(i)$ :

$$\text{intermediar}(z) := \prod_j (z - x_j)$$

**Pasul 5.** Pe baza acestui polinom intermediar și a șirului de coeficienți diferență se definesc funcțiile de baza ce intră în definirea polinomului Lagrange. Această funcție ia valoarea 1 pentru orice element din șirul  $x(i)$ :

$$l(i, z) := \begin{cases} 1 & \text{if } z = x_i \\ \frac{\text{intermediar}(z)}{(z - x_i) \cdot \text{coef}_i} & \text{otherwise} \end{cases}$$

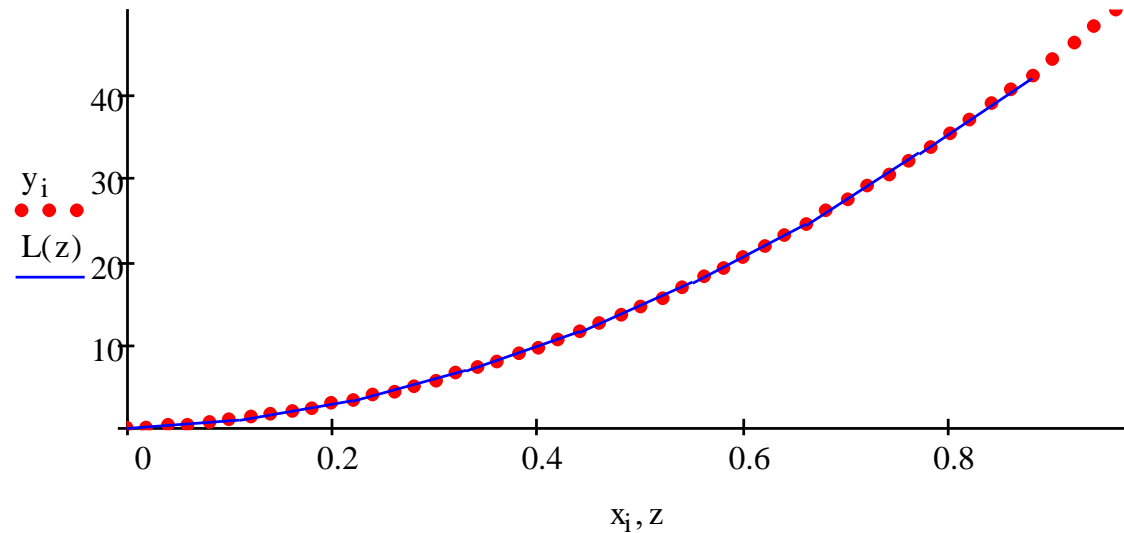
**Pasul 6.** Însușind aceste funcții de bază ponderate de elementele șirului  $y(i)$ , se obține polinomul Lagrange ce interpolează funcția de legătură,  $f(z)$ , dintre cele două șiruri  $x(i)$  și  $y(i)$  pe intervalul  $[a, b]$ :

$$L(z) := \sum_i (l(i, z) \cdot y_i)$$



**Pasul 7.** În final se face reprezentarea grafică a polinomului de interpolare  $L(z)$  pe intervalul  $[0,0.9]$  dorit și valorile date tabelar  $y_i$ .

$z := 0,0.11.. 0.9$



# Polinoame de interpolare de tip Spline

Metodele de aproximare cu funcții spline utilizează porțiuni de polinoame  $P_n(x_i)$  de gradul  $m$ , mult mai mic decât numărul de puncte în care se cunoaște valoarea lui  $f(x)$ . Coeficienții funcțiilor spline rezultă din condiții de forma  $P_n(x_i) = y_i = f(x_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$ , la care se adaugă și cele legate de egalitatea valorilor derivatelor segmentelor de polinoame în punctele date.

Termenul de spline (engleză: dispozitiv pentru trasarea curbelor netede) a fost introdus pentru a desemna o funcție formată din mai multe polinoame, definite pe intervale adiacente și care se racordează între ele împreună cu un număr de derivate ale acestora.

Se utilizează funcții de aproximare de tip spline liniare, parabolice și cubice.

