

Curs 7

Interpolarea Funcțiilor Numerice cu Aplicații în Ingineria Electrică

As. Dr. ing. Levente CZUMBIL

Laboratorul de Cercetare în Metode Numerice

Departamentul de Electrotehnică, Inginerie Electrică

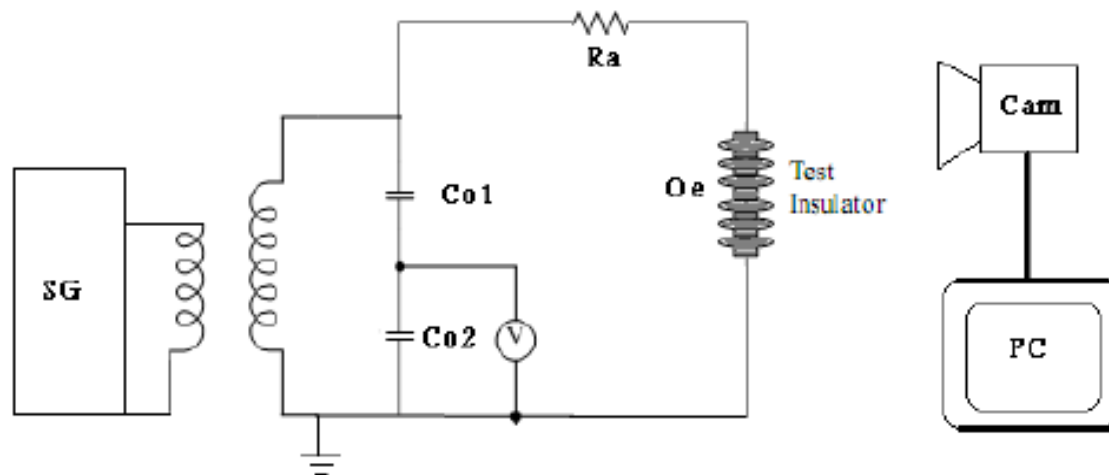
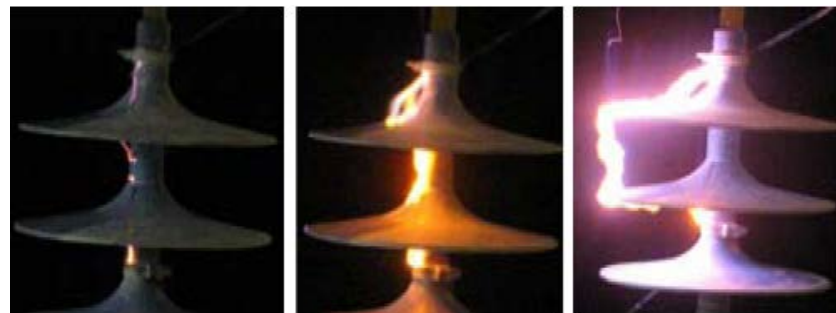
E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro Site: <http://users.utcluj.ro/~czumbil>



Exemple de aplicații din ingineria electrică

❖ **Testarea izolatoarelor liniilor electrice aeriene.** În faza de fabricație a izolatoarelor siliconici de pe liniile electrice aeriene, testarea rezistenței superficiale a acestora reprezintă *o problemă de importanță considerabilă!*

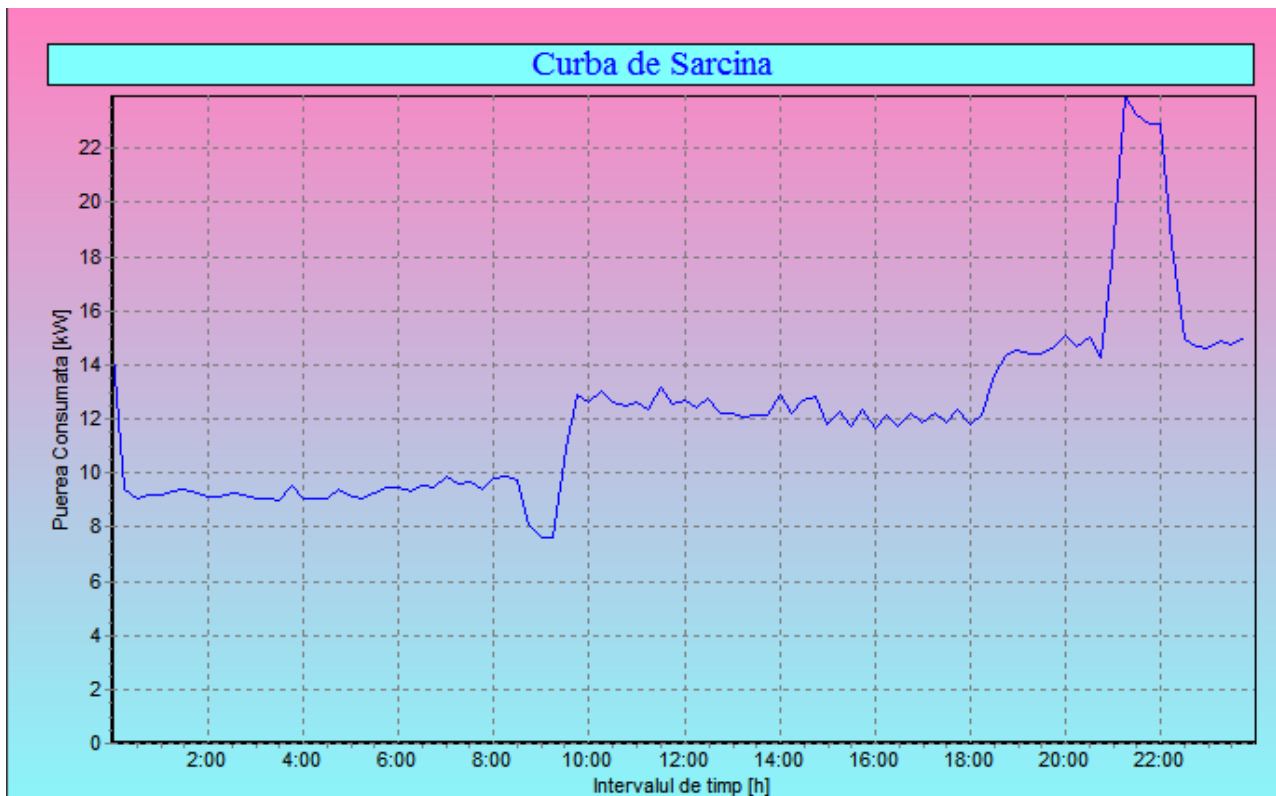
Metoda de testare presupune alimentarea bornelor unui izolator cu o tensiune ridicată și efectuarea mai multor măsurători de încercare, până la străpungerea izolației, conform schemei electrice de principiu.



Exemple de aplicații din ingineria electrică

❖ **Stabilirea cantităților de energie consumate**, pe baza înregistrărilor de putere – curba de sarcină zilnică (prelucrarea curbelor de sarcină prin interpolare).

