



Metode Numerice – Lucrarea nr. 7

APROXIMAREA FUNCȚIILOR PRIN POLINOAME DE INTERPOLARE

Modelul matematic și metodele numerice utilizate

Accentuarea problematicii interpolării decurge din faptul că există numeroase aplicații din domeniul ingineriei electrice care se bazează pe aproximare și interpolare, precum și faptul că interpolarea polinomială stă la baza multor metode numerice primare.

Există justificări consistente pentru aproximarea unor funcții, fie că acestea sunt definite analitic, fie că sunt definite numeric. Aproximarea unei funcții exprimată analitic sub forma unor formule explicite, implicite sau parametrice, sub forma unor serii, a unui algoritm se face cu scopul simplificării calculelor de evaluare a mărimii funcției, a derivatelor acesteia sau a integralei definite. Evaluarea unei funcții definită sub formă numerică, presupune aproximarea ei (interpolarea) în intervalele dintre nodurile rețelei în orice punct al domeniului de definiție. Dacă nu există informații asupra problemei electrotehnice care a generat modelul matematic, atunci cel mai des se utilizează pentru interpolare polinoame pentru a putea fi prelucrată ușor în continuare (interpolare, derivare, integrare etc.) evaluarea funcției reducându-se la operații aritmetice elementare (adunări și înmulțiri).

Pentru aproximarea funcțiilor prin polinoame de interpolare se utilizează în principal următoarele tipuri de polinoame de interpolare:

- Polinoame de interpolare de tip Lagrange
- Polinoame de interpolare bazate pe diferențe (de tip Newton, Gauss, Bessel)

Polinoame de interpolare de tip Lagrange

În aplicațiile electrotehnice alegerea funcției de aproximare se bazează și pe cunoașterea formei funcției care trebuie aproximată ținând cont de informațiile asupra aplicației practice care a generat modelul matematic.

Problema care se pune este determinarea polinomului p_n care satisface relația $|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$, unde $f(x)$ este o funcție definită și continuă pe intervalul $[a, b]$, $f \in C_{[a,b]}$, iar $\forall \varepsilon > 0$. Cunoscând valorile funcției $f(x)$, determinate experimental prin măsurători în nodurile x_i , $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b] \rightarrow f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, $x_i \neq x_j, i \neq j$, $y_i = f(x_i)$, se pune problema determinării valorilor funcției în alte puncte, adică găsirea unui polinom p_n , astfel încât:



$p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$. Polinomul p_n trebuie să coincidă cu $f(x)$ pe $n+1$ puncte. Se știe că există un polinom și numai unul de grad mai mic ca n care îndeplinește această condiție. Acesta este polinomul de interpolare.

În plus are loc formula aproximativă:

$$f(x) \cong p(x) \quad \forall x \in [a, b]; \quad f(x_i) = p(x_i) = y_i, \quad i \in [0, n] \quad (1)$$

unde $p(x)$ este unic pentru un tabel dat iar f și p au aceleași valori în nodurile fixate.

Se poate construi polinomul de interpolare de tip Lagrange $L_n(x)$ de grad cel mult n :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot l_i(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot l_i(x) \stackrel{\text{not}}{=} L_n(x) \quad (2)$$

cu funcțiile de bază:

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad (3)$$

$$l_i(x_k) = \delta_{ki} = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & k = i \end{cases} \quad 0 \leq i, k \leq n \quad (4)$$

$$L_n(x_i) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot l_i(x_k) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \delta_{ki} = y_i \quad (5)$$

deci $L_n(x_i) = y_i = f(x_i)$.

Deci $L_n(x)$ este polinomul Lagrange de interpolare asociat tabelului de valori $x_i \leftrightarrow y_i$. Formula $f(x) \cong L_n(x)$ este sugerată de faptul că $f(x_i) = L_n(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$, adică funcția f și polinomul L_n au aceleași valori în nodurile fixate.

Avem formula de interpolare a lui Lagrange exactă:

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x) \quad (6)$$

unde $R_n(x)$ este restul formulei de interpolare de tip Lagrange și are forma:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n) \quad (7)$$

iar ξ este un punct din cel mai mic interval care conține nodurile x_0, x_1, \dots, x_n și variabila x .

Interpolarea Newton cu diferențe divizate

Presupunem că $L_n(x)$ este polinomul Lagrange de grad n care interpoolează funcția $f(x)$ în nodurile distincte x_0, x_1, \dots, x_n . Diferențele divizate ale funcției $f(x)$ sunt utilizate pentru a exprima polinomul $L_n(x)$ sub forma lui Newton $N_n(x)$, iar polinomul se va scrie sub o formă generalizată:

$$L_n(x) = N_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1}) \quad (8)$$



Pentru determinarea coeficienților a_0, a_1, \dots, a_n , evaluăm polinomul în noduri:

$$x = x_0 \Rightarrow a_0 = N_n(x_0) = f(x_0)$$

$$x = x_1 \Rightarrow f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = N_n(x_1) = f(x_1) \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (9)$$

Expresiile $\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$ $i = 1, \dots, n$, se numesc diferențe divizate de ordinul I ale lui f pe

nodurile x_i , și se notează $f[x_{i-1}, x_i]$ sau $[x_{i-1}, x_i; f]$. Diferențele divizate de ordinul $(k+1)$:

$$f[x_{i-1}, x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_{i-1}, x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_{i-1}} \quad (10)$$

Diferențele divizate de ordinul 0 pe un nod:

$$f[x_0] = f(x_0) \quad (11)$$

Diferențele divizate liniare de ordinul 1 pe două noduri:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \quad (12)$$

Diferențele divizate de ordinul 2 pe trei noduri:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \quad (13)$$

Diferențele divizate de ordinul n pe $n+1$ noduri:

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad (14)$$

Se notează coeficienții polinomului de interpolare Newton astfel:

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1], \quad a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k] \quad (15)$$

Proprietățile diferențelor divizate: $f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$; $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_{\alpha_0}, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}]$;

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n \frac{f[x_i]}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_n)} \quad (15)$$

Dacă $f(x)$ este o funcție liniară avem $f[x_0, x] = f[x_0, x_1]$ pentru că valoarea derivatei este constantă.

$$f[x_0, x] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} \Rightarrow f[x] = f[x_0] + f[x_0, x] \cdot (x - x_0) - \text{funcția și polinomul coincid}$$

Dacă $f(x)$ este o funcție neliniară gradul n , aproximarea ei prin polinomul de interpolare Newton este:

$$f(x) = N_n(x) + R_n(x) \quad (16)$$



$$N_n(x) = \underbrace{f[x_0] + (x-x_0)f[x_0, x_1]}_{N_1(x)=f(x)-R_0(x)=f(x)} + \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2]}_{R_1(x)} + (x-x_0)\dots(x-x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n]$$

$N_2(x)$

iar restul este:

$$R_n(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n)f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] \quad (17)$$