

# Metode Numerice de Rezolvare a Sistemelor de Ecuații Diferențiale



Laboratorul de Cercetare  
în **METODE NUMERICE**  
**NUMERICAL METHODS**  
Research Laboratory

Technical University of Cluj-Napoca



*Ș.l. Dr. ing. Levente CZUMBIL*

E-mail: [Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro](mailto:Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro) WebPage: <http://users.utcluj.ro/~czumbil>

Se consideră un sistem de ecuații diferențiale ordinare cu condițiile inițiale de mai jos, această problemă fiind cunoscută după cum știm ca o problemă Cauchy sau problemă cu condiții inițiale:

$$y'_i = \frac{dy_i}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_r) \quad y_i(x_0) = y_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

Se cere determinarea funcțiilor  $y_i(x)$  care verifică sistemul și condițiile inițiale, adică determinarea valorilor  $y_{i,1}, y_{i,2}, y_{i,3}, \dots, y_{i,n}$  care să aproximeze cu o acuratețe cât mai mare valorile exacte  $y_i(x_1), y_i(x_2), \dots, y_i(x_n)$  ale funcțiilor  $y_i(x)$ .

**Observație:** Punctele  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sunt echidistante pasul fiind egal cu  $h$ :

$$x_{j+1} - x_j = h$$



Metodele de rezolvare rămân aceleași ca și la ecuațiile diferențiale. În continuare se prezintă o adaptare a acestor metode pentru rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale.

## Metoda lui Euler (metoda clasică)

Se aplică în  $n$  pași, valorile corespunzătoare ale funcțiilor  $y_i(x)$   $i = 1, 2, \dots, r$  la un pas  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  se determină cu relațiile:

$$y_{i,j} = y_{i,j-1} + h \cdot f_i(x_{j-1}, y_{1,j-1}, y_{2,j-1}, \dots, y_{r,j-1}) = y_{i,j-1} + h \cdot f_{i,j-1}$$

$y_{i,j}$   $i$  – identifică ecuația;  $j$  – identifică punctul intermediar

## Metoda lui Euler modificată

$$y_{i,j} = y_{i,j-1} + \frac{h}{2} \cdot [f_{i,j-1} + f_i(x_j, y_{1,j-1} + h \cdot f_{1,j-1}, y_{2,j-1} + h \cdot f_{2,j-1}, \dots, y_{r,j-1} + h \cdot f_{r,j-1})]$$

$$y'_i = \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_r)$$

$$f_{i,j} = f_i(x_j, y_{1,j}, y_{2,j}, \dots, y_{r,j})$$



# Metoda lui Euler

Se dă sistemul de ecuații diferențiale cu condiții inițiale Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} y_0(x) = \sin(x) - \frac{y_1(x)}{4} & y_0(0) = \frac{\pi}{5} \\ \frac{d}{dx} y_1(x) = \frac{3}{4} y_0(x) - 2\cos(x) & y_1(0) = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Să se determine valorile funcțiilor ,  $y_0(x)$ ,  $y_1(x)$  pe intervalul  $[0,10\pi]$ .

**Pasul 1.** Se definesc funcțiile caracteristice asociate ecuațiile diferențiale ce formează sistemul studiat.

$$f_1(x, y_0, y_1) := \sin(x) - \frac{y_1}{4}$$

$$f_2(x, y_0, y_1) := \frac{3}{4} \cdot y_0 - 2\cos(x)$$



**Pasul 2.** Se definesc capetele intervalului, numărul de puncte intermediare de calcul și se determină pasul de parcurgere al intervalului de definiție:

$$a := 0 \quad b := 10\pi \quad \underline{N} := 100 \quad h := \frac{b - a}{N} \quad h = 0.314$$

**Pasul 3.** Se determină șirul  $x_i$  de intermediare în care se dorește calcularea valorilor funcțiilor necunoscute  $y_i(x)$ :

$$i := 0..N \quad \underline{x}_i := a + h \cdot i$$

**Pasul 4.** Se introduc condițiile inițiale Cauchy care descriu soluțiile sistemului de ecuații diferențiale:

$$y0_0 := \frac{\pi}{5} \quad y1_0 := \frac{3\pi}{4}$$



**Pasul 5.** Se calculează valoarea funcțiilor necunoscute în punctele intermediare  $x_i$  folosindu-se metoda lui Euler (forma clasică):

$$\text{Rez} := \left\{ \begin{array}{l} Y_{0,0} \leftarrow y^0_0 \\ Y_{1,0} \leftarrow y^1_0 \\ \text{for } j \in 1..N \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_{0,j} \leftarrow Y_{0,j-1} + h \cdot f_1(x_{j-1}, Y_{0,j-1}, Y_{1,j-1}) \\ Y_{1,j} \leftarrow Y_{1,j-1} + h \cdot f_2(x_{j-1}, Y_{0,j-1}, Y_{1,j-1}) \end{array} \right. \\ Y \end{array} \right.$$

