

Curs 8

Integrarea Numerică

Calculul Numeric al Integralelor cu aplicații în Ingineria Electrică

As. Dr. ing. Levente CZUMBIL

Laboratorul de Cercetare în Metode Numerice
Departamentul de Electrotehnică, Inginerie Electrică

E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro Site: <http://users.utcluj.ro/~czumbil>



Introducere

- În domeniul ingineriei electrice există situații practice când este necesară **evaluarea numerică** a valorilor derivatelor și/sau integralelor definite ale unor funcții la care nu se cunoaște expresia analitică a funcției care trebuie derivată sau integrată, ci doar valorile ei în anumite puncte (**determinate experimental** sau prin calcule) sau **derivarea/integrarea analitică este greoaie** sau chiar **imposibilă**
- Trebuie ținut cont că în tehnică de obicei nu se cunoaște expresia analitică a funcției care trebuie derivată, ci doar valorile ei în anumite puncte (**determinate experimental** sau prin calcule).
- Se dorește **determinarea aproximativă a derivatei/integralei** în punctele unde se cunoaște valoarea funcției, cât și în alte puncte.

Exemple de Aplicații

❖ Evaluarea supratensiunilor induse datorită trăsnetelor pe LEA



Cuantificarea efectelor de supratensiuni induse în LEA pornește de la expresiile deduse pentru câmpurile electrice și magnetice generate de trăsnet, expresii care apar în cadrul unor integrale complexe.

$$B_{\varphi}(r, z, \omega) = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-H}^H G_{\varphi}(r, z, z', \omega) \cdot \exp\left(-j \cdot \omega \cdot \frac{R}{c}\right) \cdot I(z', \omega) dz'$$

$$G_{\varphi}(r, z, z', \omega) = \left[\frac{r}{\left(r^2 + (z' - z)^2\right)^{3/2}} + j \cdot \omega \cdot \frac{r}{c \cdot \left(r^2 + (z' - z)^2\right)} \right]$$

- ❖ Planificarea investițiilor în capacitățile de generare, în raport cu prețul introdus pentru emisiile de CO₂;
- ❖ Evaluarea indicatorilor specifici de caracterizare a curbelor de sarcină la un consumator industrial, pentru încadrarea în limitele prognozate de putere absorbită;
- ❖ **Studiul efectului de stimulare magnetică a țesuturilor nervoase;**
- ❖ Predicția defectelor în rotoarele cu colivie la motoarele electrice asincrone;
- ❖ Proiectarea reguletoarelor de turatie și cuplu, în convertizoarele de frecvență;
- ❖ Testarea la defect de scăpări a unor conductoare, prin injecția de impulsuri și evaluarea numerică prin integrare a densității de energie;



❖ **Stabilirea cantităților de energie consumate, pe baza înregistrărilor de putere – curba de sarcină zilnică (prelucrarea curbelor de sarcină prin integrare numerică)**

Se consideră un receptor de energie electrică pentru care se cunoaște curba de sarcină zilnică referitoare la puterea activă consumată.

$$W_{zi} = \int_0^{24} P(t) \cdot dt$$

Se cere să se determine energia activă zilnică consumată de receptor, pe baza prelucrării curbei de sarcină prin integrare numerică.

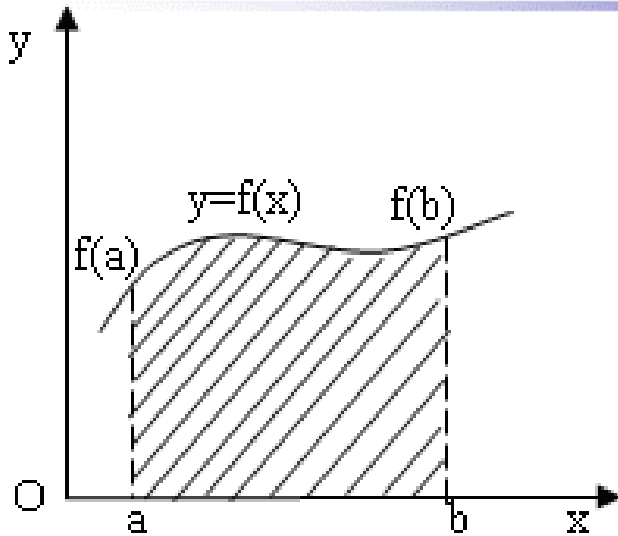
t [h]	P [MW]
0	1,42
2	1,06
4	2,17
6	2,83
8	2,75
10	2,67
12	2,59
14	2,55
16	2,57
18	2,84
20	3,43
22	3,02
24	1,53



