Metode Numerice de Integrare și Derivare a Funcțiilor date Numeric

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Laboratorul de Cercetare în METODE NUMERICE
NUMERICAL METHODS Research Laboratory
Technical University of Cluj-Napoca

Ș.l. Dr. ing. **Levente CZUMBIL**
E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro
WebPage: http://users.utcluj.ro/~czumbil

Fromula Trapezelor

Formula clasică a trapezelor rezultă prin particularizarea cea mai simplă a versiunii clasice a metodei Newton-Côtes, pentru n=1. Deci este o aplicaţie directă a interpolării liniare Lagrange în două puncte. Se cunoaşte funcţia în două noduri $x_0 = a,\ x_1 = b \Rightarrow f(x_0),\ f(x_1);\ \ h = (b-a)$, şi se doreşte calculul aproximativ al integralei definite $\int_a^b f(x)dx$, utilizând polinomul liniar de interpolare Lagrange adică scriind funcţia $f(x) = L_1(x) + R_1(x)$. Deci integrala calculată cu formula trapezului este:

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{I_{Trapez}(f)} = \underbrace{\int_a^b L_1(x)dx}_{I_{Trapez}(L_1)} + \underbrace{\int_a^b R_1(x)dx}_{Eroare_{Trapez}}$$

Deci integrând polinomul Lagrange şi restul se obţine formula trapezului:

$$I_{Trapez}(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\cdot[f(a)+f(b)]\underbrace{-\frac{(b-a)^3}{12}\cdot f''(\xi)}_{Eroare_{Trapez}}$$

Deci formula trapezelor generalizată cu $\xi \in (a,b)$, este:

$$I_{TrapezGen}(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(a)+f(b)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]\underbrace{-\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)}_{Eroare_{TrapezGen}}$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Fromula Trapezelor

Fie funcţia, $f(x)=e^{-x^2}\cdot\sin(x)$ definită pe intervalul $[a,b]$; $f:[a,b]\rightarrow R$. Se cere calculul valorii integralei definite pe intervalul $[a,b]$, utilizând formula trapezelor şi evaluarea erorii de calcul a acestei formule.

Pasul 1. Se introduce funcţia $f(x)$:

$$f(x) := e^{-x^2}\cdot\sin(x)$$

Pasul 2. Se definesc capetele intervalului de definire a funcţiei, numărul N de puncte intermediare de calcul şi se fixează pasul de integrare h (distanţa dintre două puncte intermediare vecine pentru a fixa lungimea subintervalelor echidistante pe intervalul $[a,b]$):

$$a := 1 \qquad b := 7 \qquad N := 20 \qquad h := \frac{b-a}{N} \qquad h = 0.3$$

Pasul 3. Se introduce vectorul x a cărui elemente sunt valorile absciselor x_i care reprezintă capetele subintervalelor echidistante în care a fost împărţit intervalul $[a,b]$. Elementele acestui vector se definesc utilizându-se tasta ([) pentru indicele i al variabilei x.

$$i := 0..N \qquad x_i := a + h\cdot i$$

$x^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1.3	1.6	1.9	2.2	2.5	2.8	3.1	...

Pasul 4. Se calculează valoarea integralei definite pe intervalul $[a,b]$ utilizând formula trapezelor. Indicele formal *trapez* se introduce cu tasta (**.**), iar suma prin intermediul comenzii *Summation* din toolbar-ul *Calculus* (shortcut: **Ctrl #**):

$$I_{Trapez} := \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right) \qquad I_{Trapez} = 0.132938$$

Pasul 5. Se evaluează eroarea metodei conform formulei:

$$MaxErr := -\frac{h}{24}\cdot\left(3\,f(x_N) - 4\,f(x_{N-1}) + f(x_{N-2}) + 3\,f(x_0) - 4\,f(x_1) + f(x_2)\right)$$

$$|MaxErr| = 3.685 \times 10^{-3}$$

Pasul 6. Se calculează integrala definită pe intervalul $[a,b]$ cu ajutorul operatorului de integrare din *Mathcad* prin apelarea comenzii *Definite Integral* toolbar-ul *Calculus* (**&**):

$$I_{def} := \int_a^b f(x)\,dx \qquad I_{def} = 0.129738$$

$$Err := |I_{def} - I_{Trapez}| \qquad Err = 5.056 \times 10^{-4}$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Fromula lui Simpson

