



Metode Numerice – Lucrarea nr. 6

APROXIMAREA ANALITICĂ A FUNCȚIILOR NUMERICE

Modelul matematic și metodele numerice utilizate

Aproximarea utilizând funcții spline

Metodele de aproximare cu funcții spline utilizează porțiuni de polinoame $P_n(x_i)$ de gradul m , mult mai mic decât numărul de puncte în care se cunoaște valoarea lui $f(x)$. Coeficienții funcțiilor spline rezultă din condiții de forma $P_n(x_i) = y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, la care se adaugă și cele legate de egalitatea valorilor derivatelor segmentelor de polinoame în punctele date. Se utilizează funcții de aproximare de tip spline parabolice și cubice.

Datele inițiale sunt numărul de puncte cunoscute, pasul de discretizare pentru valorile lui x , punctele în care se cunoaște funcția și valorile lui x pentru care se cere aproximarea valorilor funcției $f(x)$. Rezultatele intermediare sunt cele legate de obținerea și rezolvarea sistemului liniar de ecuații care duce la determinarea coeficienților funcțiilor spline iar rezultatele finale sunt valorile approximate ale funcției în punctele de interes.

Termenul de spline (engleză: dispozitiv pentru trasarea curbilor netede) a fost introdus pentru a desemna o funcție formată din mai multe polinoame, definite pe intervale adiacente și care se racordează între ele împreună cu un număr de derivate ale acestora. Se dorește determinarea unei funcții de interpolare netedă (funcția spline) care să nu aibă oscilații prea mari între puncte și utilizează pe fiecare interval un polinom diferit impunând condiții de continuitate și derivabilitate la trecerea prin nodurile rețelei de interpolare.

Funcțiile spline sunt foarte utile în aplicații practice, de exemplu la integrarea numerică: calculul sarcinii electrice distribuite pe o curbă, pe suprafață sau pe volum ori pentru calcule de câmp electromagnetic.

Având funcția $f(x)$ dată tabelar și o funcție $s(x)$ definită pe intervalul $[a, b]$ ($a = x_1, b = x_n$) care interpoalează neted funcția:

$$s(x_i) = f(x_i) = y_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

pentru a obține un grafic neted impunându-se condițiile ca $s'(x)$ și $s''(x)$ să fie continue



Funcția $s(x)$ care este un polinom de gradul 3 pe intervalul $[x_{j-1}, x_j]$, ($j = 2, \dots, n$) cu condiția $s''(x_1) = \dots = s''(x_n) = 0$ și care interpolează setul de date (x_j, y_j) se numește funcție spline cubică.

Fie un set de noduri $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ $x_k - x_{k-1} = h$, $\forall k \geq 1$ în care se dorește interpolarea unei funcții $f(x)$ cu polinoame spline cubice. Se definesc nodurile din afara spațiului:

$$\begin{aligned} x_{-3} &= a - 3h; & x_{-2} &= a - 2h; & x_{-1} &= a - h; \\ x_{n+1} &= b + h; & x_{n+2} &= b + 2h; & x_{n+3} &= b + 3h \end{aligned} \quad (2)$$

În acest caz se definește funcția:

$$B(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ (x+2)^3, & -2 \leq x \leq -1 \\ 1 + 3(x+1) + 3(x+1)^2 - 3(x+1)^3, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ (2-x)^3, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & 2 \leq x \end{cases} \quad (3)$$

Pentru interpolare se fac următoarele modificări:

$$B_i(x) = \underbrace{B\left(\frac{x-x_i}{h}\right)}_{\text{aceeasi forma dar centrat in } x_i}, \quad -1 \leq i \leq n+1 \quad (4)$$

Polinomul de interpolare spline cubic este:

$$s_3(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \cdot B_i(x) \quad (5)$$

Unde c_i sunt coeficienții necunoscuți care se calculează din condiția:

$$s_3(x_k) = f(x_k) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \cdot B_i(x_k) \quad (6)$$

și ținând cont de proprietățile funcției $B(x)$ rezultă:

$$f(x_k) = c_{k-1} B_{k-1}(x_k) + c_k B_k(x_k) + c_{k+1} B_{k+1}(x_k) = c_{k-1} + 4c_k + c_{k+1} \quad (7)$$