- ❖ Studiul performanțelor transformatoarelor trifazate de putere, când alimentează sarcini dezechilibrate și neliniare;
- ❖ Proiectarea mașinilor electrice utilizând circuite magnetice: reluctanțe și permeanțe;
- ❖ Calcularea pierderilor de energie în rotorul unei mașini electrice; se aplică integrale din funcții hiperbolice, deduse din expresiile analitice ale intensității câmpului magnetic;
- ❖ În proiectarea cuptoarelor cu inducție de utilizare industrială, se impune ca pierderile de energie în pereți, datorită curenților turbionari, să fie minime; evaluarea acestor pierderi se realizează prin calculul numeric al unor integrale semiinfinite;



Metode Numerice de Calcul ale Integralelor Definite



Aceste metode se numesc **cuadraturi** care înlătură neajunsurile datorate funcțiilor care nu admit primitive și realizează determinarea aproximativă a ariei domeniului de sub curba $y = f(x)$!!!

Cuadratura este o procedură numerică prin care valoarea unei integrale definite

$$\int_a^b f(x) dx$$

este aproximată folosind informații despre integrand numai în anumite puncte (se cunosc valorile funcției în puncte pe baza unor măsurători experimentale):

$$x_i \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad y_i = f(x_i)$$

În majoritatea aplicațiilor cele $n+1$ puncte distincte sunt echidistante în $[a, b]$, pasul de discretizare fiind

$$h = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad x_0 = a, \quad x_n = b$$

Formule de Cuadratura Newton-Côtes

Formulele de integrare care utilizează valorile funcției la capetele intervalului de integrare, $y_0 = f(a)$, $y_N = f(b)$ sunt denumite *formule închise*.

Foarte uzuale sunt metodele care utilizează interpolarea polinomială pe o diviziune echidistantă a intervalului de integrare $\{a = x_0, x_1, \dots, x_N = b\}$ cu pasul:

$$h = x_{i+1} - x_i = \frac{b - a}{N}$$

formulele obținute fiind denumite formule de cuadratura de tip *Newton-Côtes*.



Demonstrația 1 – pe tablă

Observație: Metodele concrete de tip Newton-Côtes se diferențiază între ele prin valoarea adoptată pentru ordinul metodei n și prin modul de considerare a limitelor intervalului de integrare.

➤ În continuare se vor considera cazurile în care formulele se deduc utilizând *funcțiile Lagrange de interpolare* de **ordinul I** (*formula trapezului*) și de **ordinul II** (*formula lui Simpson*) cu nodurile echidistante.

Formula trapezelor este surprinzător de eficientă chiar și pentru intervale infinite. Ambele reguli se obțin aplicând cele mai simple tipuri de interpolare subintervalelor diviziunii:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b \qquad h = \frac{b-a}{N}$$

$$x_i = a + h \cdot i \qquad i = \overline{0, N}$$



I.1 Formula de Integrare a Trapezelor

Este o aplicație directă a interpolării liniare Lagrange în două puncte.

Se cunoaște funcția în două puncte: $a = x_0$, $x_1 = b \Rightarrow f(x_0)$, $f(x_1)$; $h = (b - a)$