Se consideră un receptor de energie electrică pentru care se cunoaște curba de sarcină zilnică referitoare la puterea activă consumată.



t [h]	P [MW]
0	1,42
2	1,06
4	2,17
6	2,83
8	2,75
10	2,67
12	2,59
14	2,55
16	2,57
18	2,84
20	3,43
22	3,02
24	1,53

Exemple de aplicații din ingineria electrică

- ❖ Încărcarea inteligentă a vehiculelor electrice – “**smart charging**”, pentru menținerea echilibrului în sistemele de distribuție a energiei.
- ❖ **Aproximarea curbelor de magnetizare** corespunzătoare fenomenului de fero-rezonanță - poate genera supratensiuni și supracurenți în sistemele energetice.
- ❖ Stabilirea caracteristicii flux – curent în proiectarea senzorilor de câmp magnetic; Aplicații: **detectarea conductelor metalice, detecția submarinelor, măsurători geofizice.**
- ❖ **Interpretarea rezultatelor pneumografiei** (tomografie pulmonară), aplicată pacienților din zonele miniere; pune în evidență prezența prafului feromagnetic.
- ❖ Studiul descreșterii cu temperatura a rezistenței înfășurărilor mașinilor electrice utilizate în pompajul fluidelor criogenice; Aplicații: **transportul gazelor naturale sub formă lichidă;**

Introducere

- În aplicațiile din domeniul electrotehnic nu se cunoaște **expresia analitică a funcției** care trebuie aproximată ci doar **valorile ei într-un anumit număr de puncte** (tabelate - obținute din calcule sau **măsurători experimentale**) urmărindu-se *determinarea aproximativă a valorilor corespunzătoare unor alte puncte diferite de cele date.*
- Aproximarea unei funcții exprimată analitic sub forma unor formule explicite, implicite sau parametrice, sub forma unor serii, sau a unui algoritm se face cu scopul **simplificării calculelor de evaluare** a mărimii funcției , a **derivatelor** acesteia sau a **integralei definite**.



- Evaluarea unei funcții **definită sub formă numerică** (dată **tabelar**) în urma unor **măsurători experimentale**, presupune aproximarea ei (interpolarea) în intervalele dintre nodurile rețelei în orice punct al domeniului de definiție.
- Cea mai simplă metodă de interpolare a unei funcții definite sub formă numerică prin coordonatele (x_i, y_i) ale unor puncte numite **noduri**, constă în **aproximarea funcției cu un polinom** pentru a putea fi prelucrată în continuare (interpolare, derivare, integrare etc) evaluarea funcției reducându-se la operații aritmetice elementare (adunări și înmulțiri).
- Se măsoară la momente discrete x_0, x_1, \dots, x_n (noduri), valorile unor funcții $f(x)$ și se pune problema de a găsi valorile sale în alte puncte diferite de noduri.



Forma Generală a Polinoamelor de Interpolare

Funcția de aproximare este de forma:

$$f(x) \cong g(x; a_0, a_1, \dots, a_n) \quad - \text{ model matematic.}$$

❖ Interpolare Liniară

$$g(x, a_0, \dots, a_n) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \dots + a_n g_n(x)$$

❖ Interpolare Polinomială

$$g(x; a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

❖ Interpolare Trigonometrică

$$g(x; a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1 e^{xi} + a_2 e^{2xi} + \dots + a_n e^{nxi}, i = \sqrt{-1}$$

❖ Interpolare Rațională

$$g(x; a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m}$$



Dacă nu există informații asupra problemei tehnice care a generat *modelul matematic*, atunci cel mai des se utilizează pentru *interpolare polinoame!*

Avantaje:

- valoarea polinoamelor se calculează ușor;
- sumele, diferențele, produsele de polinoame au ca rezultat polinoame;
- prin derivare și integrare (care se fac ușor), rezultă tot polinoame;
- teoria interpolării polinomiale este simplă și bine pusă la punct.



I. Aproximarea prin Funcții Polinomiale

Se pornește de la teorema lui Weierstrass:

Fie f o funcție definită și continuă pe intervalul $[a, b]$, $f \in C_{[a,b]}$,
 $\forall \varepsilon > 0, \exists p_n(x)$ polinom de gradul $n \quad \forall x \in [a, b] \quad |f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$

➤ În aplicațiile electrotehnice alegerea funcției de aproximare se bazează și pe cunoașterea formei funcției care trebuie aproximată ținând cont de informațiile asupra aplicației practice care a generat modelul matematic.

➤ Problema care se pune este determinarea polinomului $p_n(x)$ care satisface relația de mai sus.

$x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b] \rightarrow f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n), \quad x_i \neq x_j, i \neq j$

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}$$



Demonstrație pe tablă:

Unicitatea Polinomului de Interpolare

Se numește **polinom de interpolare** asociat tabelului de valori un polinom p de grad mai mic sau egal cu n , cu coeficienți reali astfel încât:

$$p(x_i) = y_i$$

are loc formula aproximativă:

$$f(x) \cong p(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$f(x_i) = p(x_i) = y_i, \quad i \in [0, n]$$

unde $p(x)$ este **unic** pentru un tabel dat iar f și p au aceleași valori în nodurile fixate.

Observație:

Polinomul $p(x)$ permite calculul valorilor sale și în punctele $x \neq x_i$, deci între noduri, ceea ce justifică denumirea de **interpolare**.



Problema interpolării presupune parcurgerea etapelor:

- **determinarea coeficienților polinomului de interpolare** prin rezolvarea unui sistem liniar de ecuații algebrice;
- **evaluarea polinomului** de interpolat.

Această variantă de interpolare poate fi aplicată doar pentru valori mici ale gradului polinomului ($n < 5$) deoarece are *două mari dezavantaje*:

- **Efort de calcul mare** pentru determinarea coeficienților (Cramer);
- **Erorile soluției sunt mari** deoarece sistemul poate fi **rău condiționat** pentru valori mari a gradului polinomului.

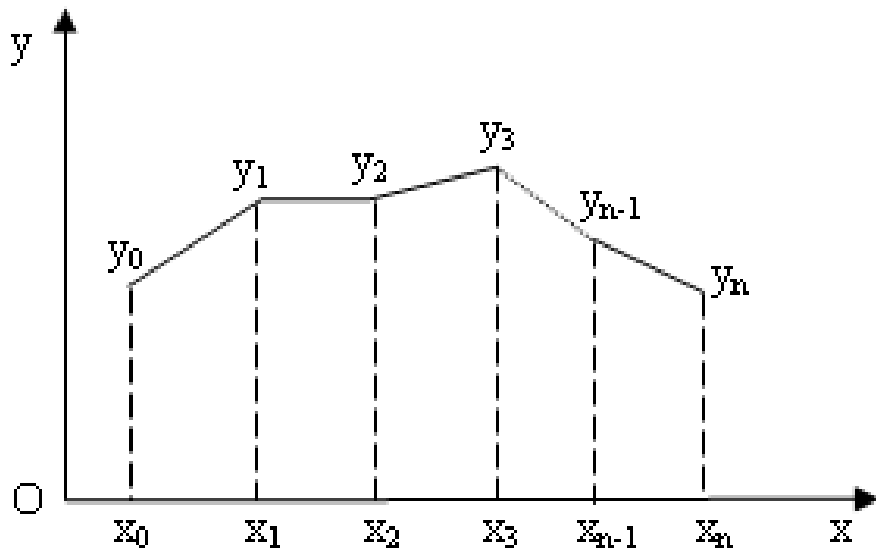


II. Interpolarea Lagrange

➤ Metoda de interpolare bazată pe **polinomul de interpolare Lagrange** **elimină dezavantajele** metodei clasice de interpolare polinomială, în schimb **timpul** necesar evaluării polinomului de interpolare **crește** de la ordinul liniar $O(n)$ la cel pătratic $O(n^2)$.

