

Curs 5

Rezolvarea Sistemelor de Ecuații

Partea II

As. Dr. ing. Levente CZUMBIL

Laboratorul de Cercetare în Metode Numerice

Departamentul de Electrotehnică și Măsurări, FIE, UTCN

E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro Site: <http://users.utcluj.ro/~czumbil>



Aplicații în Inginerie Electrică

- În sistemul energetic este foarte important să existe un echilibru între producție și consum. Datorită faptului că sursele eoliene/solare de energie depind în mare măsură de condițiile atmosferice, se impune **predicția congestiilor** datorate funcționării intermitente a acestor surse, pentru **echilibrarea permanentă**; „**producție-consum**”
- În managementul energiei, un mijloc de **reducere a pierderilor în rețelele electrice** de distribuție, este cel de **reconfigurare a feederilor de alimentare**; **Avantaje:** echilibrarea sarcinilor; menținerea nivelului impus de tensiune; creșterea siguranței în alimentare; Fiecare caz de reconfigurare, se va modelează matematic printr-un **sistem de ecuații matriciale**;



Aplicații în Inginerie Electrică

- Pentru a fi competitivi, furnizorii de pe piața de energie aplică **prognoza consumurilor de energie** (load forecasting), în raport cu condițiile atmosferice, weekend-uri, zile de sărbători legale. Acești factori de influență se înglobează matematic în **relații matriciale**;
- Modelarea numerică a funcționării mașinilor electrice, hidraulice sau termice;
- Analiza, optimizarea și estimarea regimurilor de funcționare a sistemelor electroenergetice;
- Modelarea numerică a funcționării aparatelor și echipamentelor electrice;
- Discretizare numerică a ecuațiilor integrale de câmp devine o ecuație matriceală.



Noțiuni de Algebră Matriceală

Aplicate în Inginerie Electrică



Tipuri de Matrice întâlnite în aplicațiile IE

❖ Matrice Tridiagonală

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

❖ Matrice Hessenberg

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4,n-1} & a_{4,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

❖ Matrice Bloc Diagonală

“blocurile” $[\mathbf{A}_1]$, $[\mathbf{A}_2]$, $[\mathbf{A}_3]$, ..., $[\mathbf{A}_p]$ sunt matrice pătrate, nu neapărat de același ordin

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}_1] & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [\mathbf{A}_2] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{A}_3] & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & [\mathbf{A}_p] \end{bmatrix}$$

Calculul Valorilor Proprii ale Matricelor

$$\mathbf{[A]} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \det(\mathbf{[A]} - \lambda \cdot \mathbf{[I_n]}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

- Dezvoltând expresia determinantului, se ajunge la un polinom de gradul n în λ , având coeficienții $c_i \in \mathfrak{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

$$P_n(\lambda) = c_1 \cdot \lambda^n + c_2 \cdot \lambda^{n-1} + c_3 \cdot \lambda^{n-2} + \cdots + c_n \cdot \lambda + c_{n+1}$$

- $P_n(\lambda)$ - se numește **polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{[A]}$** , iar ecuația algebrică de gradul n , se numește **ecuația caracteristică a matricei $\mathbf{[A]}$**

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) + \cdots + \det(\mathbf{A}) = 0$$

Calculul Valorilor Proprii ale Matricelor

- Rădăcinile ecuației caracteristice, reale sau complexe conjugate, simple sau multiple, se numesc **valorile proprii** ale matricei $[\mathbf{A}]$. $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{trace}(\mathbf{A})$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det(\mathbf{A})$$

Demonstratie – Pe Tablă

Dacă $[\mathbf{A}]$ are valorile proprii λ_i atunci $[\mathbf{A}]^{-1}$ are valorile proprii $\frac{1}{\lambda_i}$



Calculul Valorilor Proprii ale Matricelor

În aplicațiile din domeniul Ingineriei Electrice, valorile proprii au anumite semnificații “fizice”, dependente de natura problemei analizate. De regulă, prezintă interes practic una dintre următoarele situații:

- Determinarea tuturor valorilor proprii ale polinomului caracteristic;
- Determinarea unei anumite valori proprii (valoarea proprie cea mai mare sau cea mai mică în modul, primele câteva valori proprii, în ordinea descrescătoare sau crescătoare a modulelor);
- Determinarea valorilor proprii și a vectorilor proprii pentru matrice hermitiene reale (matrice reale simetrice);
- Localizarea valorilor proprii, în planul complex sau pe axa reală, fără calculul lor explicit.



Metoda Leverrier-Fadeev

Matricea caracteristică este o matrice reală, de ordinul 4 , având forma

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Se cere să se determine valorile proprii ale matricei $[\mathbf{A}]$ cu metoda **Leverrier-Fadeev**.

a. Determinarea coeficienților c_i , $i = 1, 2, 3, 4$ ai polinomului caracteristic definit de relația:

$$P_n(\lambda) = c_1 \cdot \lambda^n + c_2 \cdot \lambda^{n-1} + c_3 \cdot \lambda^{n-2} + \dots + c_n \cdot \lambda + c_{n+1}$$

$$P_n(\lambda) = c_1 \cdot \lambda^4 + c_2 \cdot \lambda^3 + c_3 \cdot \lambda^2 + c_4 \lambda + c_5$$

➤ Se adoptă pentru primul coeficient valoarea $c_1 = 1$

➤ Se inițializează matricea ajutătoare $[\mathbf{B}]$ sub forma $[\mathbf{B}^1] = [\mathbf{A}]$