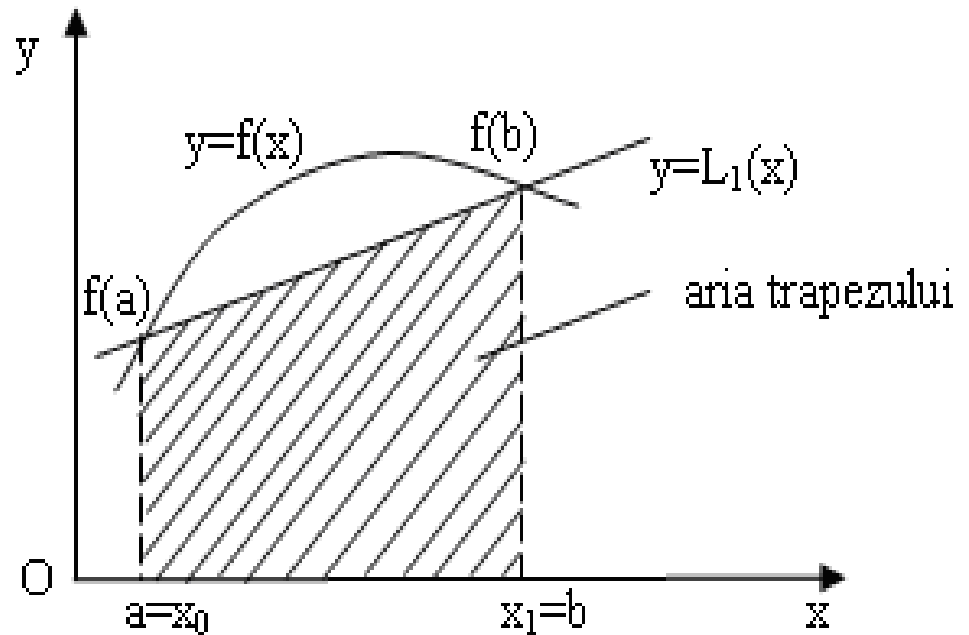
Se dorește calculul aproximativ al integralei definite: $\int_a^b f(x) dx$

utilizând polinomul linear de interpolare Lagrange: $f(x) = L_1(x) + R_1(x)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b L_1(x) dx + \int_a^b R_1(x) dx$$

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (x - a) \cdot (x - b)$$

Demonstrația 2 – pe tablă



I.2 Formula Trapezelor Generalizată

Pentru creșterea preciziei calculului, intervalul $[a,b]$ poate fi divizat în N subintervale prin punctele echidistante x_i , $i = 0, N$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b \quad x_i = a + h \cdot i \quad h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{N} > 0$$

pe care se aplică repetat formula trapezului, adică:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \right)$$

Deci formula trapezelor generalizată este:

Demonstrația 3 – pe tablă

$$I_{Trapez}(f) = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2 \cdot N} \cdot \left(f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \right) - \frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi)$$

Formula poate fi îmbunătățită ținând cont de faptul că eroarea este proporțională cu $1/N^2$, adică dacă dublăm numărul de noduri în care este dată funcția f , atunci eroarea scade de patru ori, dar timpul de calcul va crește. Geometric înseamnă că $f(x)$ s-a aproximat cu N segmente de dreapta, adică integrala rezultă prin însumarea ariilor a N trapeze.

II.1 Formula de Integrare a lui Simpson

O îmbunătățire a integrării numerice față de regula trapezelor: prin utilizarea polinoamelor de interpolare de grad mai mare.

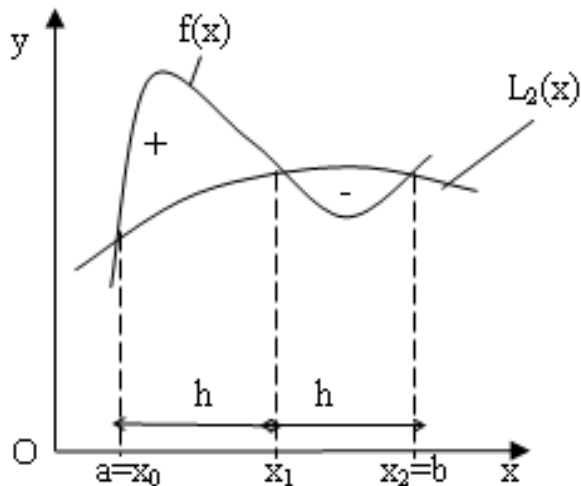
Acesta ar fi pasul logic următor pentru a genera o regulă de cuadratură pentru integrare pornind de la interpolarea patritică adică utilizarea polinoamelor algebrice de gradul doi pentru aproximarea unei funcții între trei noduri consecutive.

