



Metode Numerice – Lucrarea nr. 10

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

Rezolvarea ecuațiilor diferențiale

Modelul matematic cel mai des întâlnit al fenomenelor care stau la baza majorității aplicațiilor din tehnică electrotehnică este ecuația diferențială. Rezolvarea exactă a ecuațiilor diferențiale ordinare este posibilă pentru o clasă foarte restrânsă de ecuații.

O ecuație diferențială este o ecuație care conține pe lângă variabilele independente și funcțiile necunoscute și derivatele acestor funcții (sau diferențialele lor) până la ordinul n inclusiv (numărul n reprezintă ordinul ecuației diferențiale).

O ecuație diferențială se numește ordinară dacă conține o singură variabilă independentă și are forma generală:

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale conțin mai multe variabile independente și derivatele parțiale ale funcțiilor necunoscute.

$$y\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (2)$$

Integrarea unei ecuații diferențiale de ordin n implică impunerea a n condiții. Avem următoarele situații:

- Dacă toate cele n condiții (valori) sunt date pentru aceeași valoare a variabilei independente, integrarea se face cu condiții inițiale impuse la început în problemă (problema Cauchy);
- Când intervin diverse valori ale variabilei independente, rezolvarea se face cu condiții la limită.

Comportarea dinamică a sistemelor fizice conduce la modele matematice formate din ecuații diferențiale ordinare sau sisteme de ecuații diferențiale care nu pot fi rezolvate pe cale analitică (funcții complicate ca formă sau funcții cunoscute doar pe baza unor valori în puncte date tabelar și obținute pe cale experimentală). Din acest motiv se recurge la rezolvarea numerică a acestora.

Metoda dezvoltării în serie Taylor

Fie funcția $f : I \times R \rightarrow R$, unde I este un interval real, f fiind o funcție continuă dată, iar $y_0 \in R$ fiind valoarea inițială.



Ne propunem să evaluăm funcția $y: I \rightarrow R$ în nodurile $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ aparținând intervalului de definiție, care satisface problema cu valori (condiții) inițiale (problema Cauchy):

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, x_0 \in I \quad (3)$$

Se dezvoltă în serie Taylor soluția ecuației în jurul punctului x_0 :

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} y^{(n)}(x_0) + R_n(x) \quad (4)$$

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot y^{(n+1)}(\xi), \xi \in [x_0, x] \quad (5)$$

Înlocuind $x = x_0 + h$, (h fiind pasul) și restul $R_n(x) = 0$ se obține neglijând ultimul termen al seriei, valoarea aproximativă y_1 .

Termenii seriei Taylor:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \quad y'(x_0) = f(x_0, y_0), \quad y'' = f_x + f \cdot f_y \\ y''' &= f_{xx} + (2f_{xy} + f \cdot f_{yy}) \cdot f + (f_x + f \cdot f_y) \cdot f_y \end{aligned} \quad (6)$$

unde:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}; f_y = \frac{\partial f}{\partial y}; f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}; f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (7)$$

iar:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x, y) &= f_x^{(n-1)}(x, y) + f_y^{(n-1)}(x, y) \cdot f(x, y) \\ f^{(0)}(x, y) &= f(x, y) \Rightarrow y^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x, y(x)) \end{aligned} \quad (8)$$

Pentru $n = 2$ rezultă

$$y_1 = y_0 + h \cdot \left(f + \frac{h}{2} \cdot (f_x + f \cdot f_y) \right) \quad (9)$$

Prin recurență $\Rightarrow y_2, \dots, y_n$

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot \left(f + \frac{h}{2} \cdot (f_x + f \cdot f_y) \right) \quad (10)$$

Aproximația este cu atât mai bună cu cât numărul de termeni luați în considerare în dezvoltarea Taylor este mai mare. Metoda este directă întrucât pentru calculul lui y_{i+1} sunt necesare informații doar despre punctul anterior (x_i, y_i) .

Metoda lui Euler (forma clasică)

Este cea mai simplă metodă de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale ordinare. Se obține din metoda Taylor pentru $n = 1$, adică se rețin numai primii doi termeni din dezvoltare rezultând forma explicită a metodei lui Euler:

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (11)$$



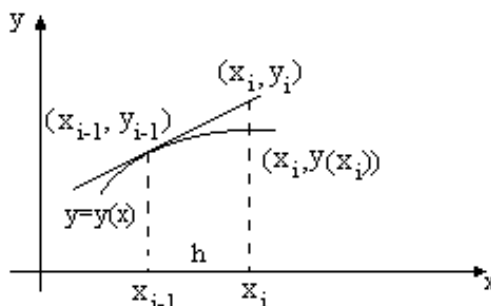
Interpretare geometrică: (se alege un pas de integrare h astfel încât intervalul de definiție $[x_0, b]$ să fie împărțit în pași egali: $h = \frac{b-x_0}{n}$).