➤ Se determină valoarea coeficientului c_2 folosind urma matricei $[\mathbf{B}^1]$, definită de relația:

$$c_2 = -\sum_{i=1}^n b_{ii}^1 \qquad c_2 = -(8 + 8 + 8 + 8) = -32$$

➤ La un pas oarecare k , $k = 2, 3, 4, \dots, n$, se determină valoarea curentă a matricei ajutătoare $[\mathbf{B}]$ cu relația

$$[\mathbf{B}^k] = [\mathbf{A}] \cdot \left([\mathbf{B}^{k-1}] + c_k \cdot [\mathbf{I}] \right)$$

➤ Se calculează valoarea lui c_{k+1} folosind urma matricei \mathbf{B}^k , definită de relația:

$$c_{k+1} = -\frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^n b_{ii}^k$$

➤ Prin aplicarea relației pentru $k = n$ rezultă

$$[\mathbf{B}^n] = [\mathbf{A}] \cdot \left([\mathbf{B}^{n-1}] + c_n \cdot [\mathbf{I}] \right) = -c_{n+1} \cdot [\mathbf{I}]$$

Observație: Prin înmulțirea la stânga cu $[\mathbf{A}^{-1}]$, se obține o modalitate de calcul a matricei inverse $[\mathbf{A}^{-1}]$, pentru matrici de mari dimensiuni.

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -24 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -24 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -24 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -178 & -28 & -44 & 4 \\ -26 & -178 & -4 & -44 \\ -44 & -4 & -178 & -26 \\ -4 & -44 & -26 & -178 \end{bmatrix}$$

$$c_3 = -\frac{-178-178-178-178}{2} = 356$$

$$\mathbf{B}^3 = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 178 & -28 & -44 & 4 \\ -26 & 178 & -4 & -44 \\ -44 & -4 & 178 & -26 \\ -4 & -44 & -26 & 178 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1236 & 92 & 148 & -20 \\ 92 & 1236 & -20 & 148 \\ 148 & -20 & 1236 & 92 \\ -20 & 148 & 92 & 1236 \end{bmatrix}$$

$$c_4 = -\frac{1236+1236+1236+1236}{3} = -1648$$



$$\mathbf{B}^4 = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -412 & 92 & 148 & -20 \\ 92 & -412 & -20 & 148 \\ 148 & -20 & -412 & 92 \\ -20 & 148 & 92 & -412 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2688 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2688 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2688 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2688 \end{bmatrix}$$

$$c_5 = -\frac{-2688 - 2688 - 2688 - 2688}{4} = 2688$$

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 - 32 \cdot \lambda^3 + 356 \cdot \lambda^2 - 1648 \cdot \lambda + 2688 = 0$$

b. Calculul valorilor proprii prin soluționarea ecuației caracteristice:

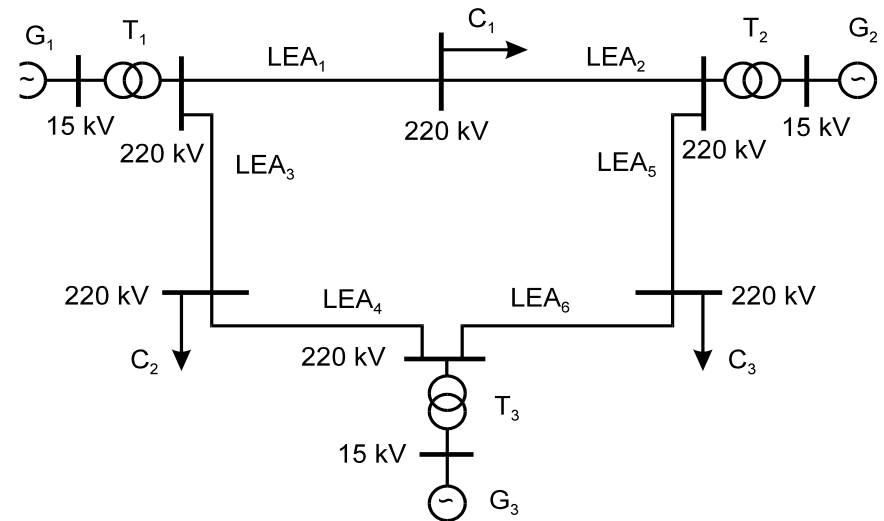
$$\lambda_1 = 14, \lambda_2 = 8, \lambda_3 = 6, \lambda_4 = 4$$



Utilizarea valorilor proprii: (Curs Rețele electrice+PTDE)

Analiza stabilității la mici perturbații a sistemelor electroenergetice

- Se cere să se analizeze stabilitatea naturală a sistemului la mici perturbații în aceste condiții. Perturbația constă dintr-un șoc de putere activă de valoare relativ redusă într-unul din nodurile sistemului.
- Stabilitatea naturală presupune analiza comportării dinamice a sistemului electroenergetic în absența sistemelor de reglare automată a generatoarelor sincrone (modelate printr-o tensiune constantă în spatele unei reactanțe)
- Se cunosc parametrii elementelor de sistem și caracteristicile unui regim concret de funcționare.



- **Analiza stabilității la mici perturbații** se face prin liniarizarea în jurul punctului de funcționare a ecuațiilor care descriu comportarea dinamică a sistemului electroenergetic considerat, rezultând un **sistem de patru ecuații diferențiale**.
- **Valorile proprii ale matricei coeficienților sistemului** de ecuații diferențiale furnizează răspunsul la problema enunțată. Dacă sistemul este stabil, atunci toate valorile proprii au partea reală negativă sau sunt negative (generatoarele rămân în sincronism, regimul staționar de după perturbație fiind identic cu cel anteperturbație).
- Existența uneia sau a mai multe valori proprii reale pozitive sau cu partea reală pozitivă semnifică **instabilitate** (pierderea sincronismului, în mod asimptotic sau oscilant, dependent de natura valorilor proprii respective).
- Părțile imaginare ale valorilor proprii complexe furnizează informații privind **frecvențele naturale de oscilație ale generatoarelor din sistem**.