În acest fel se poate pune în evidență una dintre cele mai uzuale formule de integrare numerică, formula lui Simpson. În cazul în care numărul nodurilor prin care este definită funcția de sub integrală este par atunci pe primul sau pe ultimul interval se aplică formula trapezului.

Se cunoaște funcția în trei noduri:

$$x_0 = a, x_1 = c = \frac{a+b}{2}, x_2 = b \Rightarrow f(x_0), f(x_1), f(x_2) \quad x_1 = a + h, h = \frac{b-a}{2}$$

iar polinomul de *interpolare Lagrange de ordin II* este cel cu care se aproximează funcția de sub integrala definită.



Observație: Interpretarea geometrică a formulei lui Simpson, prezentată în figură, indică aproximarea ariei de sub curba $y = f(x)$ cu aria de sub parabola (definită de polinomul de interpolare Lagrange) care aproximează funcția $f(x)$.

Se presupune interpolarea funcției de integrat $f(x)$ cu un polinom pătratic $P_2(x)$ în nodurile x_0, x_1, x_2 .

$$f(x) = L_2(x) + R_2(x) \qquad \int_a^b f(x) dx = \int_a^b L_2(x) dx + \int_a^b R_2(x) dx$$

Formula lui Simpson:

Demonstrația 4 – pe tablă

$$I_{Simpson}(f) = \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f(a) + 4 \cdot f(c) + f(b)) - \frac{h^5}{90} \cdot f''''(\xi)$$

Cu cât lungimea intervalului $[a, b]$ este mai mică cu atât resturile sunt mai mici.

II.2 Formula lui Simpson Generalizată

Date fiind calitățile sale și simplitatea aplicării practice, formula generalizată se utilizează foarte des, *Mathcadul* utilizând formula lui Simpson aplicată repetat pe un număr tot mai mare de subintervale până la atingerea preciziei dorite.

Pentru creșterea preciziei calculului, intervalul $[a,b]$ poate fi divizat în $2 \cdot N$ subintervale de lungimi egale $2 \cdot h$, cu pasul h pe care se aplică formula lui Simpson pe fiecare interval $[x_{2i}, x_{2i+2}]$.

$$I_{SimpsonGen}(f) = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i}{3} \cdot [f(x_{2i}) + 4 \cdot f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})] \quad h = \frac{b-a}{2 \cdot N}$$

Pentru $h_i = h, \forall i$:

$$\begin{aligned} I_{SimpsonGen}(f) &\approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + \dots + \right. \\ &\quad \left. 2 \cdot f(x_{2i}) + 4 \cdot f(x_{2i+1}) + \dots + f(x_{2N}) \right] = \\ &= \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \cdot \sum_k f(x_k) + 2 \cdot \sum_j f(x_j) + f(x_{2N}) \right] \end{aligned}$$

$$k = 1, 3, \dots, 2N - 1 \quad j = 2, 4, \dots, 2N - 2$$



Analog însumând se obține relația erorii în formula lui Simpson generalizată:

$$Eroarea_{SimpsonGen} = -\frac{N \cdot h^5}{90} f'''(\xi) = -\frac{(b-a) \cdot h^4}{180} f'''(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

Dacă presupunem că există $M_3 > 0$ astfel încât $|f'''(x)| \leq M_3$, $x \in [a, b]$