	0	1	2	3	4	5	6	
Rez =	0	0.628	0.443	0.393	0.469	0.647	0.89	1.152
	1	2.356	1.876	1.383	0.967	0.708	0.667	...

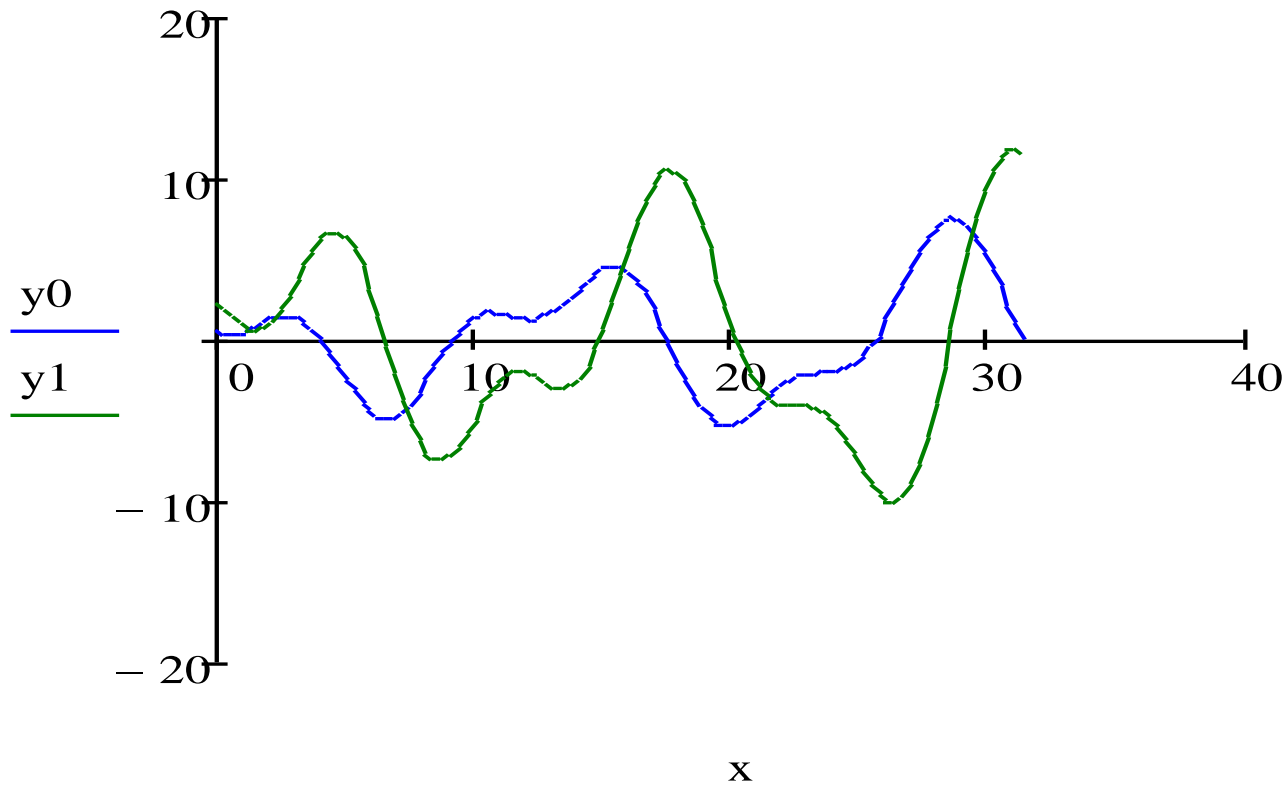
**Pasul 6.** Se extrag valorile funcțiilor necunoscute  $y_0(x)$ ,  $y_1(x)$ :

$$y_0 := (\text{Rez}^T)^{\langle 0 \rangle} \quad y_1 := (\text{Rez}^T)^{\langle 1 \rangle}$$



