Curs 4

Metode Numerice de Rezolvare a Sistemelor de Ecuaţii Liniare

As. Dr. ing. Levente CZUMBIL
Laboratorul de Cercetare în Metode Numerice
Departamentul de Electrotehnică, Inginerie Electrică
E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro

Notaţia matriceală conduce la o formulare simplă şi concisă a unor aplicaţii deosebit de complexe, mai ales în situaţiile în care modelul matematic conţine sisteme de ecuaţii liniare de dimensiuni mari.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A \cdot x = b$$

În unele cazuri, sistemele de ecuaţii algebrice liniare apar în mod natural, din însăşi formularea problemei. În multe alte cazuri, însă, sistemele de ecuaţii liniare rezultă ca urmare a aplicării unor metode numerice de rezolvare a problemei iniţiale.

În aplicaţiile din ingineria electrică valorile coeficienţilor şi termenilor liberi pot fi afectate de erori (determinări experimentale, calcule "aproximative“, ipoteze simplificatoare, etc.). Măsura în care ele influenţează soluţiile sistemelor de ecuaţii liniare determină:

- Sisteme omogene
- Sisteme neomogene

- Sisteme bine condiţionate
- Sisteme rău condiţionate

Se poate spune că rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare joacă un rol central în cadrul metodelor numerice.

Există 2 categorii de metode de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare de forma $A \cdot x = b$:

- ➢ metode directe sau “exacte”;
- ➢ metode indirecte sau “iterative”.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Metode Directe

- **soluţia** sistemului rezultă printr-o serie de operaţii care se execută o singură dată, numărul total de **operaţii aritmetice elementare fiind finit**, depinzând în mod direct de dimensiunea sistemului, fiind cunoscut de la început.
- **rezultatul** furnizat de metodele directe este afectat doar de ***erorile de rotunjire*** şi acest avantaj face ca ele să fie preferate ori de câte ori dimensiunea şi particularităţile sistemului păstrează numărul de operaţii în limite acceptabile.

Exemple de metode directe se pot aminti:

- metoda **inversării matriciale**;
- **metoda lui Cramer** bazată pe calculul determinanţilor;
- metoda de eliminare a lui **Gauss**;
- metoda **factorizării directe** LU (Lower-Upper).

Metoda lui Cramer deşi în esenţă foarte simplă, nu corespunde cerinţelor practice când numărul de ecuaţii este mai mare ca 3 şi când determinantul corespunzător matricii sistemului este zero ea fiind în general neimplementabilă.

Metode Indirecte

❖ **soluţia** se obţine printr-o **serie (proces) de aproximaţii succesive**, fiecare secvenţă de operaţii aritmetice elementare (mai mic decât la metodele directe) este parcursă de mai multe ori, obținându-se aproximaţii din ce în ce mai bune ale soluţiei până la atingerea unei **precizii fixate dinainte** (precizie dorită). Aceste metode permit obţinerea soluţiei numerice a unui sistem de ecuaţii prin **generarea unui şir** care tinde la soluţia exactă.

❖ practic se poate efectua numai un **număr finit de iteraţii**, ***erorile de rotunjire*** sunt însoţite în cazul metodelor iterative şi de ***erori de trunchiere***.

Avantaj al metodelor iterative: **simplitatea şi eficienţa implementării** lor în programe, în cazurile în care nu sunt rezolvabile prin metode directe.

Exemple de metode iterative:

- metoda lui **Jacobi**;
- metoda **Gauss-Seidel - Master**
- metoda **relaxării - Master**

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Metoda Inversării Matriceale

Se consideră sistemul liniar de *n* ecuaţii cu *n* necunoscute definit de relaţia matricială **A·x=b**.

Dacă matricea **A** este nesingulară, atunci această relaţie se poate înmulţi la stânga cu matricea inversă $\mathbf{A^{-1}}$ rezultând:

$$\mathbf{x = A^{-1} \cdot b}$$

relaţie care evidenţiază clar cele două faze ale acestei metode: **inversare** a matricei **A** şi **efectuarea produsului** matriceal $\mathbf{A^{-1}\,b}$.

Metoda inversării matriceale necesită un **timp de calcul relativ ridicat** datorită numărului mare de operaţii elementare, aplicarea ei fiind justificată numai în situaţiile în care este necesară soluţionarea repetată a sistemului de forma A·x=b, pentru diferite valori ale termenilor liberi pentru că inversarea matricii *A* se face o singura dată, la prima rezolvare, la soluţionările următoare fiind necesară numai efectuarea înmulţirii matriceale $A^{-1}\cdot b$.

Metoda lui Gauss (eliminarea Gauss - triangularizare)

Într-un caz practic se poate ajunge la sisteme de forma: **A·x = b** după aplicarea unor metode specifice de rezolvare asupra unor circuite electrice de curent continuu, ajungându-se la sistemul scris matricial:

$$R \cdot I = E \Rightarrow I = R^{-1} \cdot E$$

- R - matricea pătratică a rezistenţelor din circuit
- E - vectorul coloană a tensiunilor electromotoare ale surselor din circuit
- I - vectorul coloană a curenţilor necunoscuţi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Ideea de bază a metodei constă în aducerea sistemului de ecuaţii prin transformări elementare la o formă echivalentă, având matrice ***superior*** sau ***inferior*** triunghiulară, urmată de rezolvarea sistemului rezultat prin procedee recurente specifice, **foarte eficiente**.