Fie o funcție $f(x)$ definită pe $[a,b]$, ale cărei valori y_i sunt cunoscute numai în nodurile

$$x_i, y_i = f(x_i) \quad i \in [0, n] \quad - \text{interpolare liniară}$$



x_i - noduri de interpolare

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	...	y_n

Polinomul de interpolare Lagrange

Tabel de valori - din măsurători experimentale

Se construiește **polinomul de interpolare Lagrange** de grad cel mult n :

$$L_n(x) \stackrel{\text{not}}{=} \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot l_i(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot l_i(x)$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

$$L_n(x_k) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot l_i(x_k) = y_k = f(x_k)$$

Deci $L_n(x)$ este polinomul Lagrange de interpolare asociat tabelului de valori

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	...	y_n

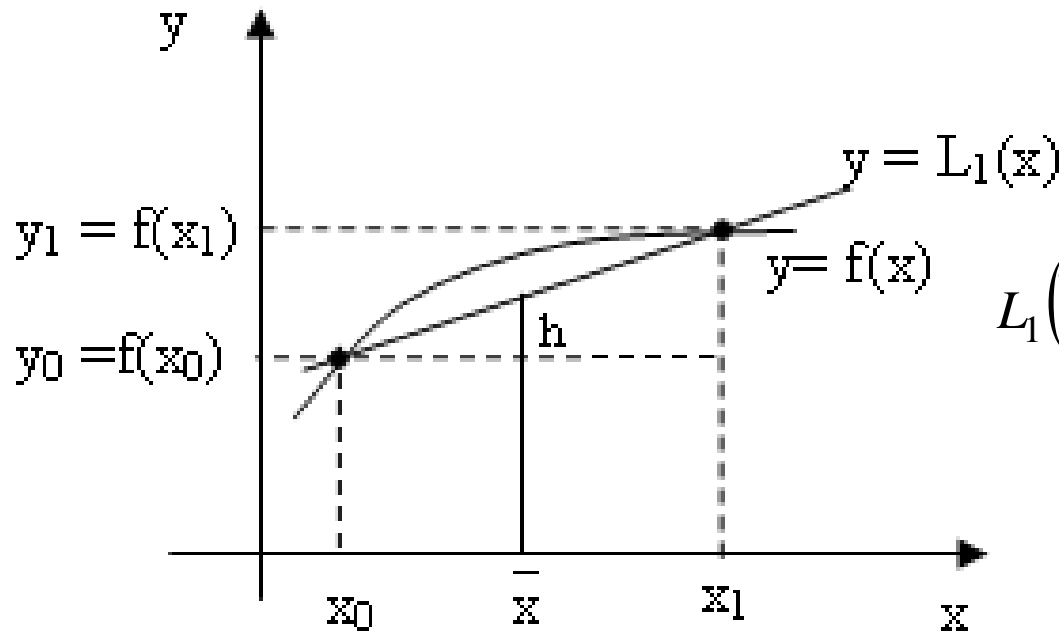
Funcția f și polinomul L_n
au aceleași valori în nodurile fixate!!!

Demonstrație pe tablă:
Forma polinomului elementar l_i

Demonstrație pe tablă:

Exemplificarea unei interpolari Lagrange de gradul I

Dacă $n=1$ atunci se cunoaște funcția în două noduri $x_0, x_1 \rightarrow f(x_0), f(x_1)$



$$L_1(\bar{x}) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (\bar{x} - x_0)$$

Interpolarea Lagrange de ordinul I

- $L_1(x)$ este polinomul Lagrange unic care trece prin punctele (x_0, y_0) și (x_1, y_1) și aproximează funcția $f(x)$ pe intervalul $[x_0, x_1]$.
- **Generalizare:** polinom de grad cel mult n care trece prin $n+1$ puncte în care funcția se cunoaște!

Exemplu de aplicare a Polinomului Lagrange

$$f(x) = e^x \quad \left\{ -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1 \right\} \quad - \text{noduri}$$

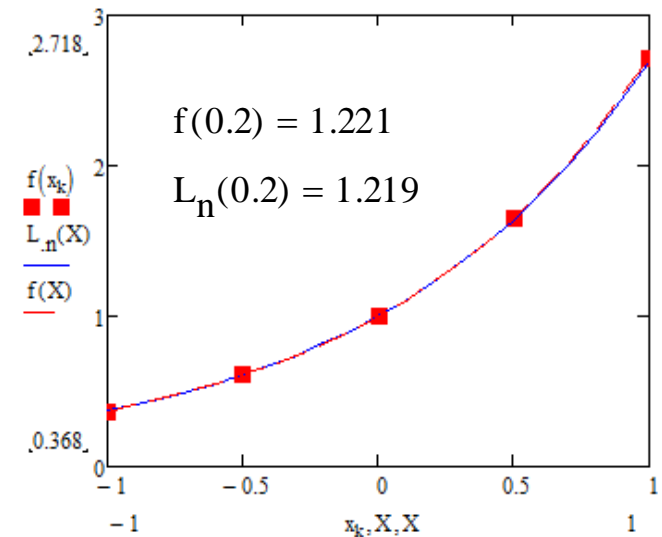
Se interpolează pe intervalul $[-1, 1]$ funcția dată prin polinomul Lagrange $L_n(x)$:

$$L_n(x) = \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 0) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1)}{\left(-1 + \frac{1}{2}\right) \cdot (-1 - 0) \cdot \left(-1 - \frac{1}{2}\right) \cdot (-1 - 1)} \cdot e^{-1} + \frac{(x + 1) \cdot (x - 0) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1)}{\left(-\frac{1}{2} + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - 0\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - 1\right)} \cdot e^{-\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{(x + 1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1)}{(0 + 1) \cdot \left(0 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(0 - \frac{1}{2}\right) \cdot (0 - 1)} \cdot e^0 + \frac{(x + 1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 0) \cdot (x - 1)}{\left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)} \cdot e^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{(x + 1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 0) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)}{(1 + 1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot (1 + 0) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)} \cdot e^1$$

$$L_n(x) = 1.0 + 0.99 \cdot x + 0.49 \cdot x^2 + 0.17 \cdot x^3 + 0.04 \cdot x^4$$



Exemplu de aplicare a Polinomului Lagrange

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \{x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 4\}$$