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -0,00415 & -153,46 & 0 & -33,841 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -59,524 & -0,00532 & -104,096 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 + 0,00948 \cdot \lambda^3 + 257,5560 \cdot \lambda^2 + 1,249447 \cdot \lambda + 13960,2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -0,00233 \pm j 13,416 \\ \lambda_{3,4} = -0,00251 \pm j 8,807 \end{cases} \quad \text{valorile proprii}$$

- 2 perechi de valori proprii complexe conjugate, având partea reală negativă.
- În consecință, sistemul este **stabil natural** la perturbația de intensitate redusă considerată.
- Pulsațiile naturale de oscilație sunt de 13,416 rad/s și 8,807 rad/s, ceea ce corespunde unor frecvențe de aproximativ 2,14 Hz (perioadă de 0,47 s), respectiv 1,40 Hz (perioadă de 0,71 s).

Metoda Kârlov (Implementare MathCad)

Se consideră o matrice $[A]$ cu un număr finit de elemente:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Se generează un vector arbitrar $[X]$ cu proprietatea ca vectorul are un număr de N elemente, toate nule, cu excepția primului element a cărui valoare este 1:

$$N := \text{rows}(A) \quad i := 0 .. N - 1$$
$$X_i := \text{if}(i = 0, 1, 0) \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Se utilizează relația de recurență pentru a genera un set de vectori pornind de la vectorul elementar inițial:

$$X^{(i+1)} := A \cdot X^{(i)}$$

- Se generează o nouă matrice $[M]$, prin alăturarea vectorilor $[X_i]$:

$$k := 0 .. N - 1 \quad M_{k,i} := \left(X^{(i)} \right)_k \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 39 & 259 \\ 0 & -2 & -25 & -209 \\ 0 & 3 & 20 & 231 \\ 0 & -5 & -22 & -332 \end{pmatrix}$$

- Fie o matrice $[B]$: $B := -X^{(N)}$ astfel încât $[M] \cdot [P] = [B]$

Cu ajutorul funcției „*lsolve*” se determină
valorile vectorului polinom $[P]$:

$$P := \text{lsolve}(M, B) \quad P = \begin{pmatrix} -21 \\ -62 \\ -49 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- Se generează vectorul coeficienților polinomului caracteristic:
(același cu vectorul $[P]$ doar că mai conține și coeficientul lui λ^n)

$$i := 0 .. N \quad P_i := \text{if}(i = N, 1, P_i) \quad P = \begin{pmatrix} -21 \\ -62 \\ -49 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$



- Se utilizează funcția „*polyroots*” pentru a evalua rădăcinile ecuației caracteristice și a determina valorile proprii ale matricei **[A]**

$$\lambda := \text{polyroots}(P)$$

$$\lambda' := \text{eigenvals}(A)$$

$$\lambda' := \text{sort}(\lambda')$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} -4.302775669855068 \\ -0.720153211435286 \\ -0.6972243621409 \\ 9.720153243431868 \end{pmatrix}$$

$$\lambda' = \begin{pmatrix} -4.302775637732 \\ -0.720153254455 \\ -0.697224362268 \\ 9.720153254455 \end{pmatrix}$$

Pentru verificarea rezultatelor obținute s-a folosit funcția predefinită „*eigenvals*” din *MathCad* (care returnează valorile proprii ale unei matrice).





Freedom is not doing everything you choose,
but choosing everything you do.

Norme Vectoriale și Matriceale

❖ Norma unui vector

- *Exemplu:* Se consideră vectorul:

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0,3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Se calculează normele Holder:

$$\Rightarrow \|\bar{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + \dots + |v_n|$$

$$\Rightarrow \|\bar{v}\|_2 = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \dots + |v_n|^2}$$

$$\Rightarrow \|\bar{v}\|_k = \sqrt[k]{|v_1|^k + |v_2|^k + \dots + |v_n|^k}$$

$$\Rightarrow \|\bar{v}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$$

$$\|\bar{v}\|_1 = |1| + |2| + |0,3| + |-5| = 8,3$$

$$\|\bar{v}\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0,3^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 4 + 0,09 + 25} = \sqrt{30,09}$$

$$\|\bar{v}\|_\infty = |-5| = 5$$

❖ Norma unei matrice

Norma unei matrici este un numar real care are proprietatile:

$$\| \mathbf{A} \| = 0 \Leftrightarrow [\mathbf{A}] = 0 \quad - \text{nenegativitate}$$

$$\| c \cdot \mathbf{A} \| = |c| \cdot \| \mathbf{A} \| \quad - \text{neomogenitate}$$

$$\| \mathbf{A} \| + \| \mathbf{B} \| \geq \| \mathbf{A} + \mathbf{B} \|; \quad \| \mathbf{A} \| \cdot \| \mathbf{B} \| \geq \| \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \| \quad - \text{inegalitatea triunghiului}$$

1. Norma Euclidiană a unei matrici

Această normă este cea mai folosită normă în aplicațiile de IE și are relația:

$$\| \mathbf{A} \|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}$$

Exemplu: Norma Euclidiană pentru matricea pătratică A este:

$$[\mathbf{A}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \| \mathbf{A} \|_E = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 2^2 + (-3)^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + (-1)^2} \\ = \sqrt{22}$$