Formula clasică a lui Simpson rezultă prin particularizarea versiunii generale a metodei Newton-Côtes, pentru n=2. Se cunosc valorile funcţie f(x) în trei noduri echidistante:

$$x_0 = a,\; x_1 = c = \frac{a+b}{2},\; x_2 = b \Rightarrow f(x_0),\; f(x_1),\; f(x_2),\;\; x_1 = x_0 + h,\;\; x_2 = x_0 + 2h,$$

$$h = b - c = c - a = \frac{(b-a)}{2}$$

Iar polinomul de interpolare Lagrange de ordin doi este cel cu care se aproximează funcţia de sub integrala definită, $f(x) = L_2(x) + R_2(x)$. Deci integrala definită va fi:

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{I_{Simpson}(f)} = \underbrace{\int_a^b L_2(x)dx}_{I_{Simson}(L_2)} + \underbrace{\int_a^b R_2(x)dx}_{Eroare_{Simpson}}$$

Deci formula lui Simpson se va scrie:

$$I_{Simpson}(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4\cdot f(c) + f(b)\right) \underbrace{- \frac{(b-a)^5}{2880}\cdot f'''(\xi)}_{Eroare_{Simpson}}$$

Aplicând pentru fiecare subinterval formula clasică a lui Simpson se obţine:

$$I_{SimpsonGen}(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\left[f(x_0) + f(x_{2m}) + 4\cdot\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1}) + 2\cdot\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) \right] \underbrace{- \frac{(b-a)^5}{2880\cdot m^4}\cdot f^{(4)}(\xi)}_{Eroarea_{Simpson}}$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Fromula lui Simpson

Fie funcţia, $f(x)=e^{-x^2}\cdot\sin(x)$ definită pe intervalul $[a,b]$; $f:[a,b]\rightarrow R$. Se cere calculul valorii integralei definite pe intervalul $[a,b]$, utilizând formula lui Simpson şi să se evalueze eroarea de calcul a acestei formule.

Pasul 1. Se defineşte funcţia $f(x)$: $\quad f(x) := e^{-x^2}\cdot\sin(x)$

Pasul 2. Se definesc limitele intervalului, numărul 2N de puncte intermediare de calcul şi se determină pasul de integrare h :

$$a := 1 \qquad b := 7 \qquad N := 25 \qquad h := \frac{b-a}{2N} \qquad h = 0.12$$

Pasul 3. Se introduce vectorul x a cărui elemente sunt valorile absciselor x_i care reprezintă capetele subintervalelor echidistante în care a fost împărţit intervalul $[a,b]$.

$$i := 0..2N \qquad x_i := a + h\cdot i \qquad x^T =$$

	0	1	2	3	4	5
0	1	1.12	1.24	1.36	1.48	...

Pasul 4. Se calculează valoarea integralei definite pe intervalul $[a,b]$ utilizând formula lui Simpson. Sumele se introduc prin intermediul operatorului *Range Varible Summation* din toolbar-ul *Calculus* (**$**):

$$j := 1,3..2\cdot N-1 \qquad k := 2,4..2N-2$$

$$I_{Simpson} := \frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\left(\sum_j f(x_j)\right)+2\left(\sum_k f(x_k)\right)\right] \qquad I_{Simpson} = 0.129733$$

$$Err := \left|I_{def}-I_{Simpson}\right| \qquad Err = 4.784\times 10^{-6}$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Calculul Integralei unor Funcții date Numeric

Să determine energia consumată de un receptor pentru care se cunoaște curba de sarcină referitoare la puterea activă înregistrată pe o perioadă de 12 ore:

$$t := (0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \ 11\ \ 12)^T \cdot hr$$

$$P := (2.73\ \ 2.74\ \ 2.77\ \ 2.76\ \ 2.78\ \ 3.14\ \ 3.52\ \ 3.88\ \ 4.53\ \ 4.61\ \ 4.37\ \ 4.32\ \ 4.25)^T \cdot kW$$