- **lspline**
- **pspline**
- **cspline**



# Polinoame de interpolare de tip Spline

În timpul unui experiment de laborator, se execută niște măsurători în punctele  $x_i$ , care aparțin vectorului  $\mathbf{X}$ . Rezultatele măsurătorilor  $y_i$  se trec în vectorul  $\mathbf{Y}$ . Folosind datele din tabelul de mai jos pentru  $\mathbf{X}$  și  $\mathbf{Y}$ , să se ridice caracteristica  $\mathbf{Y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$ , **interpolând rezultatele**.

**Pasul 1.** Se definesc vectori  $\mathbf{X}$  și  $\mathbf{Y}$ :

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Y} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \\ 24 \\ 45 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix}$$



## Polinoame de interpolare de tip Spline

**Pasul 2.** Se construiește un vector auxiliar, necesar interpolării, folosind comanda **spline**. Funcția de interpolare **interp** din Matchad construiește un polinom de interpolare, folosind coeficienții din acest vector auxiliar.

Vectorul auxiliar poate fi construit prin chemarea funcției **lspline** (linear), **cspline** (cubic) sau **pspline** (parabolic). Conform acestuia, coeficienții o să fie calculați utilizând o funcție **liniară** ori una **parabolică** ori una **cubică**.

Se definesc cele trei vectori  $M_1$ ,  $M_2$  și  $M_3$ , utilizând funcțiile **lspline**, **pspline** și **cspline**, pe rând. Se afișează rezultatele.

$$M_1 := \text{lspline}(X, Y)$$

$$M_2 := \text{pspline}(X, Y)$$

$$M_3 := \text{cspline}(X, Y)$$



## Aproximarea folosind de interpolare spline

**Pasul 3.** Se aplează funcția **interp**, pentru fiecare vector de coeficienți recent calculați.

funcția **interp** are 4 arguemente: **interp(M,X,Y,z)**

- M: vectorul de coeficienți
- X: vectorul nodurilor de interpolare
- Y: vectorul rezultatelor determinate experimental
- z: variabila de funcție

$$f_1(z) := \text{interp}(M_1, X, Y, z)$$

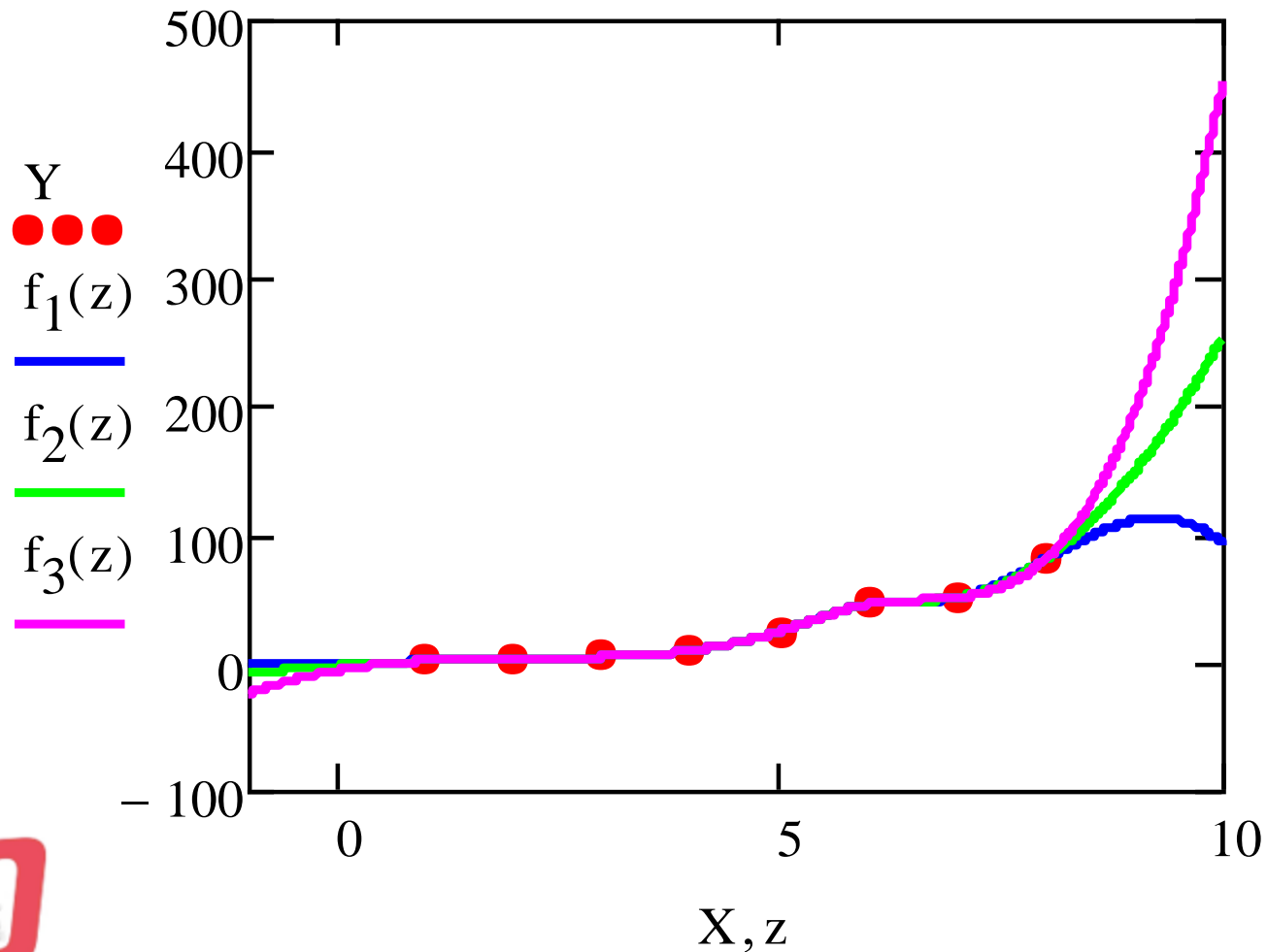
$$f_2(z) := \text{interp}(M_2, X, Y, z)$$