2. Norma Sumă

$$\| \mathbf{A} \|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n | a_{ij} |$$

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \| \mathbf{A} \|_1 = |2| + |4| + |-5| = 11$$

3. Norma Infinit

$$\| \mathbf{A} \|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n | a_{ij} |$$

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \| \mathbf{A} \|_\infty = |-1| + |-5| + |3| = 9$$



3. Norma Spectrală – subordonată normei vectoriale euclidiene

$$\| \mathbf{A} \|_2 = \max_{\| \mathbf{z} \|_2 \neq 0} \frac{\| \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} \|_2}{\| \mathbf{z} \|_2} \quad \| \mathbf{z} \|_2 = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}$$

$$\| \mathbf{A} \|_2^2 = \max_{\| \mathbf{z} \|_2 \neq 0} \frac{\| \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} \|_2^2}{\| \mathbf{z} \|_2^2} = \max_{\| \mathbf{z} \|_2 \neq 0} \frac{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{z})^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{z})}{\mathbf{z}^T \cdot \mathbf{z}} \rightarrow \| \mathbf{A} \|_2^2 = \max \frac{\mathbf{z}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}}{\mathbf{z}^T \cdot \mathbf{z}}$$

Norma spectrală este cea mai mare dintre valorile proprii ale matricii $[\mathbf{A}]^T[\mathbf{A}]$ și este cunoscută sub denumirea de rază spectrală, deci norma spectrală este:

$$\| \mathbf{A} \|_2 = \sigma_1 \quad \det([\mathbf{A}^T \mathbf{A}] - \lambda \cdot [\mathbf{I}_n]) = 0 \quad \lambda = \sigma^2$$

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_n^2 \quad - \text{valorile proprii ale matricii } [\mathbf{A}]^T[\mathbf{A}]$$



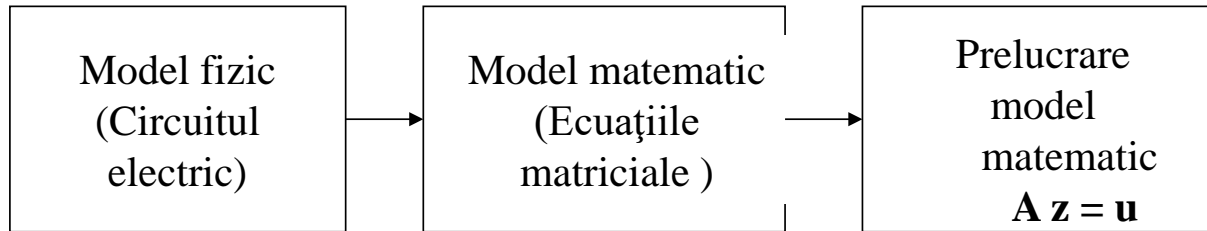
Numărul de Condiționare

Condiționarea sistemelor de ecuații algebrice liniare de mari dimensiuni în analiza circuitelor electrice/câmpului electromagnetic (MASTER – CMAIE)

- În proiectarea dispozitivelor prin sinteză de câmp electromagnetic sau la rezolvarea circuitelor electrice în curent continuu și alternativ, apar frecvent **sisteme de ecuații liniare degenerate**, a căror principală caracteristică este caracterul de **problemă incorect pusă** (variații mici ale membrului drept, duc la **variații mari ale soluției**)
- Trecerea de la **sistemele nedegenerate** la cele **degenerate** se face gradat, astfel că se vorbește de **sisteme bine condiționate** și de **sisteme rău condiționate**.
- Evident că este util de știut dacă circuitul este reflectat de un sistem bine condiționat sau rău condiționat, și de asemenea de apreciat apriori **măsura relei condiționări**.



➤ *De exemplu*, rezolvarea unui circuit electric supus perturbațiilor se face prin:



Etapele modelării în studiul circuitelor electrice

- În proiectare se dorește **stabilirea relației** dintre cauză (perturbația emisă de o sursă) și efect (răspunsul dispozitivului agresat).
- De exemplu pentru **analiza compatibilității electromagnetice a unui dispozitiv** este necesar **studiul răspunsului** dispozitivului în condiții normale de funcționare (în absența perturbației) urmat de analiza aceluiași dispozitiv în cazul în care funcționarea lui este perturbată.
- **Compararea celor două răspunsuri** conduce la concluzii importante privind proiectarea dispozitivului și stabilirea marjei de compatibilitate

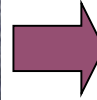
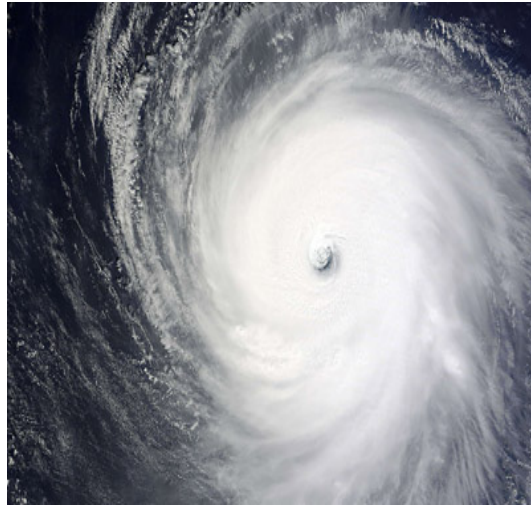
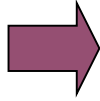
- *De exemplu:* analiza circuitelor electrice se face la un circuit electric aflat în funcționare într-un mediu bine determinat unde se cunosc toate sursele de perturbații care pot să-l agreseze.
- Este important de observat că oricare ar fi **modelul numeric** se ajunge la un **sistem liniar de ecuații algebrice**: $A \cdot z = u$ ($\underline{Z} \cdot \underline{I} = \underline{E}$, $R \cdot I = E$)
- Vectorul termenilor liberi u constituie **vectorul “cauză”**, vectorul mărimilor necunoscute z este **vectorul ”efect”** iar matricea de legătură este A .
- În acest sistem se reflectă **acțiunea agresoare** a perturbației care poate afecta vectorul cauză sau termenii matricei de legătură. Odată unul din acești factori fiind modificat se va modifica și **vectorul efect**.