Se identifică pasul de înregistrare a datelor și numărul *N* de subintervale aferent formulei Trapezelor și respectiv formulei lui Simpson:

$$h := 1hr \qquad N_T := 12 \qquad N_S := 6$$

Se calculează energia consumată cu ajutorul formulei Trapezelor:

$$E_T := \frac{h}{2}\left(P_0 + P_{N_T} + 2\sum_{i=1}^{N_T-1} P_i\right) \qquad E_T = 42.91\,kW\cdot hr$$

$$j := 1, 3 .. 2\cdot N_S - 1$$

$$k := 2, 4 .. 2N_S - 2$$

Se calculează energia consumată cu ajutorul formulei lui Simpson:

$$E_S := \frac{h}{3}\left[P_0 + P_{2\cdot N_S} + 4\left(\sum_j P_j\right) + 2\left(\sum_k P_k\right)\right] \qquad E_S = 42.907\,kW\cdot hr$$

Calculul Integralei Duble

Fie funcţia de două variabile $f(x,y) = x + y \cdot |\sin(x)| + e^{-3y}$ definită pe intervalele $x \in [a,b]$ şi $y \in [c,d]$. Se cere calculul integralei duble pe întreg domeniul de definiţie.

Pasul 1. Se defineşte funcţia $f(x,y)$:

$$f(x,y) := x + y \cdot |\sin(x)| + e^{-3y}$$

Pasul 2. Se definesc limitele domeniului de definiţie a funcţiei $f(x,y)$. Se ia un număr de $2Nx$, respectiv $2Ny$ de puncte de calcul pe cele două intervale :

$a := 0$ $\quad$ $b := 5$ $\quad$ $c := -2$ $\quad$ $d := 4$ $\quad$ $Nx := 10^2$ $\quad$ $Ny := 10^2$

Pasul 3. Se determină paşii integrare pe intervalele $[a,b]$ şi $[c,d]$:

$$h_x := \frac{b-a}{2 \cdot Nx} \qquad h_y := \frac{d-c}{2 \cdot Ny} \qquad h_x = 0.025 \qquad h_y = 0.03$$

Calculul Integralei Duble

Pasul 4. Se determină punctele intermediare x_i şi y_i de calcul pe cele două intervale:

$$i := 0..2Nx \qquad j := 0..2Ny \qquad x_i := a + i \cdot h_x \qquad y_j := c + j \cdot h_y$$

Pasul 5. Se integrează funcţia $f(x,y)$ după variabila y utilizând formula lui Simpson pentru fiecare punct intermediar y:

$$k := 2,4..2 \cdot Ny - 2 \qquad l := 1,3..2 \cdot Ny - 1$$

$$I_{x_i} := \frac{h_y}{3} \cdot \left[f(x_i, y_0) + f(x_i, y_{2 \cdot Ny}) + 2 \cdot \left(\sum_k f(x_i, y_k) \right) + 4 \cdot \sum_l f(x_i, y_l) \right]$$

Pasul 6. Se integrează funcţia $f(x,y)$ după variabila x utilizând formula lui Simpson pentru fiecare punct intermediar x:

$$k := 2,4..2 \cdot Nx - 2 \qquad l := 1,3..2 \cdot Nx - 1$$

$$I_d := \frac{h_x}{3} \cdot \left(I_{x_0} + I_{x_{2 \cdot Nx}} + 2 \cdot \sum_k I_{x_k} + 4 \cdot \sum_l I_{x_l} \right) \qquad I_d = 767.0839468763276$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Pasul 7. Se evaluează valoarea integralei duble a funcției $f(x,y)$ după variabilele x și y folosindu-se operatorul de integrare din *Mathcad* (dacă s-ar cunasște forma analitică a funcției):

$$I_{def} := \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx \qquad I_{def} = 767.0833318910629$$

Pasul 8. Se determină eroarea absolută dintre rezultatul obținut prin formula lui Simpson și cel returnat de operatorul din *Mathcad*:

$$Er := \left| I_{def} - I_d \right| \qquad Er = 6.15 \times 10^{-4}$$

Fie funcția: $f(x)=e^x+\sin(x)+x^6-5\cdot x^3+2\cdot x-1$ să se determine derivata ei pe intervalul [5,10].