$$|Eroarea_{SimpsonGen}| \leq \frac{(b-a) \cdot h^4}{180} M_3$$

$$|Eroarea_{SimpsonGen}| \leq \frac{M_3}{2880 \cdot N^4} (b-a)^5$$



Exemplu Practic

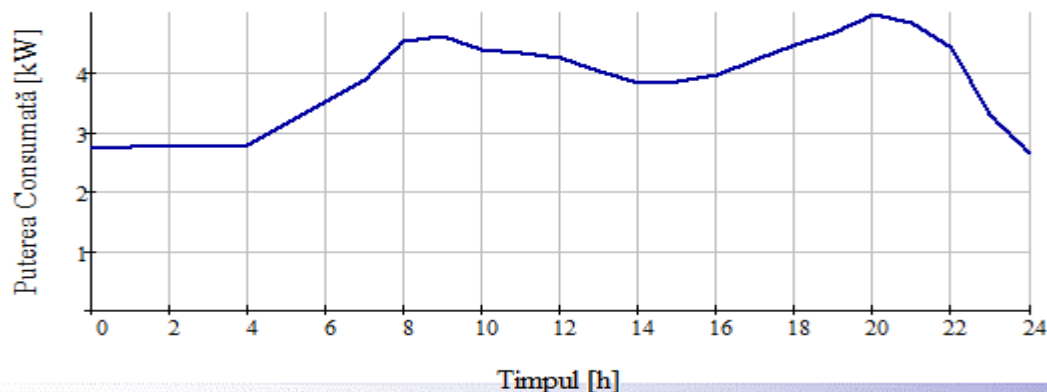
❖ Stabilirea cantităților de energie consumate, pe baza înregistrărilor de putere – (*prelucrarea curbelor de sarcină prin integrare numerică*).

Se consideră un receptor de energie electrică pentru care se cunoaște curba de sarcină zilnică referitoare la puterea activă consumată.

Se cere să se determine energia activă consumată de receptor, pe durata unei zile, pe baza prelucrării curbei de sarcină prin integrare numerică.

i	n/a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_i = t_i$	[h]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$y_i = P_i$	[kW]	2.73	2.74	2.77	2.76	2.78	3.14	3.52	3.88	4.53	4.61	4.37	4.32	4.25

i	n/a	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$x_i = t_i$	[h]	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$y_i = P_i$	[kW]	4.03	3.83	3.86	3.95	4.20	4.46	4.67	4.98	4.84	4.42	3.29	2.64



$$E_{zi} = \int_0^{24} P(t) \cdot dt$$

Curba de sarcină activă zilnică a unui receptor de energie electrică, exprimă variația în timp a puterii active consumate pe durata unei zile.

Determinarea curbei de sarcină s-a realizat prin înregistrarea variației în timp a puterii active consumate P cu instrumente înregistratoare sau prin măsurarea puterii la anumite momente bine determinate, de regulă echidistante (de exemplu, din sfert în sfert de oră).

Se cere ca pe baza curbei de sarcină să se determine energia activă consumată de receptor pe durata unei zile. Energia activă se calculează cu relația:

$$E_{zi} = \int_0^{24} P(t) \cdot dt$$

unde t este timpul, iar funcția $P(t)$, reprezentând variația în timp a puterii active consumate, este definită, de regulă, prin puncte.

În consecință, calculul integralei se poate face numai cu metode numerice, considerând că lui x îi corespunde t , funcției $y = f(x)$ îi corespunde $P(t)$, iar ora 0, respectiv 24, sunt limitele intervalului de integrare $[a,b]$

În continuare se aplică *metoda generalizată a trapezelor*, cea bazată pe *formula lui Simpson* și *formulele de cuadratură de tip Newton-Côtes de ordinul III* (toate compatibile cu numărul de puncte date).

Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Odin Metodă	I (Trapez)	II (Simpson)	III
E_{zi} [kWh]	92.885	92.817	92.876

Pe baza rezultatelor se poate estima mai exact energia activă consumată pe durata unei zile, ca fiind aproximativ $92.8 \div 92.9$ kWh

Dacă se dorește o determinare și mai precisă a valorii energiei active consumate, atunci pasul de discretizare a măsurărilor trebuie să fie mai mic (adică citirile să se efectueze la fiecare jumătate sau la fiecare sfert de oră),



Aplicația 01

Fie funcția de două variabile $f(x, y) = x + y \cdot |\sin(x)| + e^{-3y}$ definită pe intervalele $x \in [a, b]$ și $y \in [c, d]$. Se cere calculul integralei duble pe întreg domeniul de definiție.

Pasul 1. Se definește funcția $f(x, y)$:

$$f(x, y) := x + y \cdot |\sin(x)| + e^{-3y}$$

Pasul 2. Se definesc limitele domeniului de definiție a funcției $f(x, y)$. Se ia un număr de $2N_x$, respectiv $2N_y$ de puncte de calcul pe cele două intervale :

$$a := 0 \quad b := 5 \quad c := -2 \quad d := 4 \quad N_x := 10^2 \quad N_y := 10^2$$

Pasul 3. Se determină pașii integrare pe intervalele $[a, b]$ și $[c, d]$:

$$h_x := \frac{b - a}{2 \cdot N_x} \quad h_y := \frac{d - c}{2 \cdot N_y} \quad h_x = 0.025 \quad h_y = 0.03$$



Pasul 4. Se determină punctele intermediare x_i și y_j de calcul pe cele două intervale:

$$i := 0..2N_x \quad j := 0..2N_y \quad x_i := a + i \cdot h_x \quad y_j := c + j \cdot h_y$$

Pasul 5. Se integrează funcția $f(x, y)$ după variabila y utilizând formula lui Simpson pentru fiecare punct intermediar y :

$$k := 2, 4..2 \cdot N_y - 2 \quad l := 1, 3..2 \cdot N_y - 1$$
$$I_{x_i} := \frac{h_y}{3} \left[f(x_i, y_0) + f(x_i, y_{2 \cdot N_y}) + 2 \cdot \left(\sum_k f(x_i, y_k) \right) + 4 \cdot \sum_l f(x_i, y_l) \right]$$

Pasul 6. Se integrează funcția $f(x, y)$ după variabila x utilizând formula lui Simpson pentru fiecare punct intermediar x :

$$k := 2, 4..2 \cdot N_x - 2 \quad l := 1, 3..2 \cdot N_x - 1$$
$$I_d := \frac{h_x}{3} \left(I_{x_0} + I_{x_{2 \cdot N_x}} + 2 \cdot \sum_k I_{x_k} + 4 \cdot \sum_l I_{x_l} \right) \quad I_d = 767.0839468763276$$



Pasul 7. Se evaluează valoarea integralei duble a funcției $f(x,y)$ după variabilele x și y folosindu-se operatorul de integrare din *Mathcad* (dacă s-ar cunosște forma analitică a funcției):

$$I_{\text{def}} := \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx \quad I_{\text{def}} = 767.0833318910629$$

Pasul 8. Se determină eroarea absolută dintre rezultatul obținut prin formula lui Simpson și cel returnat de operatorul din *Mathcad*:

$$Er := |I_{\text{def}} - I_d| \quad Er = 6.15 \times 10^{-4}$$



Aplicația 02

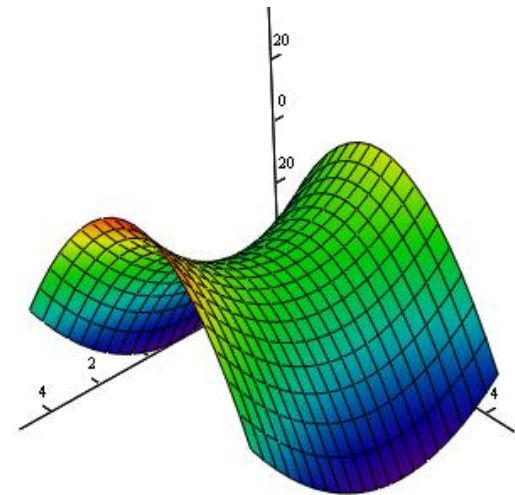
❖ Se dă funcția $f(x,y)=x^2-2y^2+2x+1$. Să se determine aria suprafeței generate de această funcție pe discul delimitat de inecuația $x^2+y^2 < r^2$, unde r este o constantă.

$$\text{Aria} = \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}f(x,y)\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}f(x,y)\right)^2} dy dx$$

Pasul 1. Se definește funcția $f(x,y)$ și constanta $r=5$:

$$f(x,y) := x^2 - 2y^2 + 2x + 1 \quad r := 5$$

Pasul 2. Se reprezintă grafic suprafața generată de funcția $f(x,y)$:



Pasul 3. Se definește funcția auxiliară $F(x,y)$ folosită pentru evaluarea suprafeței generate de funcția $f(x,y)$:

$$F(x,y) := \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}f(x,y)\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}f(x,y)\right)^2}$$

Pasul 4. Se calculează aria suprafeței generate de funcția $f(x,y)$ pe discul delimitat de inecuația $x^2+y^2 < r^2$, prin apelarea operatorului de integrare pe funcția auxiliară $F(x,y)$:

$$\text{Aria} := \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} F(x,y) dy dx$$

Pasul 5. Se vizualizează valoarea ariei calculate:

$$\text{Aria} = 825.044$$



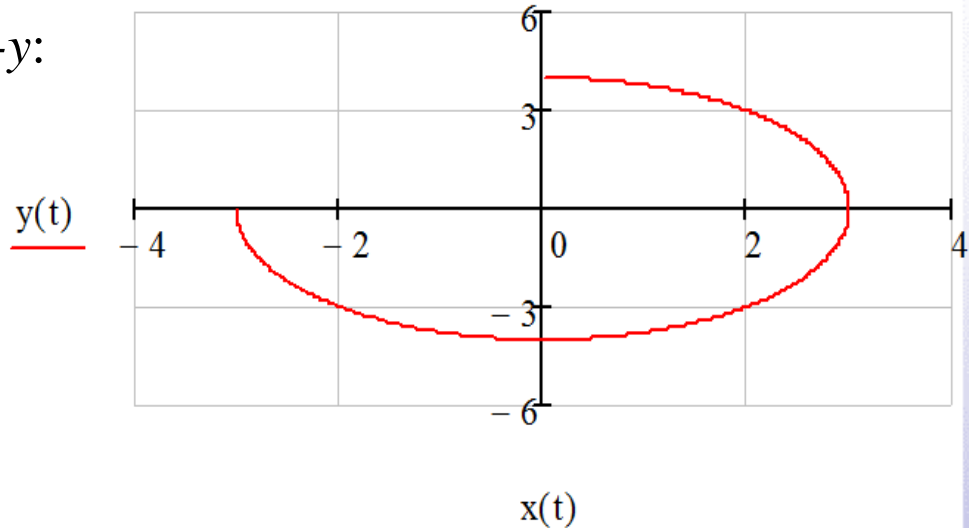
Aplicația 03

❖ Fie $z(t)$ o curbă în planul complex x - y :

$$z(t) = x(t) + j \cdot y(t)$$

$$x(t) = 3 \cdot \sin(t) \quad y(t) = 4 \cdot \cos(t)$$

$$t \in \left[0, \frac{3 \cdot \pi}{2} \right]$$



Să se determine valoarea integralei pe această curbă din funcția: $f(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1}$

Pasul 1. Se definește calea de integrare, curba $z(t)$:

$$z(t) := 3 \cdot \sin(t) + 4 \cdot \cos(t) \cdot j$$



Pasul 2. Se definește funcția $f(z)$ ce urmează a fi integrată după curba $z(t)$:

$$f(z) := \frac{1}{z^2 + z + 1}$$

Pasul 3. Se definesc limitele de integrare:

$$t_i = 0 \qquad t_f = \frac{3 \cdot \pi}{2}$$

Pasul 4. Se calculează integrala curbilinie:

$$\int_{t_i}^{t_f} f(z(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} z(t) \right) dt = 0.417 - 0.25i$$



Aplicația 04

❖ Se consideră un bloc format din mai multe straturi de materiale dielectrice imperfecte, de grosimi foarte mici, la fiecare strat fiind cunoscută conductivitatea electrică. Se dau aceste valori ale conductivității electrice pentru fiecare strat. De asemenea, se figurează blocul, cu mențiunea că dimensiunea perpendiculară pe plan este λ . Se cere determinarea rezistenței electrice între fețele arcuite BA , respectiv CD presupuse metalizate, sub unghiul α dat.

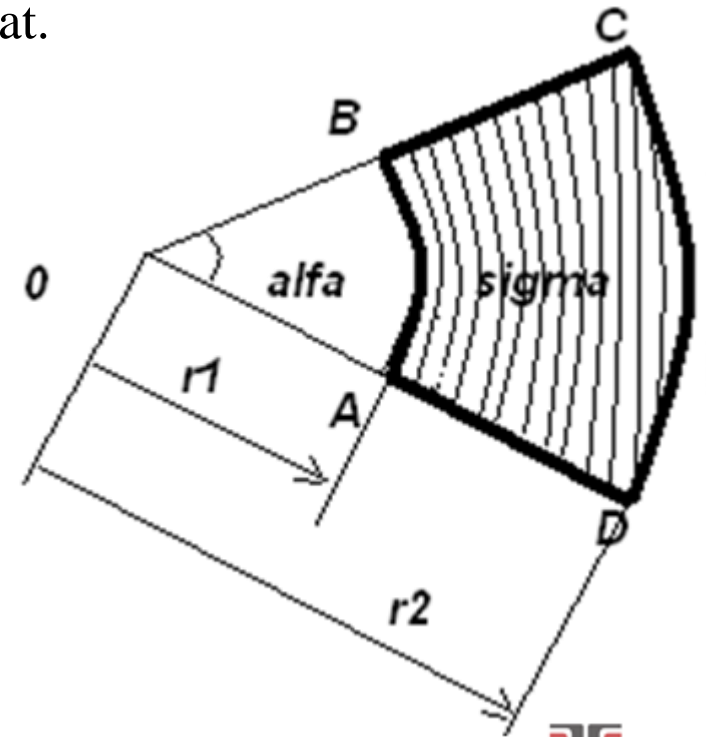
$$\alpha = 45 \cdot \text{deg} \quad \lambda = 0.65 \cdot m$$

$$r_1 = 2.5 \cdot cm \quad r_2 = 8 \cdot cm$$

$$K = 0.5 \times 10^{-4} S/m \quad \text{-- constanta de material}$$

$$N = 500 \quad \text{-- numărul de straturi} \quad i = \overline{1, N}$$

$$\sigma_i = K \cdot \frac{i}{i^2 + 1} \quad \text{-- dependența conductivității pentru fiecare strat } i$$



Între cele două fețe curbate ale blocului considerat, din construcția acestuia, pot fi echivalate un număr de N rezistențe electrice cu o rezistență totală dependentă de secțiunea variabilă și de conductivitățile celor N straturi de dielectrics. În cazul în care nu se ține cont de capacitățile care apar în bloc între straturile de material dielectric imperfect, valoarea rezistenței totale poate fi obținută din formula integrală a legii lui Ohm.

Pentru legea lui Ohm, forma integrală ca model matematic pentru rezolvarea numerică se exprimă :

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sigma_i \cdot S_i} dr$$

dr – grosimea fiecărui strat
 S_i – suprafața fiecărui strat

Pasul 1. Se definește suprafața aproximativă a fiecărui strat: $S_i := i \cdot \sin(\alpha) \cdot \lambda \cdot m$

În consecință, trebuie efectuată integrala scrisă mai sus, printr-o aproximare numerică sub formă de sumare, cu specificația că numărul de elemente din sumă reflectă numărul de straturi de dielectrics imperfecti situați între fețele arcuite ale blocului.

Pasul 2. Evaluarea sumei se operează cu formula trapezelor, iar expresia de sub integrală se notează cu o funcție numerică Y_i :

$$Y_i := \frac{l \cdot m}{\sigma_i \cdot S_i}$$

$$I_{\text{trapez}} := \frac{r_2 - r_1}{2 \cdot N \cdot m} \cdot \left(Y_1 + Y_N + 2 \cdot \sum_{j=2}^{N-1} Y_j \right) \quad \text{– formula trapezelor}$$

$$I_{\text{trapez}} = 2.394 \text{ k}\Omega \quad R := I_{\text{trapez}}$$

$$R = 2.394 \text{ k}\Omega \quad \text{– rezistența electrică totală}$$

Fiindcă nu se precizează grosimea straturilor de material din bloc, nu este posibilă calcularea rezistenței fiecărui strat și apoi înserierea lor. De aceea, posibilitatea de integrare numerică se aplică în Mathcad doar cu formule rezultat al metodelor numerice de aproximare. Nu există un operator predefinit în Mathcad, de integrare a funcțiilor date numeric.