$$f_3(z) := \text{interp}(M_3, X, Y, z)$$



## Aproximarea folosind de interpolare spline

**Pasul 4.** Se reprezintă grafic cele trei funcții obținute și tabelul de valori. Limitele de afișare pentru axa OX se setează de la -1 la 10.



## Aproximarea folosind de interpolare spline

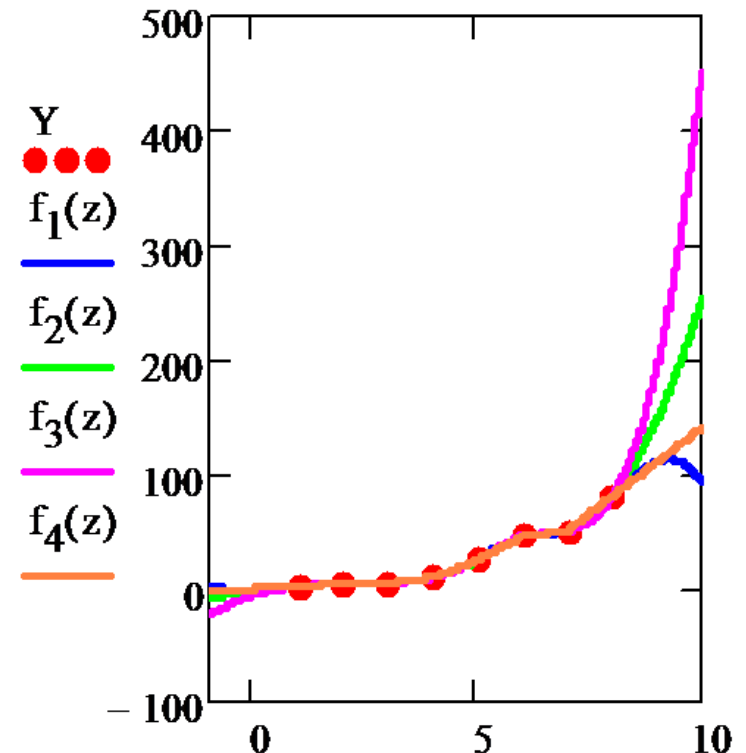
**Pasul 5.** Folosind funcția **linterp** două puncte consecutive se conectează prin intermediul unei linii.

funcția **linterp** are 3 argumente: **linterp(X,Y,z)**

- X: vectorul nodurilor de interpolare
- Y: vectorul rezultatelor determinate experimental
- z: variabila de funcție