Avem bineînțeles aceeași problemă de rezolvare a ecuațiilor diferențiale cu condiții inițiale:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (12)$$

și curba soluției $y = y(x)$.

Prin metoda lui Euler soluția în nodul x_i se aproximează cu ordonata punctului de intersecție a tangentei la curbă în punctul (x_{i-1}, y_{i-1}) cu dreapta $x = x_i$, după cum se poate observa în figura alăturată:



Ecuația tangentei:

$$y = y_{i-1} + (x - x_{i-1}) \cdot y'_{i-1} \quad (13)$$

și cum $y'(x) = f(x_{i-1}, y_{i-1})$ rezultă formula de recurență a algoritmului Euler:

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) \quad (14)$$

Metodele de tip Runge-Kutta

Metodele lui Euler implică necesitatea evaluării derivatelor de ordin superior ale funcției $y(x)$ respectiv ale funcției $f(x, y)$ care duc la dificultăți în aproximarea numerică a derivatelor de ordin superior.

În schimb metodele de tip Runge – Kutta evită în totalitate utilizarea derivatelor de ordin superior ele folosind numai derivatele de ordin 1 ale funcției $y(x)$, adică valorile funcției $f(x, y)$. Se calculează valorile funcției $f(x, y)$ într-un număr de puncte intermediare ale intervalului $[x_{i-1}, x_i]$ pentru determinarea lui $y_i, i = \overline{1, n}$ cu o eroare minimă. Cu alte cuvinte metodele Runge – Kutta de integrare numerică a unei ecuații diferențiale, înlocuiesc calculul derivatelor funcției $f(x, y)$ prin evaluări ale sale în diverse puncte.

Fie ecuația diferențială ordinară cu condiții inițiale de forma:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (15)$$

unde: $f : D \rightarrow R, D \subset R^2$ este o funcție cu derivatele parțiale $\frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^j}$ continue pe D , unde $i + j = k$,

respectiv $k = \overline{1, m}$.



Fie $x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$; $x_i = x_0 + i \cdot h$, cu $i = 1, 2, \dots, m$, o diviziune echidistantă a intervalului $[x_0, b]$. Din rațiuni de simplificare a calculelor considerăm combinații liniare de valori ale funcției în anumite puncte ale intervalului $[x_i, x_{i-1}]$, soluția calculându-se cu o relație unipas de forma:

$$y_{i+1} = y_i + a_0 \cdot k_0 + a_1 \cdot k_1 + \dots + a_n \cdot k_n \quad (16)$$

unde, din condiția ca dezvoltarea în serie Taylor a membrului drept (în funcție de h) să coincidă cu membrul drept al formulei lui Taylor de ordinul $n+1$, avem și formula de mai jos și toți coeficienții după particularizări:

$$\begin{aligned} k_0 &= h \cdot f(x_i, y_i) \\ k_1 &= h \cdot f(x_i + \mu_1 \cdot h, y_i + \lambda_{10} \cdot k_0) \\ k_2 &= h \cdot f(x_i + \mu_2 \cdot h, y_i + \lambda_{20} \cdot k_0 + \lambda_{21} \cdot k_1) \\ &\dots\dots\dots \\ k_n &= h \cdot f(x_i + \mu_n \cdot h, y_i + \lambda_{n0} \cdot k_0 + \lambda_{n1} \cdot k_1 + \dots + \lambda_{n,n-1} \cdot k_{n-1}) \end{aligned} \quad (17)$$

unde y_0 este dat cu coeficienții a, μ, λ .

Particularizând parametrul n determinăm diverse formule de tip Runge – Kutta:

a) $n = 0$ (Runge – Kutta de ordin I), y_0 - dat

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \quad (18)$$

aceasta reprezentând formula lui Euler clasică.

b) $n = 1$ (Runge – Kutta de ordin II), y_0 - dat

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}(k_0 + k_1) \\ k_0 &= h \cdot f(x_i, y_i), \quad k_1 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_0) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2} \cdot [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h \cdot f(x_i, y_i))] \end{aligned} \quad (19)$$

aceasta reprezentând formula modificată a lui Euler.

c) $n = 2$ (Runge – Kutta de ordin III), y_0 - dat

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_0 + 4k_1 + k_2) \\ k_0 &= h \cdot f(x_i, y_i), \quad k_1 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right), \quad k_2 = h \cdot f(x_i + h, y_i + 2k_1 - k_0) \end{aligned} \quad (20)$$



d) $n = 3$ (Runge – Kutta de ordin IV), y_0 - dat

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \\k_0 &= h \cdot f(x_i, y_i), k_1 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right), \\k_2 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), k_3 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_2)\end{aligned} \tag{21}$$