Se interpolează pe intervalul [1,5] funcția dată prin polinomul Lagrange de ordinul II:

$$l_0(x) = \frac{(x-2.5) \cdot (x-4)}{(2-2.5) \cdot (2-4)} = (x-6.5)x+10$$

$$l_1(x) = \frac{(x-2) \cdot (x-4)}{(2.5-2) \cdot (2.5-4)} = \frac{(-4x+24)x-32}{3}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-2) \cdot (x-2.5)}{(4-2) \cdot (4-2.5)} = \frac{(x-4.5)x+5}{3}$$

$$P(x) = L_2(x) = \sum_{i=0}^2 l_i(x) \cdot f(x_i) \\ = (0.05x - 0.42) \cdot x + 1.15$$

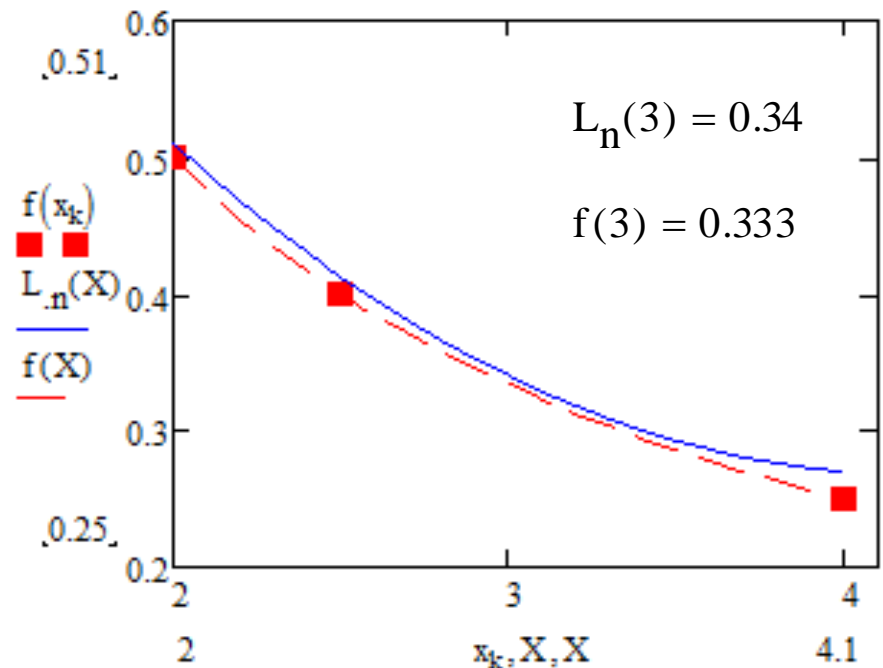
O aproximație pentru $f(3) = \frac{1}{3} = 0.333$

este: $f(3) \cong L_2(3) = 0.34$

$$f(x_0) = f(2) = 0.5;$$

$$f(x_1) = f(2.5) = 0.4;$$

$$f(x_2) = f(4) = 0.25$$



III. Interpolarea Newton cu Diferențe Divizate

➤ Se consideră o funcție reală $y=f(x) : [a,b] \rightarrow \mathfrak{R}$. Se cere să se determine o altă funcție $g(x)$, având o expresie relativ simplă, care să aproximeze cât mai bine funcția $f(x)$ în intervalul considerat (pentru $x \in [a, b]$).

➤ expresia analitică a funcției $f(x)$ este cunoscută, dar de formă relativ complicată, utilizarea ei în calculele practice fiind incomodă

➤ expresia analitică a funcției $f(x)$ nu este cunoscută, ea fiind definită printr-un anumit număr de “puncte”, determinate experimental (inginerie electrica/energetica)

➤ Cele $n+1$ puncte cunoscute fiind definite de perechile de valori date în tabelul rezultat din măsurători experimentale - echidistante

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	f_2	...	f_n

$x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0,1,2,\dots,n-1$

(x_i, y_i) , $y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,2,\dots,n$ $x_0 = a$, $x_n = b$

➤ Se utilizează polinomul de interpolare Newton $N_n(x)$, de grad n determinat de numărul de puncte în care se cunoaște valoarea funcției $f(x)$, pentru care coeficienții a_i , rezultă din condiția: **polinomul de interpolare “trece prin punctele date”**

$$N_n(x_i) = y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$



Demonstrație pe tablă:

Polinomul Newton cu Diferențe Divizate

$$N_n(x) = \underbrace{f[x_0] + \underbrace{(x - x_0)f[x_0, x_1]}_{N_1(x) = f(x) - R_0(x) = f(x)}}_{N_2(x)} + \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]}_{R_1(x)} + \dots + (x - x_0)\dots(x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n]$$

$$R_n(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n)f[x, x_0, x_1, \dots, x_n]$$

Eroarea – restul în metoda de interpolare Newton

Se notează:

Diferențele divizate de ordinul 0 pe un nod: $f[x_0] = f(x_0)$

Diferențele divizate de ordinul 1 pe două noduri:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1]}{x_1 - x_0} + \frac{f[x_0]}{x_0 - x_1}$$

Diferențele divizate de ordinul 2 pe trei noduri: $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_2]}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{f[x_1]}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f[x_0]}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

Diferențele divizate de ordinul n pe $n+1$ noduri:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n \frac{f[x_i]}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_n)}$$



Exemplu de aplicare a Interpolării Newton

Se cunosc valorile funcției în punctele

$$f(0) = -5, f(1) = 1, f(3) = 25, f(4) = 55$$

Să se calculeze valoarea funcției în 0.5 utilizând un polinom de interpolare Newton de gradul I.

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	-5	$\frac{1 - (-5)}{1 - 0} = 6$	$\frac{12 - 6}{3 - 0} = 2$	$\frac{6 - 2}{4 - 0} = 1$
1	1			
3	25	$\frac{25 - 1}{3 - 1} = 12$	$\frac{30 - 12}{4 - 1} = 6$	
4	55	$\frac{55 - 25}{4 - 3}$		