Exemple:

- În regim static: rețele de condensatoare; relațiile lui Maxwell pentru capacități
- În regim staționar: prize de pământ; circuite de c.c.; câmp magnetic staționar
- În regim cvasistaționar: circuite de c.a; analiza câmpului electromagnetic.
- În regim variabil: analiza câmpului electromagnetic.

- În diverse aplicații din IE soluțiile unor sisteme sunt **instabile** față de **mici variații** ale datelor inițiale astfel încât **variații mici** ale membrului drept sau ale coeficienților sistemului duc la **variații oricât de mari ale soluției**. (un nivel mic de perturbații poate să ducă la efecte dezastruoase d.p.d.v al compatibilității electromagnetice...totul depinde de **imunitatea dispozitivului agresat**).
- În acest context este util să se introducă un **număr real și pozitiv** pentru a caracteriza orice sistem de ecuații.
- Acest număr este **numărul de condiționare** și el permite să se **evalueze stabilitatea sistemului (imunitatea dispozitivului/circuitului) la perturbații**.
- Definierea numărului de condiționare este legată de **norma matriceală și de calculul valorilor proprii**.





➤ Numărul de condiționare oferă informații despre calitatea unui sistem de a rezista perturbațiilor. Se poate calcula numai dacă matricea $[\mathbf{A}]$ este inversabilă.

$$K(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

raportul dintre cea mai mare și cea mai mică valoare proprie a matricii $[\mathbf{A}]^T \cdot [\mathbf{A}]$

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_n^2 \quad - \text{valorile proprii ale matricii } [\mathbf{A}]^T \cdot [\mathbf{A}]$$

$$\det([\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}] - \lambda \cdot [\mathbf{I}_n]) = 0 \quad \lambda = \sigma^2$$

Dacă $[\mathbf{A}]$ este matrice simetrică: $[\mathbf{A}]^T \cdot [\mathbf{A}] = [\mathbf{A}]^2 \quad K(\mathbf{A}) = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}$

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n \quad - \text{valorile proprii ale matricii } [\mathbf{A}]$$



Proprietăți ale Numărul de Condiționare

a) Numărul de condiționare este întotdeauna supraunitar:

$$K(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 \geq \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}\|_2 = \|\mathbf{I}\|_2 = 1 \quad K(\mathbf{A}) \geq 1$$

b) Numărul de condiționare nu se modifică prin înmulțirea matricii cu o constantă:

$$\begin{aligned} K(c \cdot \mathbf{A}) &= \|c \cdot \mathbf{A}\|_2 \cdot \|(c \cdot \mathbf{A})^{-1}\|_2 = |c| \cdot \|\mathbf{A}\|_2 \cdot |c^{-1}| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 \\ &= \|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = K(\mathbf{A}) \end{aligned} \quad K(c \cdot \mathbf{A}) = K(\mathbf{A})$$

c) Numărul de condiționare este invariant la înmulțirea cu o matrice ortogonală $[\mathbf{R}]$

$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ -matrice ortogonală (aplicații teoria circuitelor)

$$K(\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}) = \overbrace{\|\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}\|_2}^{\|\mathbf{A}\|_2} \cdot \overbrace{\|(\mathbf{R} \cdot \mathbf{A})^{-1}\|_2}^{\|\mathbf{A}^{-1}\|_2} = \|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = K(\mathbf{A}) \quad K(\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}) = K(\mathbf{A})$$

d) Numărul de condiționare pentru o matrice pătrată de ordinul doi se poate găsi cu o formulă aproximativă:
(aplicații-teoria câmpului electromagnetic)

$$K_{\text{aprox}}(\mathbf{A}) \cong \frac{\|\mathbf{A}\|_E^2}{\det(\mathbf{A})}$$

Exemplu

Pentru matricea: $[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 2 & 1,1 \end{bmatrix}$ $\det(\mathbf{A}) = 0,1$

$$\|\mathbf{A}\|_E^2 = 1^2 + 0,5^2 + 2^2 + 1,1^2 = 6,46$$

$$K_{\text{aprox}}(\mathbf{A}) = \frac{\|\mathbf{A}\|_E^2}{|\det(\mathbf{A})|} = 64,60$$

$$\det([\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}] - \lambda \cdot [\mathbf{I}_n]) = 0 \quad \lambda = \sigma^2 \quad K(\mathbf{A}) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} = \sqrt{\frac{6,458491}{0,001548}} = 64,59$$

Deci eroarea este: $\varepsilon = K_{\text{aprox}}(\mathbf{A}) - K(\mathbf{A}) = 0,01$

Pentru matricea: $[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 2 & 1,01 \end{bmatrix}$ $\det(\mathbf{B}) = 0,01$ $K_{\text{aprox}}(\mathbf{B}) = \frac{\|\mathbf{B}\|_E^2}{|\det(\mathbf{B})|} = 627,01$

$$\|\mathbf{B}\|_E^2 = 6,2701$$

$$K(\mathbf{B}) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} = \sqrt{\frac{6,270084}{0,0000159}} = 626,98$$

Deci eroarea este: $\varepsilon = 0,03$

- Cele două exemple de calcul dovedesc precizia formulei aproximative dar de asemenea sugerează că matricea cu numărul de condiționare mai mare conduce la un sistem de ecuatii rău condiționat!!!