# Metoda lui Euler

**Pasul 7.** Se reprezintă grafic soluțiile sistemului de ecuații diferențiale:



## Metoda Runge-Kutta de ordinul IV:

$$k_{1,i} = h \cdot f_i(x_{j-1}, y_{1,j-1}, y_{2,j-1}, \dots, y_{r,j-1})$$

$$k_{2,i} = h \cdot f_i\left(x_{j-1} + \frac{1}{2}h, y_{1,j-1} + \frac{1}{2}k_{1,1}, y_{2,j-1}, \dots, y_{r,j-1} + \frac{1}{2}k_{1,r}\right)$$

$$k_{3,i} = h \cdot f_i\left(x_{j-1} + \frac{1}{2}h, y_{1,j-1} + \frac{1}{2}k_{2,1}, y_{2,j-1}, \dots, y_{r,j-1} + \frac{1}{2}k_{2,r}\right)$$

$$k_{4,i} = h \cdot f_i(x_j, y_{1,j-1} + k_{3,1}, y_{2,j-1} + k_{3,2}, \dots, y_{r,j-1} + k_{3,r})$$

$$y_{i,j} = y_{i,j-1} + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i})$$



## Funcția predefinită „rkfixed”

Funcția predefinită *rkfixed* rezolvă numeric un sistem de ecuații diferențiale prin metoda Runge-Kutta cu pas fix.

$$y := rkfixed (init, x_i, x_f, N, D)$$

## Funcția predefinită „Rkadapt”

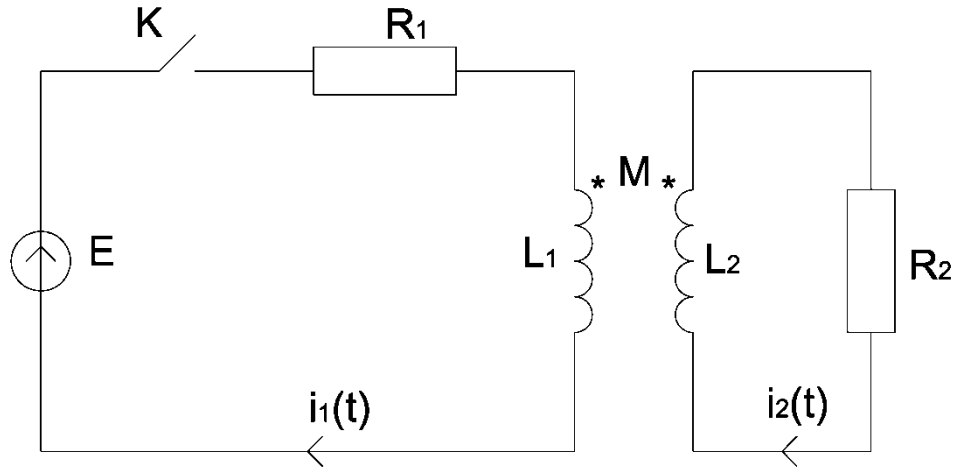
Funcția predefinită *rkadapt* rezolvă numeric un sistem de ecuații diferențiale prin metoda Runge-Kutta cu pas adaptativ.

$$y := Rkadapt(init, x_i, x_f, N, D)$$

Cele două funcții returnează o matrice, care conține pe prima coloană punctele intermediare de calcul, iar pe coloanele următoare valorile funcțiilor necunoscute în aceste puncte intermediare



**Problema 10.1:** Să se rezolve circuitul în regim tranzitoriu știind că pentru  $t < 0$ :  $i_1(0) = 0$  și  $i_2(0) = 0$ , respectiv  $E = V_0 = 100[\text{V}]$ ;  $L_1 = 100[\text{mH}]$ ;  $L_2 = 200[\text{mH}]$ ;  $M = 100[\text{mH}]$ ;  $R_1 = 20[\Omega]$ ;  $R_2 = 10[\Omega]$ .



