Metode Numerice – Lucrarea nr. 8

EVALUAREA INTEGRRALEI DEFINITE A FUNCȚIILOR DATE NUMERIC

Modelul matematic și metodele numerice utilizate

Cuadratura este o procedură numerică prin care valoarea unei integrale definite $\int_a^b f(x)dx$ este aproximată folosind informații despre integrând numai în anumite puncte (de exemplu se cunosc valorile funcției în puncte pe baza unor măsurători experimentale). Pentru rezolvarea problemelor enunțate se pot utiliza următoarele metode de integrare numerică:

- Metode de integrare clasice de tip Newton-Côtes (metoda trapezelor, metoda Simpson);
- Metode de integrare generalizate de tip Newton-Côtes (metoda trapezelor generalizată, metoda Simpson generalizată);
- Metode de integrare de tip Romberg;
- Metode de integrare clasice de tip Gauss.

Metode de integrare de tip Newton-Cotes

Se consideră funcția $f:[a,b]\to R$ continuă pe intervalul [a,b] pentru care se dorește aproximarea numerică a valorii integralei $I=\int_a^b f(x)dx$ atunci când integrala nu poate fi direct calculabilă sau funcția este cunoscută doar în cele *n+1* puncte distincte, adică în nodurile $x_i, y_i = f(x_i)\ i=0,\dots,n,\quad x_i\in[a,b]$, aceste situații fiind caracteristice și aplicațiilor din ingineria electrică. Se utilizează aproximarea funcției *f(x)* prin polinoame de interpolare de tip Lagrange $f(x)=L_n(x)+R_n(x)$, punctele date în intervalul [a,b] fiind echidistante, cu pasul de discretizare $h=x_{i+1}-x_i$, primul și ultimul punct corespunzând capetelor intervalului [a,b], $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b,\quad x_k=a+k\cdot h,\quad h=\dfrac{b-a}{n}$.

Formula de cuadratură (integrare numerică) Newton-Côtes este:

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b L_n(x)dx+\int_a^b R_n(x)dx=\int_a^b\left[\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot l_i(x)\right]dx+\int_a^b\left[\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\right]dx \qquad (1)$$

unde: ξ este un punct intermediar din cel mai mic interval care conține nodurile $x_0, x_1,\dots, x_n$ și $\xi(x)\in[a,b]$ pentru orice *x*.

În continuare se vor considera cazurile în care formulele se deduc utilizând funcțiile Lagrange de interpolare de ordinul I (formula trapezului) și de ordinul II (formula lui Simpson) cu nodurile echidistante. Aceste formule au fost numite de Gautschi ca și „caii de bătaie” ai integrării numerice ele făcându-și foarte bine treaba atunci când intervalul de integrare este mărginit și integrandul este neproblematic.

Metoda de integrare a trapezelor

Formula clasică a trapezelor rezultă prin particularizarea cea mai simplă a versiunii clasice a metodei Newton-Côtes, pentru *n=1*. Deci este o aplicație directă a interpolării liniare Lagrange în două puncte. Se cunoaște funcția în două noduri $x_0 = a,\ x_1 = b \Rightarrow f(x_0),\ f(x_1);\ h = (b-a)$, și se dorește calculul aproximativ al integralei definite $\int_a^b f(x)dx$, utilizând polinomul liniar de interpolare Lagrange adică scriind funcția $f(x) = L_1(x) + R_1(x)$. Deci integrala calculată cu formula trapezului este:

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{I_{Trapez}(f)} = \underbrace{\int_a^b L_1(x)dx}_{I_{Trapez}(L_1)} + \underbrace{\int_a^b R_1(x)dx}_{Eroare_{Trapez}} \tag{2}$$

unde: $x_0 = a < \xi < x_1 = b$ restul și polinomul de interpolare Lagrange de ordinul I sunt:

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)\,;\, L_1(x) = \sum_{i=0}^{1} l_i(x)\cdot f(x_i) \underbrace{=}_{\substack{x_0=a\\ x_1=b}} \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \tag{3}$$

Deci integrând polinomul Lagrange și restul se obține formula trapezului:

$$I_{Trapez}(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\cdot[f(a)+f(b)] \underbrace{- \frac{(b-a)^3}{12}\cdot f''(\xi)}_{Eroare_{Trapez}}; \tag{4}$$

Dacă există $M_2>0$ astfel încât $|f''(x)| \le M_2$ pentru orice $x \in [a,b]$ atunci are loc relația:

$$|Eroare_{Trapez}| \le \frac{1}{2}\cdot\frac{(b-a)^3}{6}\cdot M_2\,; \tag{5}$$

Metoda trapezelor generalizată

Pentru creșterea preciziei calculului, intervalul [a,b] poate fi divizat în *n* subintervale egale: $i=\overline{1,n}$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,\ \ x_i = a + i\cdot h,\ \ h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} > 0$, pe care se aplică repetat formula trapezului, adică:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx\right); \tag{6}$$