Efectul Numărului de Condiționare

De exemplu pentru sistemul:

$$\begin{cases} 3,001 \cdot z_1 + 3 \cdot z_2 = 10 \\ z_1 + z_2 = 3 \end{cases} \quad z_1 = 1000, z_2 = -997$$

- numărul de condiționare este: $k = 20006$

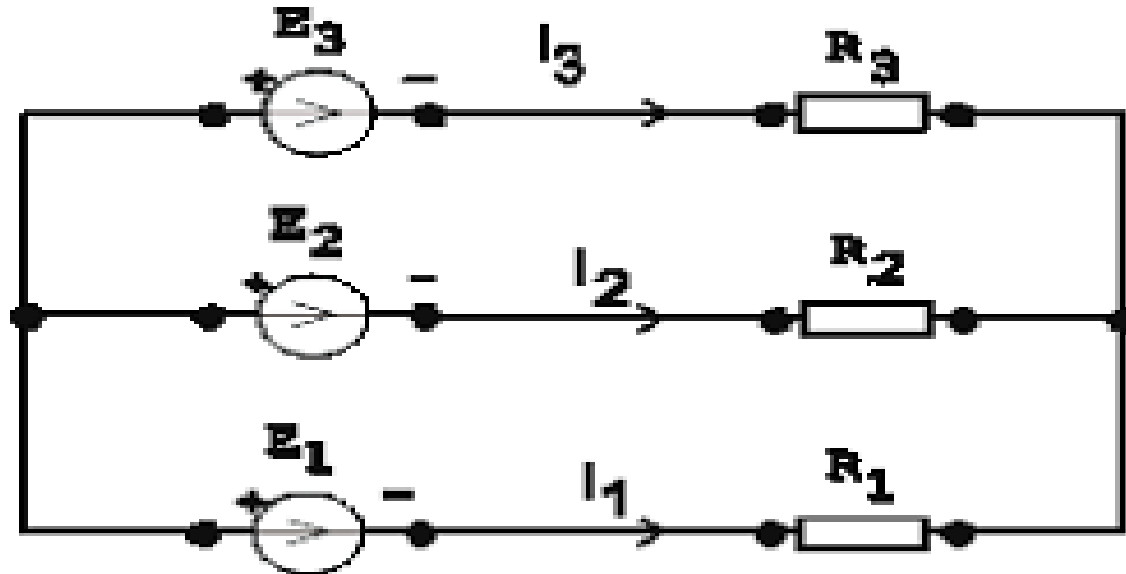
Presupunem că apar perturbații care modifică sursele circuitului care are ca model matematic sistemul de mai sus.

- membrul drept al sistemului se va modifica, astfel încât sistemul devine:

$$\begin{cases} 3,001 \cdot z'_1 + 3 \cdot z'_2 = 10,1 \\ z'_1 + z'_2 = 2,7 \end{cases} \quad z'_1 = 2000, z'_2 = -1997,3$$

- la o normă de variație a membrului drept **0,311** rezultă o normă de variație a soluției de **1414**.
- un astfel de sistem are o **imunitate mică**.

Proiectarea Optimală a unui Circuit Electric



Circuit în care un element rezistiv este parametrizat:

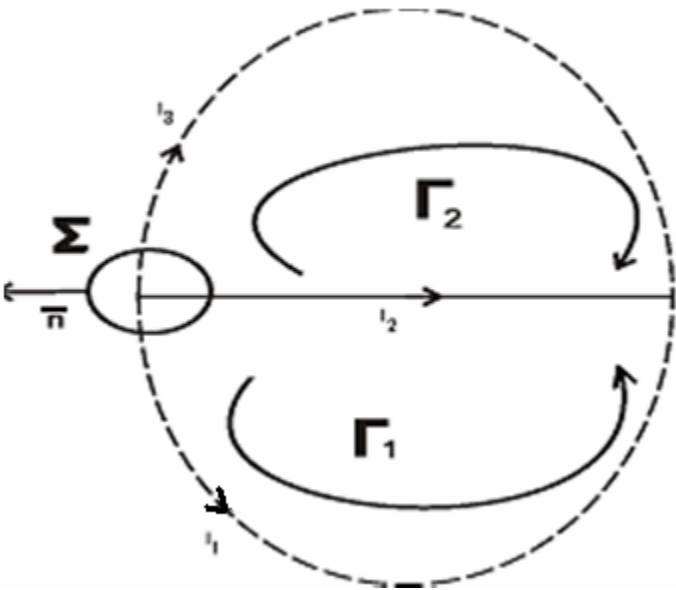
$$x := (1 \dots 50) \quad \Omega \quad \backslash \text{ sir de valori}; \quad R_1(x) := x$$

$$R_2 := 20 \quad \Omega \quad R_3 := 30 \quad \Omega$$

$$E_1 := 15 \quad \text{V} \quad E_2 := 5 \quad \text{V} \quad E_3 := 10 \quad \text{V}$$



Modelarea circuitului electric:



$$A := (1 \ 1 \ 1)$$

\ \ matricea de incidenta
a laturilor la noduri;

$$B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

\ \ matricea de apartenenta
a laturilor la contururi;