$$N_1(x) = f[x_0] + (x - x_0) \cdot f[x_0, x_1]$$

$$N_1(0.5) = -5 + (0.5 - 0) \cdot 6 = -2$$

$$R_1(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot f[x, x_0, x_1]$$

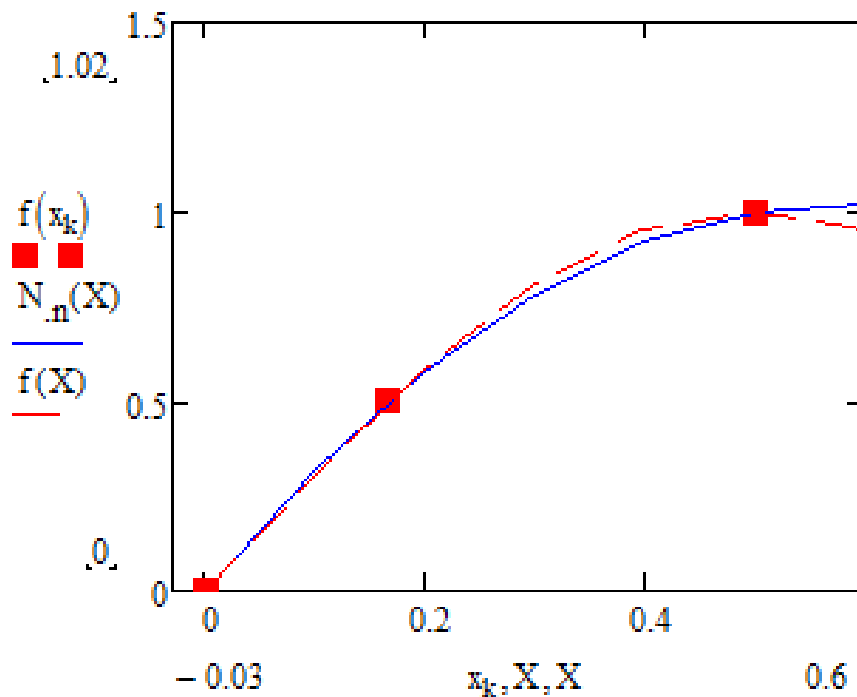
$$R_1(0.5) = (0.5 - 0)(0.5 - 1) \cdot 2 = -0.5$$

Exemplu de aplicare a Interpolării Newton

Să se scrie polinomul de interpolare Newton cu diferențe divizate de gradul II pentru funcția $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$ și nodurile: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{1}{2}$

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	0	0	3	-3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$		
2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	

$$N_n(x) := 7 \frac{x}{2} - 3x^2$$



Implementarea în MathCad a Polinomul de interpolare Newton

Matrix_dif_div :=

Elementele matricei de diferențe divizate G se calculează **iterativ** conform **formulei recursive de determinare a diferențelor divizate**. Pentru parcurgerea liniilor și coloanelor matricei G se folosesc două variabile i și j , și două instrucțiuni repetitive **for**. Elementele rămase necalulate se egalează cu 0 printr-o altă instrucțiune repetitivă **for**:

```
a ← x
b ← y
n ← last(a)
for j ∈ 0.. n
  Gj,0 ← bj
for j ∈ 1.. n
  for k ∈ 0.. n - j
    Gk,j ←  $\frac{G_{k+1,j-1} - G_{k,j-1}}{a_{k+j} - a_k}$ 
  for i ∈ 1.. j
    Gn-j+i,j ← 0
G
```



Polinomul de interpolare de tip Lagrange

- Polinomul de interpolare Lagrange permite calculul valorilor sale și în dintre noduri, ceea ce justifică denumirea de interpolare;
- Eroarea aproximării este dificil de estimat, necesitând cunoașterea valorilor derivatei de ordinul $n+1$;
- Se elimină dezavantajele metodei clasice de interpolare polinomială adică efort de calcul mare și erori mari ale soluției;
- Funcțiile de bază $l_i(x)$ se aleg astfel încât să se anuleze în n puncte;
- Timpul necesar evaluării polinomului de interpolare crește de la ordinul liniar $O(n)$ la cel pătratic $O(n^2)$;
- Are acuratețe a aproximației pe întreg intervalul.

Polinomul de interpolare de tip Newton cu diferențe divizate

- În cazul în care se adaugă un nod de interpolare, față de cazul interpolării Lagrange, interpolarea Newton nu necesită întreaga recalculare;
- Realizează un compromis între evaluare și construcția algoritmului care este stabil din punct de vedere al erorilor numerice;
- Permite mărirea gradului polinomului de interpolare prin adăugarea unui nod nou în rețeaua de interpolare cu reutilizarea coeficienților de la gradul anterior care nu se modifică;
- Coeficienții polinomului Newton reprezintă diferențele divizate ale funcției de interpolat ceea ce ușurează calculul numeric al derivatelor polinomului de interpolare;
- Timpul de calcul este dependent de eroarea impusă având valori mari doar în cazurile în care se dorește o precizie ridicată

Aplicați 01

Se cunoaște un sir de valori ale sarcinii electrice de pe un fir într-un plan cu sistem de coordonate adoptat, în punctele de abscise cunoscute. Care este, în aceasta situație, funcția numerică de distribuție de sarcină electrică pe fir în planul considerat?

-- coeficient de multiplicare pentru afisare grafica optima $m := 10^6$

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1.2 \\ 2 \\ 2.5 \\ 3.4 \\ 6 \\ 7.6 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ mm} \quad Q(x) := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1.4 \\ 2.4 \\ 3.5 \\ 5.7 \\ 6 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} \cdot m \text{ Coulomb}$$

-- lungimea firului: $L := 15 \text{ mm}$

În această problemă se urmărește exprimarea funcției numerice după care variază sarcina unui corp bidim când sunt determinate, posibil experimental, valori ale sarcinii în puncte diferite de pe corp (fir). Astfel, se ajunge la densitatea lineică de sarcină pentru corpul considerat, pe baza căreia se pot calcula intensitatea câmpului electric, potențialul electric în orice punct din plan.

Modelul matematic la care se reduce problema:

$$Q(x) = \text{Funcție}(x)$$

$$dQ = \rho_L(x) \cdot dx$$

$$\rho_L(x) = \text{Funcție1}(x)$$

În vederea calculării funcției de repartiție se apelează la metoda numerică de interpolare Lagrange (interpolare polinomială).

- metoda constă în găsirea unui polinom, cu coeficienți reali, a cărori valori în abscisele cunoscute să fie egale cu valorile sarcinii în acele puncte, iar pe intervalul de lungime a firului funcția de repartiție să fie egală cu polinomul respectiv;
- intervalul considerat este lungimea firului cu sistemul de coordonate fixat la începutul acestuia;
- polinomul este unic pentru setul de valori prescris;
- intervalul ales: $L := 0..15$ mm
- numărul de valori stabilite $n := 10$ $i := 0..n - 1$ $j := 0..n - 1$

-- valorile absciselor dispuse orizontal (se apelează din meniul Vector and Matrix Palette, obiect Matrix Transpose, ori Ctrl+1):

$$x^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1.2	2	2.5	3.4	6	7.6	8	9	10

-- valorile ordonatelor (sarcinii): $y(x) := Q(x)$

$$y(x)^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.5	0.6	0.8	1.4	2.4	3.5	5.7	6	8	20

-- coeficienti de calcul cu instructiunea de conditionare 'if' (daca $i=j$, valoarea coeficientului este 1):

$$\text{coef}_i := \prod_j \left[\text{if} \left[(i = j), 1, (x_i - x_j) \right] \right]$$

-- functie intermediara necesara rularii metodei (polinom de ordinul $n-1$, obtinut prin inmultire):

$$\text{intermediar}(z) := \prod_j (z - x_j) \quad \text{z este variabila functiilor intermediare si finala, de interpolare;}$$

-- formula definita a polinomului initial Lagrange:

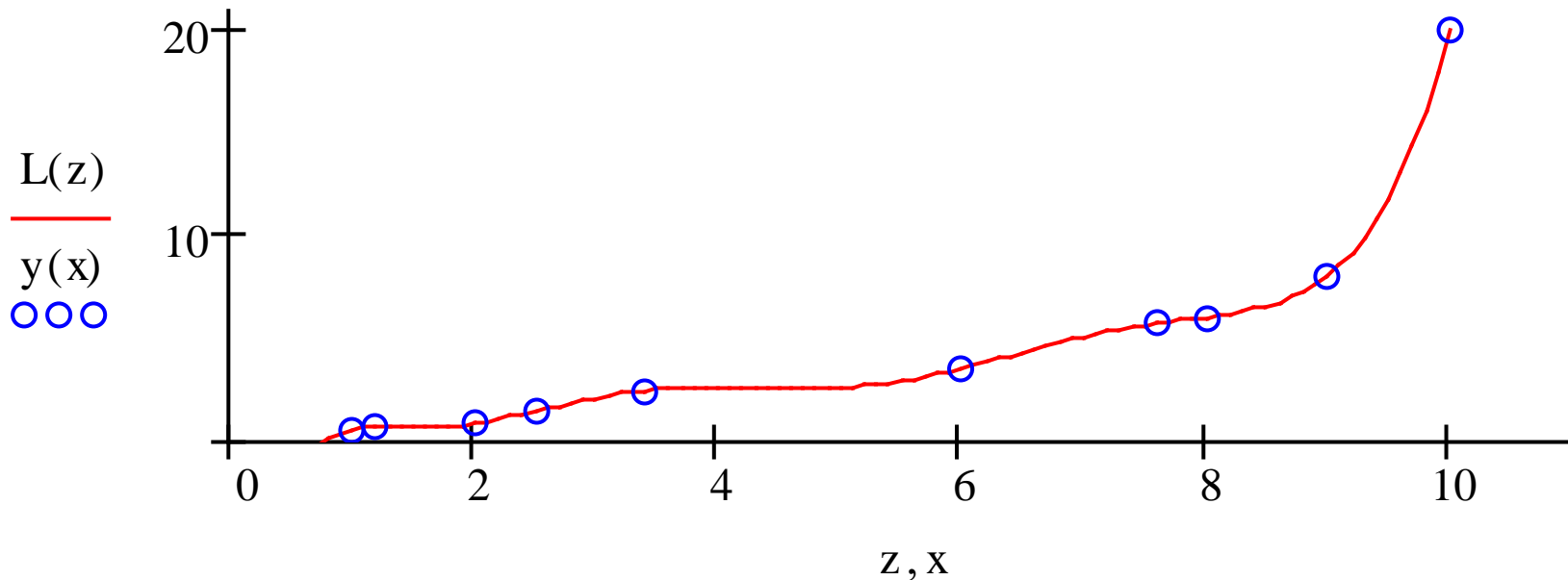
$$l(i, z) := \text{if} \left[z = x_i, 1, \frac{\text{intermediar}(z)}{(z - x_i) \cdot \text{coef}_i} \right]$$

-- polinomul de interpolare, numit Lagrange:

$$L(z) := \sum_i l(i, z) \cdot y(x)_i$$

-- forma functiei de interpolare pentru lungimea corpului incarcat cu sarcina:

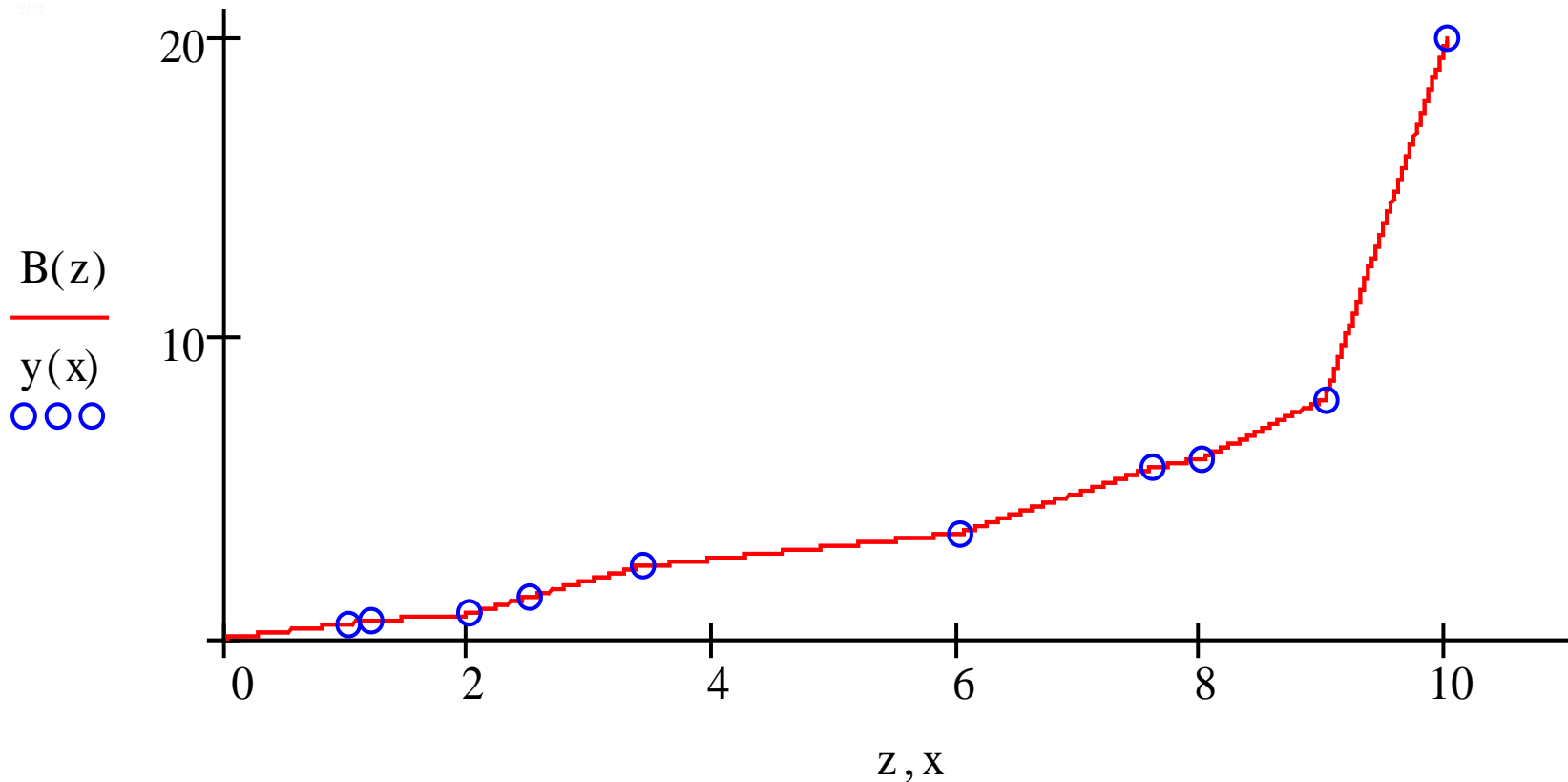
$z := 0, 0.1.. 10$



D. Determinarea functiei de interpolare si reprezentarea ei grafica este posibila si prin utilizarea unor functii predefinite in Mathcad, care metode au la baza algoritmi interni precum cel prezentat anterior. In continuare, se exemplifica o functie predefinita de interpolare din butonul 'Insert Function', $\text{linterp}(x,y,z)$.