**Pasul 1.** Se definesc teoremele lui Kirchhoff ce descriu circuitul studiat:

$$L_1 \cdot \frac{d}{dt} i_1(t) - M \cdot \frac{d}{dt} i_2(t) + R_1 \cdot i_1(t) = V_0$$

$$L_2 \cdot \frac{d}{dt} i_2(t) - M \cdot \frac{d}{dt} i_1(t) + R_2 \cdot i_2(t) = 0$$



**Pasul 2.** Se extrage derivata lui  $i_1(t)$  din prima ecuație și se înlocuiește în adoua ecuație:

$$\frac{d}{dt}i_1(t) = \frac{1}{L_1} \cdot \left( V_0 - R_1 \cdot i_1(t) + M \cdot \frac{d}{dt}i_2(t) \right)$$

$$L_2 \cdot \frac{d}{dt}i_2(t) - \frac{M}{L_1} \cdot \left( V_0 - R_1 \cdot i_1(t) + M \cdot \frac{d}{dt}i_2(t) \right) + R_2 \cdot i_2(t) = 0$$

**Pasul 3.** Se extrage derivata lui  $i_2(t)$  din a doua ecuație și se înlocuiește în prima ecuație :

$$\frac{d}{dt}i_1(t) = \frac{1}{L_1} \cdot \left( V_0 - R_1 \cdot i_1(t) + M \cdot \frac{d}{dt}i_2(t) \right)$$

$$L_2 \cdot \frac{d}{dt}i_2(t) - \frac{M}{L_1} \cdot \left( V_0 - R_1 \cdot i_1(t) + M \cdot \frac{d}{dt}i_2(t) \right) + R_2 \cdot i_2(t) = 0$$



**Pasul 4.** Se simplifică relațiile de definiție a derivatelor curenților  $i_1(t)$  și  $i_2(t)$ :

$$\frac{d}{dt}i_1(t) = \frac{1}{L_2 \cdot L_1 - M^2} \left[ V_0 \cdot L_2 - \left( L_2 + M - \frac{M^2}{L_1} \right) \cdot R_1 \cdot i_1(t) - M \cdot R_2 \cdot i_2(t) \right]$$

$$\frac{d}{dt}i_2(t) = \frac{1}{L_2 \cdot L_1 - M^2} \cdot (M \cdot V_0 - L_1 R_1 \cdot i_1(t) - L_1 \cdot R_2 \cdot i_2(t))$$

**Pasul 5.** Se definește vectorul de funcții  $F(t, I)$  asociat membrului drept al sistemului de ecuații diferențiale. Pentru indici 0,1 se folosește tasta „[”:

$$F(t, I) := \frac{1}{L_2 \cdot L_1 - M^2} \begin{bmatrix} V_0 \cdot L_2 - \left( L_2 + M - \frac{M^2}{L_1} \right) \cdot R_1 \cdot I_0 - M \cdot R_2 \cdot I_1 \\ M \cdot V_0 - L_1 R_1 \cdot I_0 - L_1 \cdot R_2 \cdot I_1 \end{bmatrix}$$



## Funcția predefinită "rkfixed"

**Pasul 6.** Se definesc capetele intervalului de studiu și numărul de puncte intermediare. Indicii  $i$  și  $f$  se introduc cu tasta „.”:

$$t_i := 0 \quad t_f := 0.2 \quad N := 1000$$

**Pasul 7.** Se definește vectorul valorilor inițiale:

$$I0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Pasul 8.** Se apelează funcția predefinită **Rkfixed**:

$$\text{Sol} := \text{rkfixed}(I0, t_i, t_f, N, F)$$

	0	1	2	3	4	5
0	0	$2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$
1	0	0.383	0.732	1.052	1.344	1.611
2	0	0.19	0.362	0.518	0.658	...