Relația matriceală a sistemului de ecuații aferent teoremelor lui Kirchhoff:

$$M \cdot I = T \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ R_1(x) & -R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 - E_2 \\ E_3 - E_2 \end{pmatrix}$$

Stabilitatea circuitului la perturbații se va studia în funcție de valorile rezistenței notată cu x . Vectorul efect este vectorul curenților din circuit. Sistemul perturbat va fi de forma:

$$M(x) \cdot I = T(p) \text{ unde: } M(x) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ R_1(x) & -R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix} \quad T(p) := \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 - E_2 \\ E_3 + p - E_2 \end{pmatrix}$$

Soluția generală a sistemului de ecuații, cu perturbația introdusă este:

$$z(x, p) := M(x)^{-1} \cdot T(p)$$



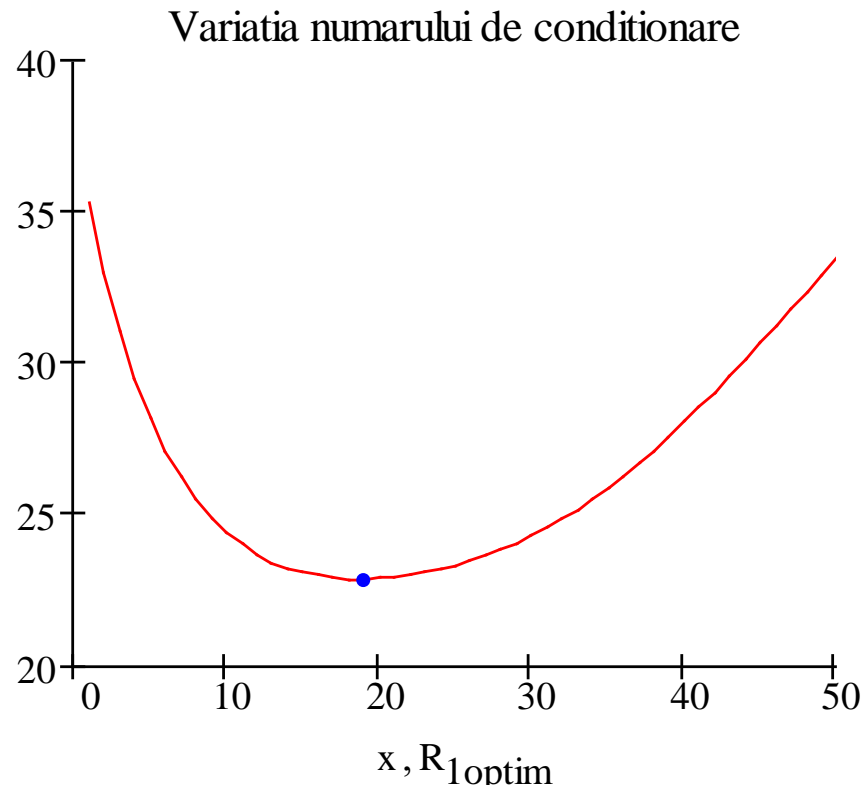
Se construiește o funcție de identificare a valorii rezistenței, pentru care numărul de condiționare al matricei generale $[M]$ este minim, așa încât circuitul să poată fi considerat stabil la perturbația aplicată:

```

Valoare(K, c) :=
  i ← 0
  L ← 0
  for m ∈ 1 .. rows(K) - 1
    if c(Km) = min(K)
      L ← m
      i ← i + 1
  L

```

$\frac{k(x)}{\min(K)}$
 • • •



$$K_x := k(x)$$

$$R_{1optim} := \text{Valoare}(K, c)$$

$$R_{1optim} = 19 \quad \Omega$$

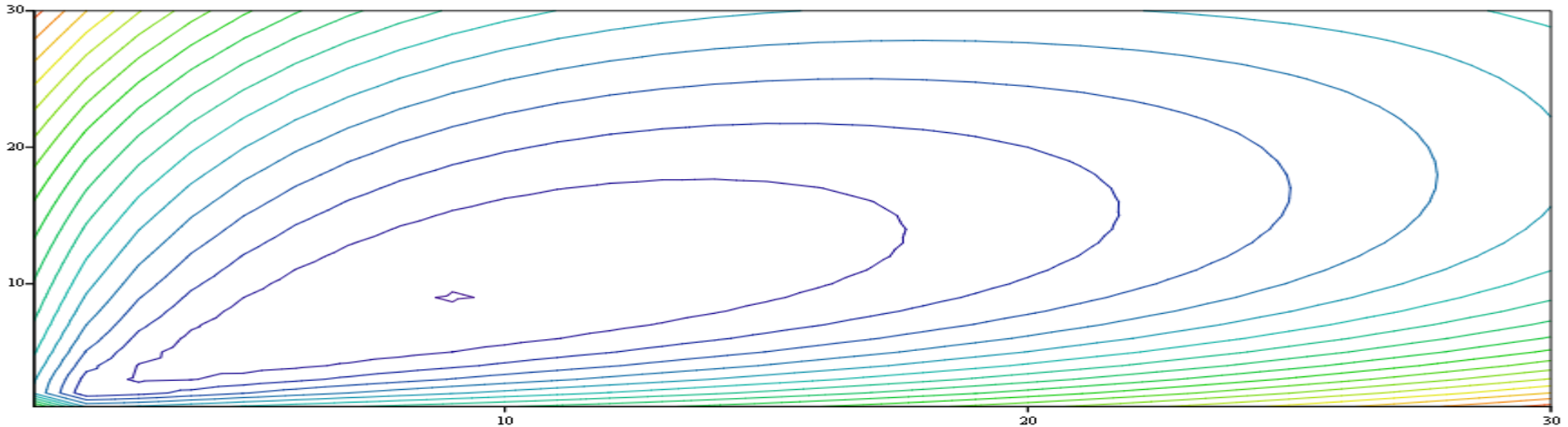
În cazul în care pentru același circuit se consideră două rezistențe variabile, utilitarul de calcul Mathcad permite determinarea valorilor optime ale rezistențelor, precum și afișarea grafică a minimumului corespunzător:

$x := (1..30)$ $y := (1..30)$ Ω \\\ siruri de valori;

$R_1(x) := x$ $R_3(y) := y$

$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} := \text{Valoare}(k)$ $R_{1\text{optim}} := m$ $R_{1\text{optim}} = 9$ Ω

$R_{2\text{optim}} := n$ $R_{2\text{optim}} = 9$ Ω



Rezolvarea
Sistemelor de Ecuații Neliniare
Implementare în MathCad

Metoda lui Newton-Raphson

Să se rezolve următorul sistem neliniar de ecuații, utilizând metoda lui Newton-Raphson:

$$x + 3 \cdot \log(x) - y^2 = 0$$

$$2x^2 - x \cdot y - 5 \cdot x + 1 = 0$$

$$z^2 = 0$$

Pasul 1. Se asociază o funcție fiecărei ecuații neliniare din sistem.

$$F(x, y, z) := x + 3 \cdot \log(x) - y^2$$

$$G(x, y, z) := 2x^2 - x \cdot y - 5 \cdot x + 1$$

$$H(x, y, z) := z^2$$

Pasul 2. Funcțiile se derivează parțial după toate variabilele. Indicii formali se introduc utilizând tasta punct (.).

$$F_x(x, y, z) := \frac{d}{dx} F(x, y, z)$$

$$F_x(x, y, z) \rightarrow \frac{3}{x \cdot \ln(10)} + 1$$

$$F_y(x, y, z) := \frac{d}{dy} F(x, y, z)$$

$$F_y(x, y, z) \rightarrow -2 \cdot y$$

$$F_z(x, y, z) := \frac{d}{dz} F(x, y, z)$$

$$F_z(x, y, z) \rightarrow 0$$



Metoda lui Newton-Raphson

$$G_x(x, y, z) := \frac{d}{dx} G(x, y, z) \quad G_x(x, y, z) \rightarrow 4 \cdot x - y - 5$$

$$G_y(x, y, z) := \frac{d}{dy} G(x, y, z) \quad G_y(x, y, z) \rightarrow -x$$

$$G_z(x, y, z) := \frac{d}{dz} G(x, y, z) \quad G_z(x, y, z) \rightarrow 0$$

$$H_x(x, y, z) := \frac{d}{dx} H(x, y, z) \quad H_x(x, y, z) \rightarrow 0$$

$$H_y(x, y, z) := \frac{d}{dy} H(x, y, z) \quad H_y(x, y, z) \rightarrow 0$$

$$H_z(x, y, z) := \frac{d}{dz} H(x, y, z) \quad H_z(x, y, z) \rightarrow 2 \cdot z$$

Pasul 3. Utilizând rezultatele obținute din calculul simbolic se introduce matricea Jacobian:

$$J(x, y, z) := \begin{pmatrix} F_x(x, y, z) & F_y(x, y, z) & F_z(x, y, z) \\ G_x(x, y, z) & G_y(x, y, z) & G_z(x, y, z) \\ H_x(x, y, z) & H_y(x, y, z) & H_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$



Metoda lui Newton-Raphson

Pasul 4. Se introduc matricile funcționale:

$$J_x(x, y, z) := \begin{pmatrix} F(x, y, z) & F_y(x, y, z) & F_z(x, y, z) \\ G(x, y, z) & G_y(x, y, z) & G_z(x, y, z) \\ H(x, y, z) & H_y(x, y, z) & H_z(x, y, z) \end{pmatrix} \quad J_y(x, y, z) := \begin{pmatrix} F_x(x, y, z) & F(x, y, z) & F_z(x, y, z) \\ G_x(x, y, z) & G(x, y, z) & G_z(x, y, z) \\ H_x(x, y, z) & H(x, y, z) & H_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$$J_z(x, y, z) := \begin{pmatrix} F_x(x, y, z) & F_y(x, y, z) & F(x, y, z) \\ G_x(x, y, z) & G_y(x, y, z) & G(x, y, z) \\ H_x(x, y, z) & H_y(x, y, z) & H(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Pasul 5. Se definește numărul de pași de iterare și se introduc aproximații inițiale ale soluțiilor sistemului de ecuații (valori aleatoare).

$$N := 50$$

$$i := 0..N$$

$$x_0 := 3$$

$$y_0 := 5$$

$$z_0 := 7$$



Metoda lui Newton-Raphson

Pasul 6. Se aplică formula recurentă Newton-Raphson conform algoritmului de mai jos, și se afișează rezultatul obținut.

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_i - \frac{|J_x(x_i, y_i, z_i)|}{|J(x_i, y_i, z_i)|} \\ y_i - \frac{|J_y(x_i, y_i, z_i)|}{|J(x_i, y_i, z_i)|} \\ z_i - \frac{|J_z(x_i, y_i, z_i)|}{|J(x_i, y_i, z_i)|} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.487 \\ 2.262 \\ 6.217 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

Pasul 7. Se verifică rezultatele prin înlocuirea lor în funcțiile inițiale.

$$F(x_N, y_N, z_N) = 0 \quad G(x_N, y_N, z_N) = 0 \quad H(x_N, y_N, z_N) = 0$$