Deci aplicând formula trapezului pe n subintervale se obține formula trapezului generalizată pentru $x_0 = a;\ x_n = b$, iar geometric înseamnă că funcția *f(x)* s-a aproximat cu n segmente de dreaptă între două noduri succesive de abscise x_i, x_{i+1} adică integrala rezultă prin însumarea ariilor tuturor celor n trapeze care se formează între punctele *a* și *b*.

Deci formula trapezelor generalizată cu $\xi \in (a,b)$, este:

$$I_{TrapezGen}(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(a)+f(b)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] \underbrace{-\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)}_{Eroare_{TrapezGen}}; \tag{7}$$

Dacă există *M2>0* astfel încât $|f''(x)| \le M_2$ pentru orice $x \in [a,b]$ atunci eroarea pentru metoda generalizată:

$$|Eroare_{TrapezGen}| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 = \frac{1}{12}\cdot\frac{h^3}{n^3}\cdot M_2; \tag{8}$$

Metoda de integrare Simpson

Formula clasică a lui Simpson rezultă prin particularizarea versiunii generale a metodei Newton-Côtes, pentru *n=2*. Se cunosc valorile funcție *f(x)* în trei noduri echidistante:

$$\begin{gathered} x_0 = a,\ x_1 = c = \frac{a+b}{2},\ x_2 = b \Rightarrow f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2); \\ x_1 = x_0 + h,\ \ x_2 = x_0 + 2h,\ h = b - c = c - a = \frac{(b-a)}{2} \end{gathered} \tag{9}$$

Iar polinomul de interpolare Lagrange de ordin doi este cel cu care se aproximează funcția de sub integrala definită, $f(x) = L_2(x) + R_2(x)$. Deci integrala definită va fi:

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{I_{Simpson}(f)} = \underbrace{\int_a^b L_2(x)dx}_{I_{Simson}(L_2)} + \underbrace{\int_a^b R_2(x)dx}_{Eroare_{Simpson}}; \tag{10}$$

unde $x_0 = a < \xi < x_1 = b$ restul și polinomul de interpolare Lagrange de ordin II sunt:

$$\begin{gathered} R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)(x-c)(x-b); \\ L_2(x) = \sum_{i=0}^{1} l_i(x)\cdot f(x_i) \underbrace{=}_{\substack{x_0=a \\ x_1=b}} \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} f(b) \end{gathered} \tag{11}$$

Deci formula lui Simpson se va scrie:

$$I_{Simpson}(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6}(f(a) + 4\cdot f(c) + f(b)) \underbrace{-\frac{(b-a)^5}{2880}\cdot f'''(\xi)}_{Eroare_{Simpson}} \tag{12}$$

Dacă există *M3>0* astfel încât $|f'''(x)| \le M_3$ pentru orice $x \in [a,b]$ atunci are loc relația:

$$|Eroare_{Simpson}| \le \frac{(b-a)^5}{2880}\cdot M_3 \tag{13}$$

Metoda de integrare generalizată a lui Simpson pe perechi de subintervale

Formula generalizată a lui Simpson reprezintă aplicarea repetată a formulei clasice a lui Simpson pe m subintervale de lungime *2h*, obținute prin divizarea intervalului [a,b] în *n=2m* părți egale, definite de punctele x_i, $i=0,1,2,\ldots,n$ în care se cunosc valorile funcției $f(x)$. Cele m subintervale de forma $[x_{2i-2}, x_{2i}]$, $i=1,2,\ldots,m$ cu $x_0=a,\ x_n=b$ și pasul de discretizare $h=\frac{(b-a)}{n}$. Aplicând pentru fiecare subinterval formula clasică a lui Simpson se obține:

$$I_{SimpsonGen}(f)=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\left[f(x_0)+f(x_{2m})+4\cdot\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1})+2\cdot\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k})\right]\underbrace{-\frac{(b-a)^5}{2880\cdot m^4}\cdot f^{(4)}(\xi)}_{Eroarea_{Simpson}} \quad (14)$$

Dacă presupunem că există $M_4>0$ astfel încât $\left|f^{(4)}(x)\right|\le M_4$ pentru orice $x\in[a,b]$ atunci are loc relația:

$$\left|Eroarea_{SimpsonGen}\right|\le\frac{(b-a)^5}{2880\cdot m^4}\cdot M_4 \quad (15)$$