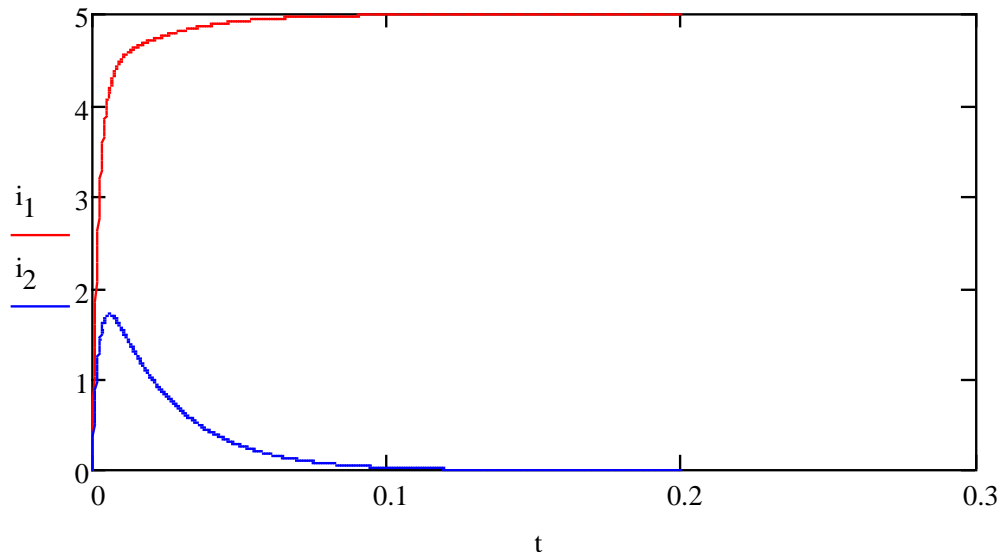


## Funcția predefinită "rkfixed"

**Pasul 9.** Se separă vectorul momentelor intermediare  $t$  și al valorilor curenților  $i1(x)$ , și  $i2(x)$  la aceste momente de timp din matricea  $Sol$  rezultată. Separarea vectorilor  $t$ ,  $i1$ , și  $i2$  se face cu ajutorul comenzii Matrix Column din toolbar-ul Matrix (combinația de taste "Ctrl+6"):

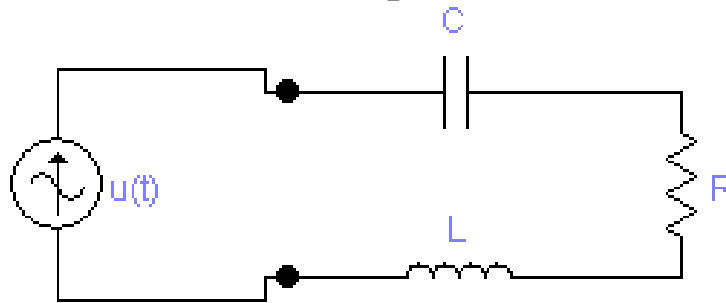
$$t := Sol^{<0>} \quad i_1 := Sol^{<1>} \quad i_2 := Sol^{<2>}$$

**Pasul 10.** Se reprezintă grafic curenții din cele două circuite cuplate magnetic:



# Rezolvarea ecuațiilor diferențiale de ordin superior

Se consideră un circuit R,L,C serie alimentat de la o tensiune oarecare  $u(t)$ . Să se determine variația sarcinii electrice și a intensității curentului electric din circuit în intervalul de timp de 60 ms ce trece de la începerea funcționării.



$$\underline{L} := 0.2 \text{ H} \quad \underline{C} := 30 \cdot 10^{-6} \text{ F} \quad \underline{R} := 12 \text{ } \Omega \quad \underline{u(t)} := 24 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t)$$

Se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff pentru circuitul R,L,C serie de mai sus:

$$L \cdot \frac{d}{dt} i(t) + R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt = u(t) \quad - \text{ ecuație integro diferențială}$$

Se aplică legea conservării sarcinii electrice:

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t) \Rightarrow q(t) = \int i(t) dt \quad \text{și} \quad \frac{d}{dt} i(t) = \frac{d^2}{dt^2} q(t)$$



# Rezolvarea ecuațiilor diferențiale de ordin superior

Se rescrie ecuația integro-diferențială obținută din teorema a doua a lui Kirchhoff sub formă de ecuație diferențială de ordinul II:

$$L \cdot \frac{d^2}{dt^2} q(t) + R \cdot \frac{d}{dt} q(t) + \frac{1}{C} \cdot q(t) = u(t)$$

Se transformă ecuația diferențială de ordinul II într-un sistem de ecuații diferențiale de ordinul I prin aplicarea următoarelor notații  $q_0(t) = q(t)$  și  $q_1(t) = q_0'(t)$

$$\begin{cases} q_1(t) = \frac{d}{dt} q_0(t) \\ L \cdot \frac{d}{dt} q_1(t) + R \cdot q_1(t) + \frac{1}{C} \cdot q_0(t) = u(t) \end{cases}$$

⇓

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q_0(t) = q_1(t) & q_0(0) = 0 \\ \frac{d}{dt} q_1(t) = \frac{u(t) - R \cdot q_1(t) - \frac{1}{C} \cdot q_0(t)}{L} & q_1(0) = 0 \end{cases}$$