$B(z) := \text{linterp}(x, y(x), z)$

$z := 0, 0.001.. 10$



Observatie: Acuratetea de reprezentare este evidenta, in cazul graficelor de mai sus.

Astfel, cand se cere o aproximatie cat mai apropiata de adevar metoda numerica expusa se dovedeste mai avantajoasa, atat pentru figurarea variatiei, cat si pentru calculul in puncte aflate in domeniul celor cunoscute.

-- in vederea exemplificarii ultimului argument se stabileste un set de valori de pe lungimea corpului pentru care se calculeaza valorile sarcinii:

$$X := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3 \\ 7 \\ 9.5 \end{pmatrix}$$

$$k := 0..3$$

$$L(X_k) =$$

0.591
2.051
5.044
11.776

metoda numerica

$$B(X_k) =$$

0.675
1.956
4.875
14

functia predefinita

Obtinerea cat mai exacta a functiei de interpolare depinde si de gradul polinomului de interpolare; daca acesta este inferior si precizia va fi de nivel scazut; cresterea gradului este insa limitata si superior.

Aplicații 02

Intr-un mediu de dimensiuni foarte mari, se masoara in puncte spatiale egal distantate consecutiv, pe o linie dreapta pornind de la o origine bine fixata, un set de valori ale potentialului electric, creat de un camp electric static. Pe baza acestor masuratori si a faptului ca starea electrica a mediului se considera a avea simetrie, se urmareste determinarea distributiei de potential in intreg mediul. Prin ce modalitate este posibila realizarea acestei optiuni?

Datele problemei:

-- sirul de valori spatiale cunoscute:

(0,0,0) (1,1,1) (2,2,2) (3,3,3) (4,4,4) (5,5,5)

-- starea numerica a potentialului in punctele de masura in ordinea definirii lor:

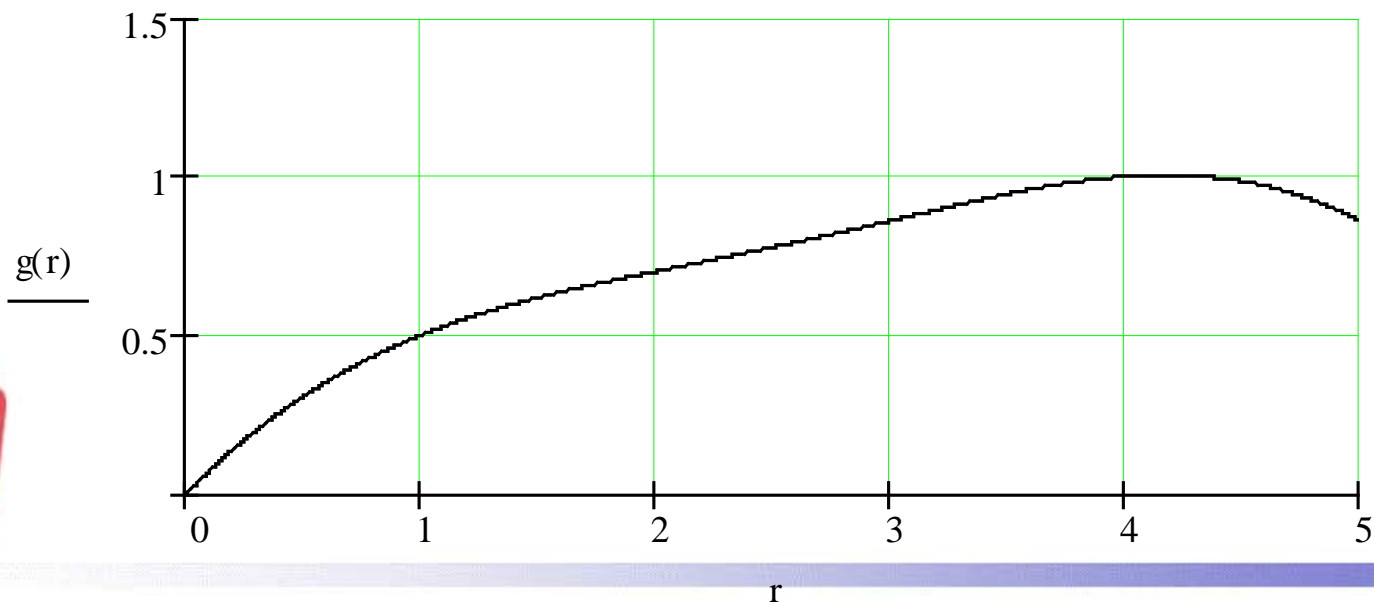
$$V_p := (0 \ 0.5 \ 0.7 \ 0.86 \ 1 \ 0.86)V$$



Solutionarea problemei se poate realiza si prin apelul la o functie predefinita in Mathcad; aceasta functie, numita 'cspline' are ca algoritm intern o metoda de interpolare polinomiala, la care precizia de calcul este, dupa cum va fi aratat, diferita de metoda utilizata mai sus.

$$t := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.7 \\ 0.86 \\ 1 \\ 0.86 \end{pmatrix} \quad S := \text{cspline}(t, w) \quad g(r) := \text{interp}(S, t, w, r)$$

-- reprezentarea grafica a functiei:



var := 0, 0.5.. 5

--> esantion de valori ale variabilei spatiale

f(var) =

0
0.312
0.5
0.616
0.7
0.778
0.86
0.942
1
0.993
0.86

--> valorile functiei definita dupa metoda

valorile functiei definita intern in Mathcad <--

g(var) =

0
0.307
0.5
0.618
0.7
0.777
0.86
0.945
1
0.985
0.86

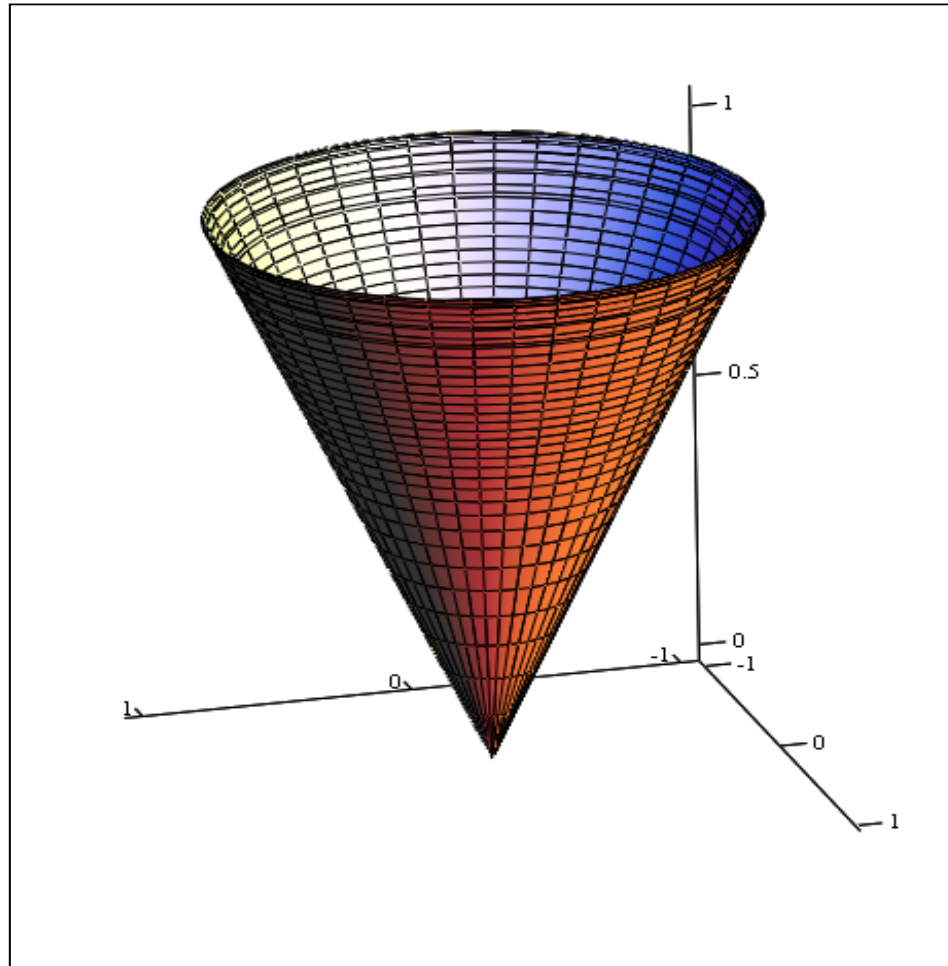


Reprezentarea grafica tridimensională a distribuției de potențial electric:

$$A_{i,j} := f(x_i) \cdot \sin(\text{rot}_j)$$

$$B_{i,j} := f(y_i) \cdot \cos(\text{rot}_j)$$

$$C_{i,j} := f(z_i)$$



(A, B, C)



Functii Mathcad pentru interpolarea unei suprafete in 2D

Se introduce o **matrice patratica** care genereaza o suprafata:

$$Mz := \begin{pmatrix} 2 & -0.9 & 5 & 7 & 0.9 & 3 \\ -4.7 & 2 & 8.9 & 9 & 7.1 & 12 \\ -12 & 5 & 17 & -12 & 1 & 0 \\ 2 & 0.1 & -0.8 & 3.4 & 5 & 7 \\ 9 & 8 & 9.2 & -1 & 9 & 3.2 \\ 0 & 0.8 & -9.6 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rows}(Mz) = 6$$

$$\text{cols}(Mz) = 6$$

$$n := \text{rows}(Mz)$$

$$n = 6$$



Se scriu vectorii X si Y cu n-linii care determina retea:

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

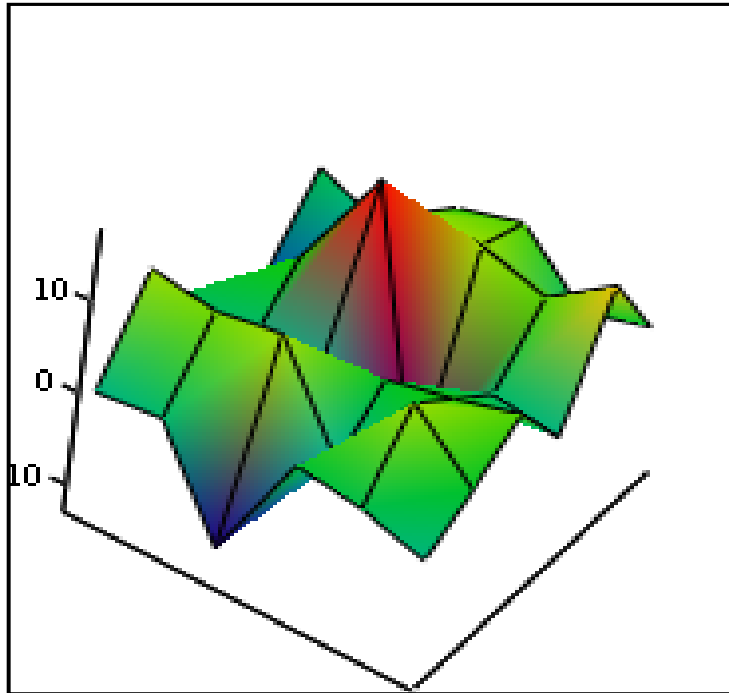
$$M_{xy} := \text{augment}(\text{sort}(X), \text{sort}(Y)) \quad \text{rows}(M_{xy}) = 6$$

Coefficientii functiei spline

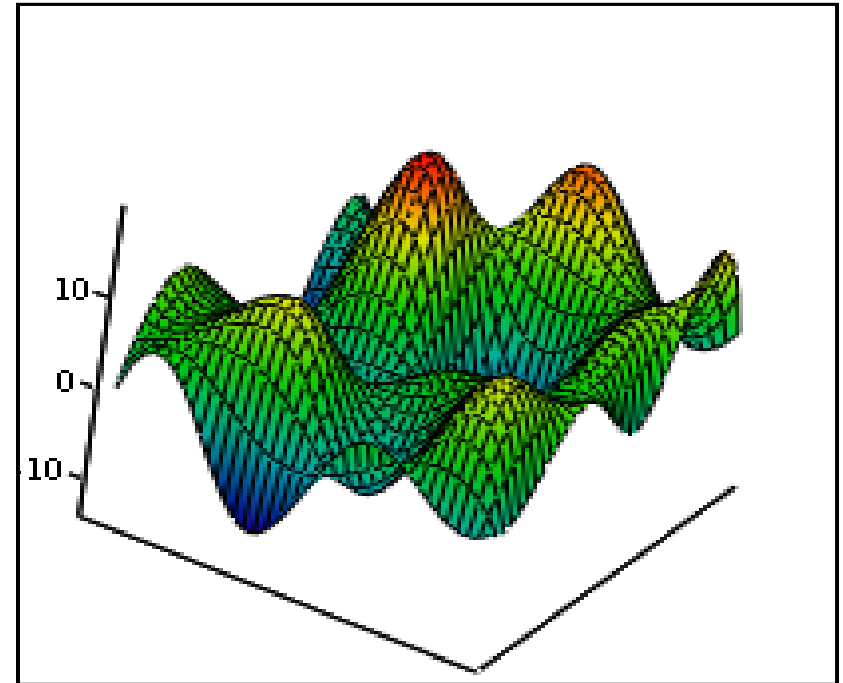
$$S := \text{cspline}(M_{xy}, Mz) \quad \text{fit}(x, y) := \text{interp}\left[S, M_{xy}, Mz, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$$

Suprafata originala realizata doar prin unirea cu segmente a punctelor matricii:

2D Spline- Suprafata interpolata in care punctele intermediare sunt calculate si afisate:



Mz



FIT