Se obține un sistem liniar cu $n+1$ ecuații și $n+3$ necunoscute din care se pot determina coeficienții funcției spline:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ \dots \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \dots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Dacă $f \in C^4([a, b])$ și s este un interpolant spline cubic pentru f pe spațiul intervalului $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ cu $x_i - x_{i-1} \leq h$ atunci se poate defini eroarea de interpolare astfel:

$$\|f - s\|_\infty \leq \frac{5}{384} \cdot h^4 \cdot \|f^{(4)}\|_\infty \quad (9)$$



Instrumente utilizate

Funcția predefinită „interp” folosită în combinație cu funcții de tip Spline

Funcția predefinită **interp** permite interpolare funcțiilor date prin valorile acestora în puncte. Această funcție este apelată în modul următor:

$$f(z) := \text{interp}(M, X, Y, z) \quad (10)$$

unde: M – este un vector de coeficienți returnat de o funcție de tip spline cum ar fi funcția liniară *lspline*, funcția cubică *cspline*, funcția parabolică *pspline* sau funcția *bspline*; X, Y – sunt vectorii punctelor în care se cunosc valorile funcției de interpolat, respectiv vectorul valorilor funcției în aceste puncte; z – este variabila care indică punctul în care se dorește determinată valoarea funcției interpolate.

Funcțiile spline care returnează vectorul M se apelează astfel:

$$M := \text{lspline}(X, Y) \quad (11)$$

Observație: $\text{linterp}(x, y(x), z)$ – returnează o funcție de interpolare liniară pe un interval de valori z (x fiind valorile în care se cunoaște funcția $y(x)$).

Blocul „GIVEN-MINERR”

Blocul **GIVEN-MINERR** permite asemănător blocului **GIVEN-FIND** rezolvarea sistemelor de ecuații. Avantajul acestui bloc față de clasicul **GIVEN-FIND** este că în cazul în care sistemul de ecuații nu are soluție, atunci în loc de mesajul de eroare returnat de blocul **GIVEN-FIND**, blocul **GIVEN-MINERR** returnează o soluție aproximativă obținută prin metoda minimizării abaterii medii pătratice. Blocul are următoarea structură:

$$\begin{aligned} &Nec1.....Nec2.... \\ &GIVEN \\ &Ecuatie1 \\ &Ecuatie2 \\ &... \\ &EcuatieN \\ &Sol := \text{Minerr}(Nec1 \ Nec2 \ \dots \ NecN) \end{aligned} \quad (12)$$

unde: $Ecuatie1, \dots, EcuatieN$ – sunt ecuațiile care formează sistemul de ecuații. Ecuațiile se definesc cu ajutorul egalului boolean (combinația de taste „Ctrl+=”); $Nec1, \dots, NecN$ – sunt necunoscutele sistemului de ecuații. Acestea trebuie inițializate prealabil (înaintea comenzii GIVEN) cu niște valori aleatoare; Sol – este vectorul de soluții a sistemului de ecuații.

Funcții predefinită de aproximare



Programul MathCad conține o serie de funcții predefinite pentru aproximarea funcțiilor date în puncte cum ar fi de exemplu: *expfit* și *genfit* pentru funcții exponențiale, *logfofit* pentru funcții logaritmice, respectiv *line*, *medfit* și *linfit* pentru funcții liniare și polinomiale.

Aceste funcții sunt apelate după modelul prezentat mai jos. De exemplu în cazul funcției exponențiale *expfit*, care determină coeficienții unei funcții polinomiale de genul: $f(x) = Coef_0 \cdot e^{Coef_1 \cdot x} + Coef_2$, avem:

$$Coef := \text{expfit}(X, Y, Coef) \quad (13)$$

unde: X, Y – sunt vectorii punctelor în care se cunosc valorile funcției de interpolat, respectiv vectorul valorilor funcției în aceste puncte; $Coef$ – este vectorul de coeficienți ai funcției de aproximare care trebuie inițializate în prealabil cu valori aleatoare.