## Funcția predefinită "Rkadapt"

**Pasul 1.** Se definește vectorul de funcții  $D(t,Q)$  asociat membrului drept al sistemului de ecuații diferențiale. Pentru indici 0,1 și 2 se folosește tasta „[”:

$$D(t, Q) := \begin{pmatrix} Q_1 \\ \frac{u(t) - R \cdot Q_1 - \frac{1}{C} \cdot Q_0}{L} \end{pmatrix}$$

**Pasul 2.** Se definesc capetele intervalului de studiu și numărul de puncte intermediare. Indicii  $i$  și  $f$  se introduc cu tasta „.”:

$$t_i := 0 \quad t_f := 60 \cdot 10^{-3} \quad N := 1000$$

**Pasul 3.** Se definește vectorul valorilor inițiale:

$$Q_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Pasul 4.** Se apelează funcția predefinită **Rkadapt**:

$$Sol := Rkadapt(Q_0, t_i, t_f, N, D)$$

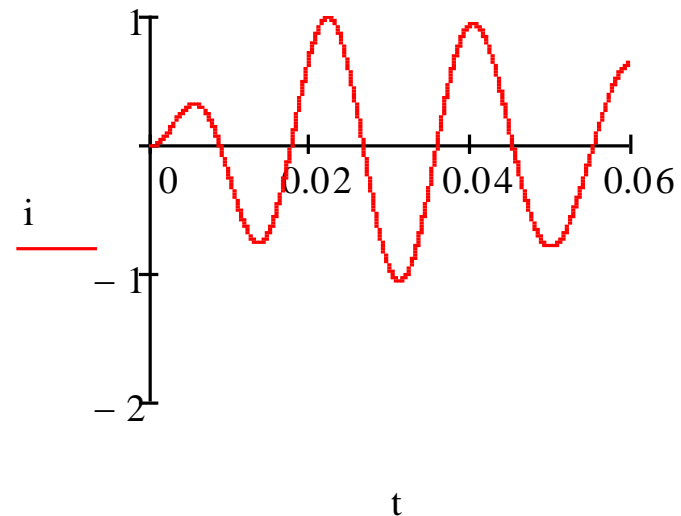
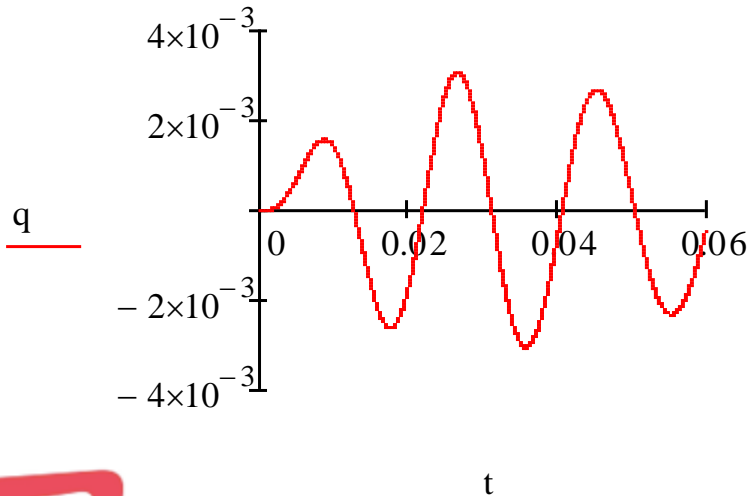


## Funcția predefinită "Rkadapt"

**Pasul 5.** Se separă vectorul punctelor intermediare  $t$  și al valorilor funcțiilor necunoscute  $q(t)$  și  $i(t)$  în aceste puncte din matricea  $Sol$  rezultată. Separarea vectorilor  $x$ ,  $y0$ ,  $y1$  și  $y2$  se face cu ajutorul comenzii Matrix Column din toolbar-ul Matrix (combinația de taste "Ctrl+6"):

$$t := Sol \langle 0 \rangle \quad q := Sol \langle 1 \rangle \quad i := Sol \langle 2 \rangle$$

**Pasul 6.** Se reprezintă grafic soluțiile sistemului de ecuații diferențiale:



# Metode Numerice de Rezolvare a Sistemelor de Ecuații Diferențiale

*Ș.l. Dr. ing.* Levente CZUMBIL

E-mail: [Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro](mailto:Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro)

WebPage: <http://users.utcluj.ro/~czumbil>