Transformarea sistemului iniţial într-un sistem de formă triunghiulară se realizează cu ajutorul a trei operaţii elementare sau de bază:

1. Interschimabrea a două ecuaţii între ele;
2. Înmulţirea unei ecuaţii cu o constantă nenulă;
3. Scăderea unei ecuaţii din alta şi înlocuirea celei de-a doua ecuaţie cu rezultatul scăderii.

Transformarea sistemului este echivalentă cu **eliminarea succesivă** a necunoscutelor din ecuaţii şi se numeşte ***faza eliminării***.

Rezolvarea sistemului cu matrice triunghiulară constă în determinarea necunoscutelor şi substituţia lor în ecuaţiile sistemului în ordine inversă, fiind denumită din acest motiv ***faza substituţiei inverse***.

Etapa eliminării

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots. + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Se elimină x_1 din toate ecuaţiile cu excepţia primeia adică de exemplu la ecuaţia i:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

$$\Downarrow$$

$$(a_{i2} - a_{i1}a_{12} / a_{11})x_2 + (a_{i3} - a_{i1}a_{13} / a_{11})x_3 + \ldots + (a_{in} - a_{i1}a_{1n} / a_{11})x_n = b_i - a_{i1}b_1 / a_{11}$$

Obţinem astfel sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{1j}^{(1)} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}, \ j = 1,2,\ldots,n \\ b_1^{(1)} = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}^{(1)}, \ j = 1,2,\ldots,n; i = 2,3,\ldots,n \\ b_i^{(1)} = b_i - a_{i1}b_1^{(1)} \end{cases}$$

Matriceal, primul pas al metodei eliminării lui Gauss conduce la

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \dots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

Matriceal, la un pas oarecare k se obține sistemul:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} \dots & a_{1k}^{(1)} \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 \quad \dots & a_{2k}^{(2)} \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \quad \dots & 1 \quad \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{nk+1}^{(k)} & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_k \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \dots \\ b_k^{(k)} \\ \dots \\ b_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \qquad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot a_{kj}^{(k)}$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot b_k^{(k)}$$

$$i = k+1, k+2, \dots, n;$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

$$
\begin{cases}
x_1 + a_{12}^{(1)} \cdot x_2 + a_{13}^{(1)} \cdot x_3 + \ldots + a_{1k}^{(1)} \cdot x_k + a_{1,k+1}^{(1)} \cdot x_{k+1} + \ldots + a_{1n}^{(1)} \cdot x_n = b_1^{(1)} \\
x_2 + a_{23}^{(2)} \cdot x_3 + \ldots + a_{2k}^{(2)} \cdot x_k + a_{2,k+1}^{(2)} \cdot x_{k+1} + \ldots + a_{2n}^{(2)} \cdot x_n = b_2^{(2)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_k + a_{k,k+1}^{(k)} \cdot x_{k+1} + \ldots + a_{kn}^{(k)} \cdot x_n = b_k^{(k)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n,k+1}^{(k)} \cdot x_{k+1} + \ldots + a_{nn}^{(k)} \cdot x_n = b_n^{(k)}
\end{cases}
$$

Faza eliminării se încheie, împărţind cea de a *n*-a ecuaţie la elementul pivot $a_{nn}^{(n-1)}$ care, pentru un sistem cu matrice ***nesingulară,*** trebuie să fie diferit de zero. Rezultă după acest pas sistemul:

$$
\begin{bmatrix}
1 & a_{12}^{(1)}\ldots & a_{1k}^{(1)}\ldots & a_{1n}^{(1)} \\
0 & 1 \quad \ldots & a_{2k}^{(2)}\ldots & a_{2n}^{(2)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 \quad \ldots & 1 \quad \ldots & a_{kn}^{(k)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 \quad \ldots & 1
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_k \\ \ldots \\ x_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \ldots \\ b_k^{(k)} \\ \ldots \\ b_n^{(n)}
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{cases}
x_1 + a_{12}^{(1)} \cdot x_2 + a_{13}^{(1)} \cdot x_3 + \ldots + a_{1k}^{(1)} \cdot x_k + a_{1,k+1}^{(1)} \cdot x_{k+1} + \ldots + a_{1n}^{(1)} \cdot x_n = b_1^{(1)} \\
x_2 + a_{23}^{(2)} \cdot x_3 + \ldots + a_{2k}^{(2)} \cdot x_k + a_{2,k+1}^{(2)} \cdot x_{k+1} + \ldots + a_{2n}^{(2)} \cdot x_n = b_2^{(2)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n = b_n^{(n)}
\end{cases}
$$

sau matriceal, $A^{(n)} \cdot x = b^{(n)}$.