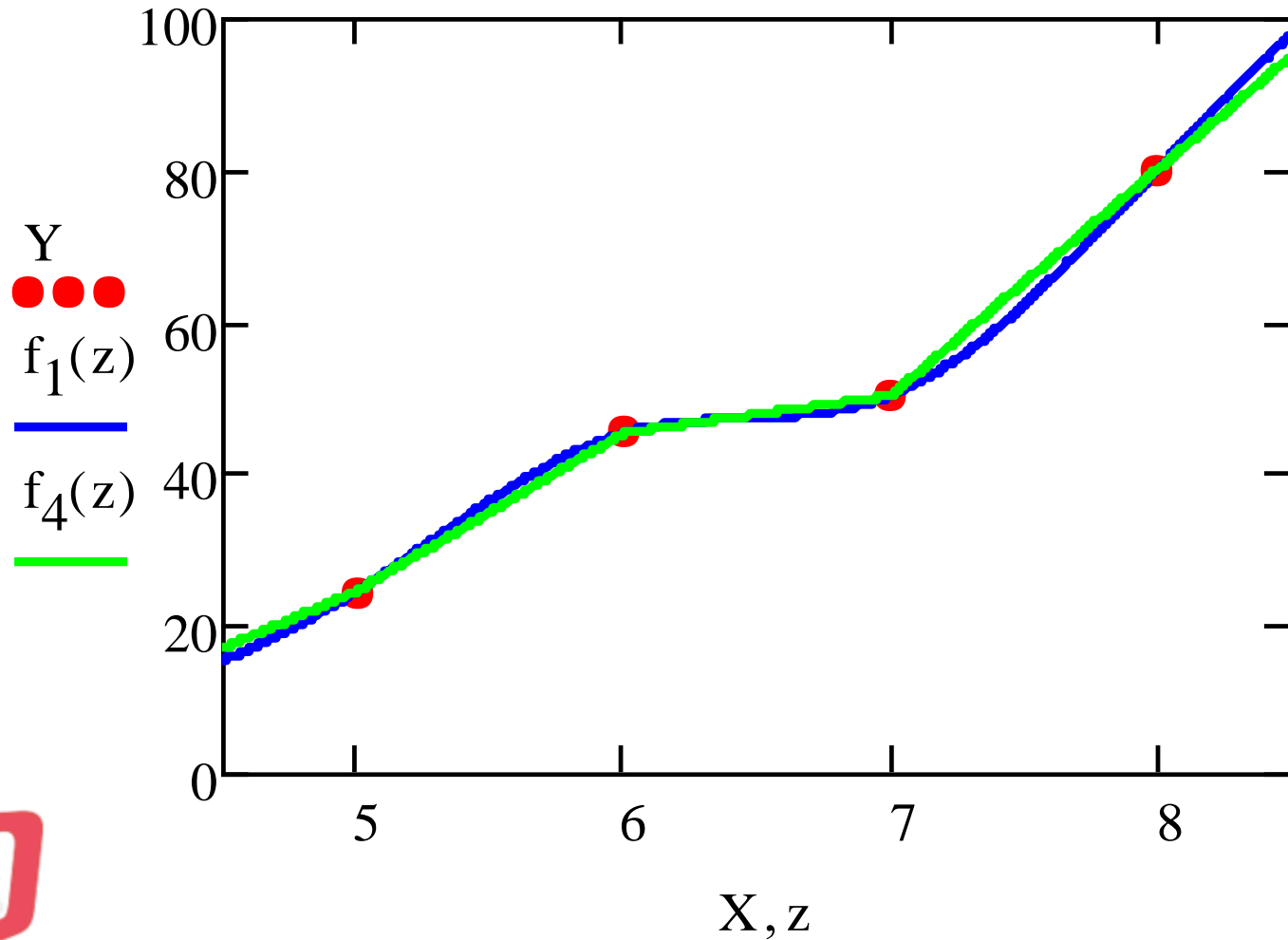
$$f_4(z) := \text{linterp}(X, Y, z)$$

**Pasul 6.** Se reprezintă grafic funcția obținută prin **linterp**. Pe un alt grafic se compară cu funcțiile obținute prin utilizarea comenzilor **spline** și **interp**. Limitele de afișare pentru axa OX se setează de la -1 la 10.



## Aproximarea folosind de interpolare spline

**Pasul 7.** Se compară cu rezultatul obținut prin **linterp** și rezultatul obținut prin **lspline -> interp**. Limitele de afișare pentru axa OX se setează de la 4,5 până la 8,5.



# Aproximarea și Interpolarea Numerică a Funcțiilor



**Ș.I. Dr.Ing. Levente CZUMBIL**