Metode Numerice – Lucrarea nr. 11

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

Rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale

Se consideră un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare cu condiţiile iniţiale de mai jos, această problemă fiind cunoscută după cum ştim ca problema Cauchy sau problema cu condiţii iniţiale:

$$y'_i = \frac{dy_i}{dx} = f(x, y_1, y_2, ..., y_r); \;\; y_i(x_0) = y_{i0}, \; i = 1,2,...,r \qquad (1)$$

Se cere determinarea funcţiilor $y_i(x)$ care verifică sistemul şi condiţiile iniţiale, adică determinarea valorilor $y_{i,1}, y_{i,2}, ..., y_{i,n}$ care să aproximează cât mai bine valorile exacte $y_i(x_1), y_i(x_2), ..., y_i(x_n)$ ale funcţiilor $y_i(x)$.

Observaţie: Punctele $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt echidistante pasul h fiind: $x_{j+1} - x_j = h$, $i = 1,2,...,r$.

Metodele de rezolvare rămân aceleaşi ca şi la ecuaţiile diferenţiale noi prezentând aici doar o adaptare a acestor metode pentru sistemele de ecuaţii diferenţiale. Vom prezenta doar câteva metode unipas.

Metoda lui Euler (metoda clasică)

Se aplică în *n* paşi, valorile corespunzătoare ale funcţiilor $y_i(x)$, $i = 1,2,...,r$ la un pas *j*, $j = 1,2,...,n$ se determină cu relaţiile:

$$y_{1,j} = y_{i,j-1} + h \cdot f_i(x_{j-1}, y_{1,j-1}, y_{2,j-1}, ..., y_{r,j-1}) = y_{i,j-1} + h \cdot f_{i,j-1} \qquad (2)$$

$y_{i,j}$; *i* – numărul ecuaţiei; *j* – numărul intervalului (pasului punctului de la finele intervalului).

Metoda Runge-Kutta de ordinul 4

Formula de calcul a soluţiei:

$$y_{i,j} = y_{i,j-1} + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}) \qquad (3)$$

unde:

$$k_{1,i} = h \cdot f(x_{j-1}, y_{1,j-1}, y_{2,j-1}, ..., y_{r,j-1}) \qquad (4.1)$$

$$k_{2,i} = h \cdot f\left(x_{j-1} + \frac{1}{2}h, y_{1,j-1} + \frac{1}{2}k_{1,1}, y_{2,j-1}, ..., y_{r,j-1} + \frac{1}{2}k_{1,r}\right) \qquad (4.2)$$

$$k_{3,i}=h\cdot f\left(x_{j-1}+\frac{1}{2}h, y_{1,j-1}+\frac{1}{2}k_{2,1}, y_{2,j-1},\ldots,y_{r,j-1}+\frac{1}{2}k_{2,r}\right) \tag{4.3}$$

$$k_{4,i}=h\cdot f\left(x_{j}, y_{1,j-1}+k_{3,1}, y_{2,j-1}+k_{3,2},\ldots,y_{r,j-1}+k_{3,k}\right) \tag{4.4}$$

Instrumente folosite

Funcţia predefinită „rkfixed”

Funcţia predefinită ***rkfixed*** rezolvă numeric un sistem de n ecuaţii diferenţiale prin metoda Runge-Kutta cu pas fix. Ea este apelată în modul următor:

$$y := rkfixed\,(init, x_i, x_f, N, D) \tag{5}$$

unde: $init$ – este un vector cu *n* valori iniţiale pentru cele *n* necunoscute ale sistemului de ecuaţii diferenţiale; x_i, x_f – sunt capetele intervalului pe care se doreşte rezolvarea numerică a sistemului de ecuaţii diferenţiale; *N* – este numărul punctelor intermediare de calcul; *D* – este un vector de funcţii de forma $D(x, y)$ care descrie membrul drept al ecuaţiilor care formează sistemul de ecuaţii diferenţiale.

Funcţia returnează o matrice *y*, care conţine pe prima coloană punctele intermediare de calcul, iar pe coloanele următoare valorile funcţiilor necunoscute în aceste puncte intermediare.

Funcţia predefinită „Rkadapt”

Funcţia predefinită ***Rkadapt*** rezolvă numeric un sistem de n ecuaţii diferenţiale prin metoda Runge-Kutta cu pas adaptativ. Funcţia este apelată cu următorii parametrii:

$$\mathrm{S} := \mathrm{Rkadapt(Y0, t1, t2, N, D)} \tag{6}$$

unde: *Y0* – este un vector cu *n* valori iniţiale pentru cele *n* necunoscute ale sistemului de ecuaţii diferenţiale; *t1, t2* – sunt capetele intervalului pe care se doreşte rezolvarea numerică a sistemului de ecuaţii diferenţiale; *N* – este numărul punctelor intermediare de calcul; *D* – este un vector de funcţii de forma $D(t, y)$ care descriu membrul drept al ecuaţiilor care formează sistemul de ecuaţii diferenţiale.

Funcţia returnează o matrice *S*, care conţine pe prima coloană punctele intermediare de calcul, iar pe coloanele următoare valorile funcţiilor necunoscute în aceste puncte intermediare.