Din cele obţinute, observăm matricea $A^{(n)}$ este superior triunghiulară, iar sistemul este echivalent cu cel iniţial $\boldsymbol{A \cdot x = b}$, adică are soluţia $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Faza substituţiei inverse (mersul înapoi) presupune parcurgerea în sens invers a ecuaţiilor sistemului cu matrice triunghiulară, rezultat în faza eliminării, şi stabilirea soluţiei sistemului potrivit unui calcul recursiv prin substituţie regresivă începând cu x_n din ultima ecuaţie continuând cu x_{n-1} şi terminând cu x_1 din prima ecuaţie:

$$\begin{cases} x_n = b_n^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k = b_k^{(k)} - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} \cdot x_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_2 = b_2^{(2)} - a_{23}^{(2)} x_3 \\ x_1 = b_1^{(1)} - \left(a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 \right) \end{cases}$$

După cum se observă, determinarea componentelor soluţiei are loc de la indici mari spre indici mici, fiecare nouă componentă depinzând în mod explicit numai de componentele determinate la pasul anterior.

Observaţie. Metoda de eliminare Gauss permite şi calcularea ***determinantului*** matricii sistemului. Se observă că, matricea $\boldsymbol{A^{(n)}}$ a sistemului final fiind ***triunghiulară***, are determinantul egal cu produsul elementelor diagonale, adică: **det** $\boldsymbol{(A^{(n)}) = 1}$

$$det\left(A^{(n)}\right) = \frac{det(A)}{a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n-1)}} = 1 \qquad det\, A = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n-1)}$$

Metoda triangularizarii a lui Gauss

Algoritmul pentru anularea elementelor
de sub diagonala principală (triangularizare).

$$
F(A) := \left|
\begin{array}{l}
n \leftarrow \mathrm{rows}(A) \\
m \leftarrow \mathrm{cols}(A) \\
W \leftarrow A \\
\text{for } k \in 2..n \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
\text{for } i \in k..n \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
\text{for } j \in k-1..m \\
\quad W_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - \dfrac{A_{k-1,j}}{A_{k-1,k-1}} \cdot A_{i,k-1} \\
W
\end{array}
\right. \\
A \leftarrow W \\
W
\end{array}
\right. \\
W
\end{array}
\right.
$$

\\ declararea numarului de elemente de pe prima coloana a matricei A
\\ incarcarea matricii interne w cu matricea A
\\ inceperea instructiunii de iterare for pentru k, i, j
\\ recalcularea elementelor w, dupa elementele matricei A (formula iterativa realizeaza triangularizarea)
\\ programul returneaza matricea w recalculata

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

În aplicaţiile practice în care de obicei matricea coeficienţilor sistemului *A* este de dimensiuni mari şi numărul elementelor diferite de zero ale acestei matrici este foarte mic atunci metoda eliminării a lui Gauss nu este cea mai indicată metodă de rezolvare a sistemului.

În aceste cazuri **tehnicile de eliminare vor fi încetinite mult** datorită spaţiului mare de memorie necesar pentru a putea lucra cu aceste matrici de mari dimensiuni dar şi faptul că elementele zero din matricea iniţială ar fi transformate în elemente diferite de zero după triangularizare.

Deci aceste sisteme mari se vor rezolva cu **metode iterative**.

Metoda aproximărilor succesive - Jacobi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

$$\begin{matrix} det(A) \neq 0 \\ a_{ij} \neq 0 \end{matrix} \Downarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1 \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n \end{cases}$$

$$\alpha = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \ldots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \ldots & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \ldots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

$$x = \alpha \cdot x + \beta$$

Se alege vectorul aproximaţiilor iniţiale ale soluţiilor $x^{(0)} = \left[x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad \ldots \quad x_n^{(0)} \right]^T$

care se obţine prin măsurători experimentale sau se alege de obicei în aplicaţiile practice ca fiind egal cu vectorul termenilor liberi

$$x^{(0)} = \beta$$

Metoda lui Jacobi presupune calculul unui şir de aproximaţii succesive $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ cu ajutorul formulei de iterare într-un pas care se demonstrează prin inducţie:

$$x^{(k+1)} = \alpha \cdot x^{(k)} + \beta$$

Vectorul soluţie după prima iteraţie este: $x^{(1)} = \alpha \cdot x^{(0)} + \beta$

Dacă şirul vectorilor soluţii la iteraţia k, $\boldsymbol{x^{(k)}}$ care este un şir de soluţii aproximative, converge, atunci limita lui este soluţie a sistemului **A·x = b**:

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to\infty}\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)} \right) = x$$

Demonstratia 1 – **Convergența metodei lui Jacobi - pe tablă**

Demonstratia 2 – **Cevaluarea erorii în metoda aproximațiilor succesive Jacobi - pe tablă**

$$er = \left\| x - x^{(k)} \right\| \le \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|\beta\|$$

Planificarea şi Managementul Timpului

- Setarea priorităţilor

IMPORTANŢĂ

URGENŢĂ	Scăzută	Ridicată
Scăzută	Nu face acum.	Fă mai târziu.
Ridicată	Delegarea sarcinii.	Fă acum, Fă tu.