Pasul 1. Se definește funcția *f(x)*.

$$f(x):=e^x+\sin(x)+x^6-5\cdot x^3+2\cdot x-1$$

Pasul 2. Se definește intervalul de derivare și setul de puncte intemediare în care se determină valoarea derivatei.

$$a:=5 \qquad b:=10 \qquad N:=100 \qquad h:=\frac{b-a}{N} \qquad h=0.05 \qquad i:=0..N$$

$$x_0:=a \qquad x_i:=x_0+h\cdot i \qquad y_i:=f(x_i)$$

Pasul 3. Se calculează derivata funției în puntele x_i.

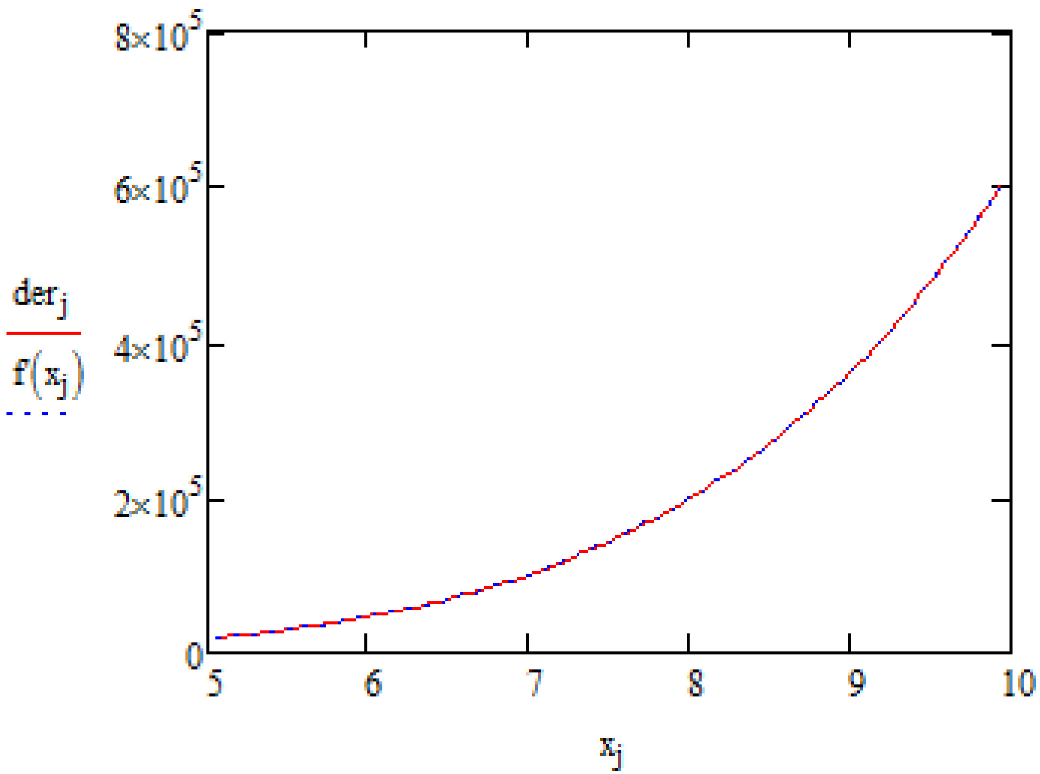
$$j:=1..N-1$$

$$der_j:=\frac{1}{2\cdot h}\cdot\left(y_{j+1}-y_{j-1}\right)$$

Pasul 4. Se determină derivata analitică a funcției *f(x)*.

$$f`(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

Pasul 5. Se secompară grafic rezultatel obținute:



Metode Numerice de Integrare și Derivare a Funcțiilor date Numeric

Ș.l. Dr.Ing. Levente CZUMBIL

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA