

Curs 09

Derivarea Numerică Calculul aproximativ al Derivatelor cu Aplicații în Ingineria Electrică

As. Dr. ing. Levente CZUMBIL

Laboratorul de Cercetare în Metode Numerice

Departamentul de Electrotehnică, Inginerie Electrică

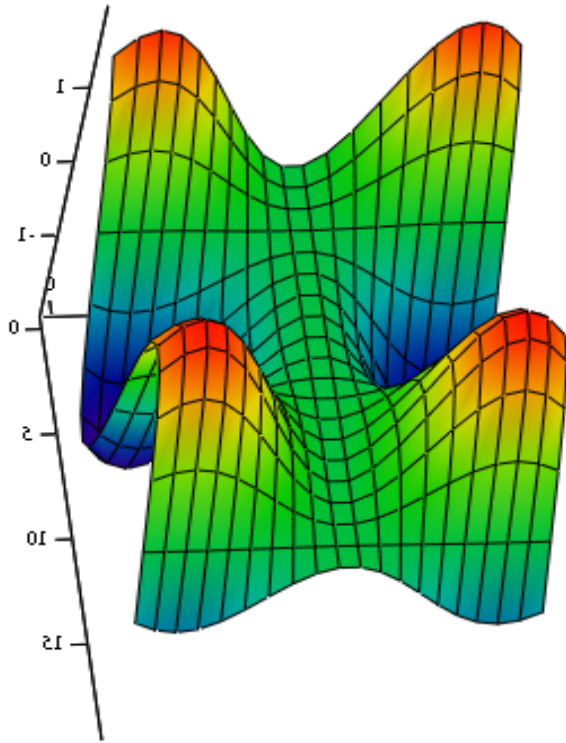
E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro Site: <http://users.utcluj.ro/~czumbil>



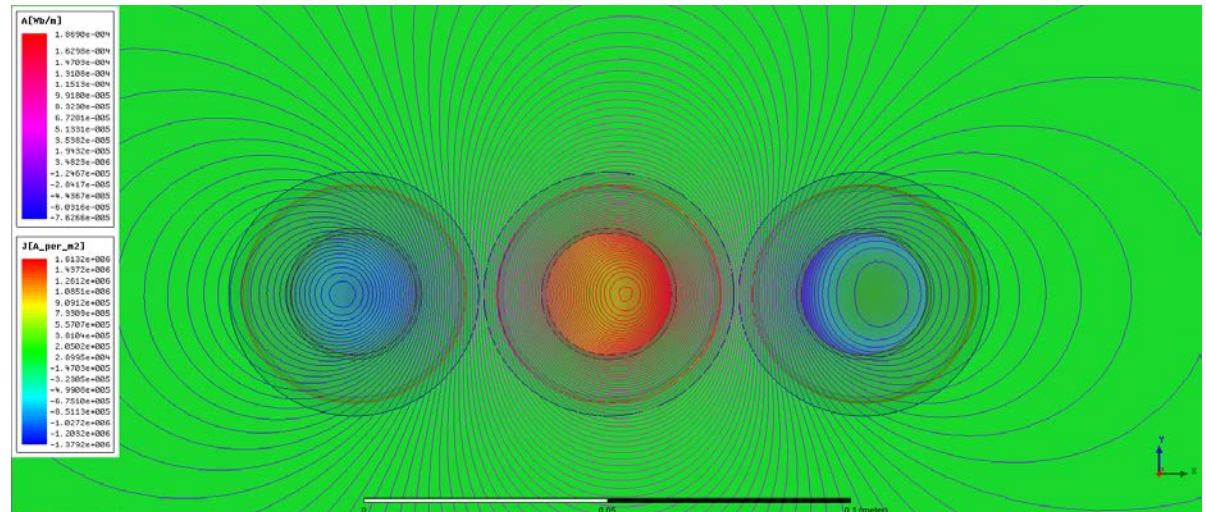
- În domeniul ingineriei electrice există situații practice când este necesară **evaluarea numerică** a valorilor **derivatelor** unor funcții pentru care **derivarea analitică este complicată** sau chiar **imposibilă**
- Trebuie ținut cont că în aplicațiile practice de obicei nu se cunoaște expresia analitică a funcției care trebuie derivată, ci doar valorile ei în anumite puncte (**determinate experimental** sau prin calcule).
- Se dorește **determinarea aproximativă a derivatei** în punctele unde se cunoaște valoarea funcției, cât și în alte puncte.



➤ Determinarea distribuției de sarcină electrică



➤ Calculul intensității câmpurilor electromagnetice



I. Derivarea Numerică bazată pe Polinoame de Interpolare

- Pentru simplitate vom considera doar derivata de ordinul I. Se pot aplica tehnici analoge și pentru derivatele de ordin superior.
- Vom rezolvă problema prin interpolare: funcția dată tabelar o determinăm prin interpolare și vom deriva polinomul de interpolare obținut!!!
- De regulă se aproximează derivatele în punctele x_0, x_1, \dots, x_n (noduri) în care valoarea funcției este cunoscută, dar se pot utiliza și pentru alte puncte din intervalul $[a, b]$!!!

x	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	\dots	y_n



I.1 Derivarea Polinoamului de Interpolare Lagrange

- Interpolarea lui $f(x)$ s-a făcut prin polinomul de interpolare Lagrange (funcția este cunoscută experimental în nodurile x_0 și x_1):

Demonstratia 1 – pe tablă

- Derivata funcției:

$$f'(x) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi)$$

- Pentru valori mici a lui h formula pentru calculul aproximativ al derivatei $f'(x)$ poate fi utilizată cu o eroare:

$$Er \leq \frac{|h|}{2} M, \quad |f''(x)| \leq M \quad x \in [a, b]$$

Această formulă este cunoscută sub numele de:

- formula diferențelor progresive $h > 0$;
- formula diferențelor regresive $h < 0$;



Exemplu Numeric

Fie funcția: $f(x) = \ln(x)$; $x_0 = 1.8$

Formula diferențelor progresive pentru aproximarea derivatei în punctul x_0 este:

$$f'(1.8) = \frac{f(1.8+h) - f(1.8)}{h}$$

cu o eroare: $Er = \frac{|h \cdot f''(\xi)|}{2} = \frac{|h|}{2\xi^2} \leq \frac{|h|}{2(1.8)^2}$, $1.8 < \xi < 1.8 + h$

h	$f(1.8+h)$	$\frac{f(1.8+h) - f(1.8)}{h}$	$\frac{ h }{2(1.8)^2}$
0.1	0.641853	0.54067	0.01543
0.01	0.593326	0.55401	0.00154
0.001	0.588342	0.55540	0.00015

Valoarea exactă a derivatei $f'(x) = \frac{1}{x}$ în punctul x_0 este $f'(1.8) = 0.555$

iar limitele erorii sunt destul de apropiate de eroarea de aproximare.

Pentru a obține **formule de derivare generale** aproximative se presupun $n+1$ noduri distincte: x_0, x_1, \dots, x_n într-un interval I și funcția:

$$f \in C^{n+1}(I)$$

conform formulei de interpolare Lagrange de ordin n se obține formula de aproximare a derivatei pentru $n+1$ puncte de evaluare

Demonstratia 2 – pe tablă

Observație: Formula de aproximare a derivatei pentru trei puncte de evaluare: $n=2$



Formulele pentru cele trei noduri devine foarte utilă dacă ele sunt echidistante!

$$x_j = x_0; x_1 = x_0 + h; x_2 = x_0 + 2h \quad f'(x_0) = \frac{1}{h} \left[-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_1) - \frac{1}{2}f(x_2) \right] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi_0)$$

$$\text{Analog pentru } x_j=x_1 \quad f'(x_1) = \frac{1}{h} \left[-\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_2) \right] - \frac{h^2}{6}f'''(\xi_1)$$

$$\text{\u0219i pentru } x_j=x_2 \quad f'(x_2) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2}f(x_0) - 2f(x_1) + \frac{3}{2}f(x_2) \right] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi_2)$$

\u0220in\u0212nd cont c\u0103 $x_1 = x_0 + h; x_2 = x_0 + 2h, h \neq 0$ formulele se pot exprima astfel:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left[-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_0 + h) - \frac{1}{2}f(x_0 + 2h) \right] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi_0)$$

$$f'(x_0 + h) = \frac{1}{h} \left[-\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_0 + 2h) \right] - \frac{h^2}{6}f'''(\xi_1)$$

$$f'(x_0 + 2h) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2}f(x_0) - 2f(x_0 + h) + \frac{3}{2}f(x_0 + 2h) \right] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi_2)$$

Pentru a obține trei formule pentru aproximarea derivatei în punctul x_0 se fac schimbările de variabile: $x_0+h=x_0$ în a doua relație respectiv $x_0+2h=x_0$ în a treia relație:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi_0)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [-f(x_0 - h) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi_1)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi_2)$$

Observând că relația trei se deduce din prima relație punând în loc de h , $(-h)$ vom avea de fapt doar două formule de aproximare a derivatei:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi_0) \quad x_0 < \xi_0 < x_0 + 2h$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi_1) \quad x_0 - h < \xi_1 < x_0 + h$$

Exemplu Numeric

Fie funcția: $f(x) = x \cdot e^x$ cu valorile determinate experimental:

Din $f'(x) = (x+1) \cdot e^x$ $f'(2.0) = 22.1671$

x	f(x)
1.8	10.8893
1.9	12.7031
2.0	14.7781
2.1	17.1489
2.2	19.8550

Aproximând derivata funcției $f'(2.0)$ cu formula în trei puncte:

$$1. \quad f'(x_0) = \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi_0)$$

Pentru $h=0.1$ $f'(2.0) = \frac{1}{2 \cdot 0.1} [-3f(2.0) + 4f(2.1) - f(2.2)] = 22.0323$

cu eroarea $1.35 \cdot 10^{-1}$

Pentru $h=-0.1$ $f'(2.0) = \frac{1}{2 \cdot (-0.1)} [-3f(2.0) + 4f(1.9) - f(1.8)] = 22.0545$

cu eroarea $1.13 \cdot 10^{-1}$

2.
$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi_1)$$

Pentru $h=0.1$ $f'(2.0) = \frac{1}{2 \cdot 0.1} [f(2.1) - f(1.9)] = 22.2287$

cu eroarea $-6.16 \cdot 10^{-2}$

Pentru $h=0.2$ $f'(2.0) = \frac{1}{2 \cdot 0.2} [f(2.2) - f(1.8)] = 22.4141$

cu eroarea $-2.47 \cdot 10^{-1}$

Concluzii

- Deși erorile în ambele formule sunt de ordinul $O(h^2)$ totuși eroarea în relația a doua este aproximativ jumătate din eroarea introdusă de prima relație. Asta pentru că relația a doua utilizează date din ambele părți a lui x_0 iar prima relație numai dintr-o parte.
- Funcția f trebuie evaluată numai în două puncte dacă se utilizează relația a doua, și dacă se utilizează prima relație funcția trebuie evaluată în trei puncte.
- Prima formulă de derivare se utilizează în apropierea capetelor intervalului pentru că informațiile referitoare la funcția f în afara intervalului nu sunt cunoscute.



I.2 Derivarea Polinoamului de Interpolare Newton

Dacă interpolarea lui $f(x)$ s-a făcut prin polinomul Newton cu diferențe divizate:

$$f(x) = N_n(x) + R_n(x) \quad f(x) \cong N_n(x)$$

$$N_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Diferențele divizate de ordinul 0 pe un nod $f[x_0] = f(x_0)$

Diferențele divizate liniare de ordinul 1 pe două noduri: $f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$

Diferențele divizate de ordinul 2 pe trei noduri: $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$

Diferențele divizate de ordinul n pe $n+1$ noduri:

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$



Proprietăți:

$$f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0] \quad f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]}{x_1 - x_0} + \frac{f[x_0]}{x_0 - x_1}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_2]}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{f[x_1]}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f[x_0]}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n \frac{f[x_i]}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_n)}$$

Polinomul construit este polinomul de gradul II de interpolare sub forma Newton cu diferențe divizate considerând nodul x_2 nod intermediar:

$$N_2(x) = \underbrace{f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1]}_{N_1(x) = f(x) - R_0(x) = f(x)} + \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_0, x_1]}_{R_1(x)}$$

$$N_n(x) = \underbrace{f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1]}_{N_1(x) = f(x) - R_0(x) = f(x)} + \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n]}_{N_2(x)}$$

$$R_n(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n) f[x, x_0, x_1, \dots, x_n]$$

Exemplu Numeric

Se cunosc valorile funcției în punctele $f(0) = -5$, $f(1) = 1$, $f(3) = 25$, $f(4) = 55$

Să se calculeze valoarea funcției în 0.5 utilizând un polinom de interpolare Newton de gradul I.

$$N_1(x) = f[x_0] + (x - x_0) \cdot f[x_0, x_1]$$

$$N_1(0.5) = -5 + (0.5 - 0) \cdot 6 = -2$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	-5	$\frac{1 - (-5)}{1 - 0} = 6$	$\frac{12 - 6}{3 - 0} = 2$	$\frac{6 - 2}{4 - 0} = 1$
1	1			
3	25	$\frac{25 - 1}{3 - 1} = 12$	$\frac{30 - 12}{4 - 1} = 6$	
4	55	$\frac{55 - 25}{4 - 3}$		

$$R_1(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot f[x, x_0, x_1]$$

$$R_1(0.5) = (0.5 - 0)(0.5 - 1) \cdot 2 = -0.5$$

Dacă derivăm succesiv și ne limităm la primii termeni avem

$$f'(x) \cong N'_n(x) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2] \cdot [2x - (x_0 + x_1)] + \\ + f[x_0, x_1, x_2, x_3] \cdot [3x^2 - 2(x_0 + x_1 + x_2)x + (x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2)] + \dots \\ f''(x) \cong N''_n(x) = f[x_0, x_1, x_2] \cdot 2 + f[x_0, x_1, x_2, x_3] \cdot [6x - 2(x_0 + x_1 + x_2)] + \dots$$

Restul în formula de interpolare Newton

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot w(x)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dN_n(x)}{dx} + \frac{dR_n(x)}{dx} \quad \frac{dR_n(x)}{dx} = \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+1)!} \cdot w(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!} \cdot w'(x)$$

$\xi_1 = \xi_1(x)$; $\xi_2 = \xi_2(x)$ puncte intermediare necunoscute $a < \xi_1, \xi_2 < b$

Derivata funcției va fi:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = N'_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+1)!} \cdot w(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!} \cdot w'(x)}_{\text{Eroarea (restul)}}$$

Dacă se face schimbarea de variabilă $x=z$ în funcție de poziția lui z printre noduri vom avea diferite forme ale erorii.

1. Dacă aproximarea funcției f se face cu un polinom de gradul I: $n=1$

$$N_1(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] \quad N'_1(x) = f[x_0, x_1]$$

Deci derivata funcției va fi: $f'(x) \cong N'_1(x) = f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$

Caz I. $\begin{cases} z = x_0 \\ h = x_1 - x_0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = h + z \Rightarrow f'(z) = \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$

$$\text{Eroarea}_I = -\frac{1}{2}f''(\xi_2) \cdot h = O(h)$$

Caz II. $\begin{cases} x_0 < z < x_1 \\ h = z - x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = z + h \\ x_0 = z - h \end{cases} \Rightarrow f'(z) = \frac{f(z+h) - f(z-h)}{2h}$

$$\text{Eroarea}_{II} = -\frac{1}{6}f'''(\xi_1) \cdot h^2 = O(h^2)$$

2. Dacă aproximarea funcției f se face cu un polinom de gradul II: $n=2$

$$N_2(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$

$$f''(x) \cong N''_2(x) = \frac{f[x_2] - 2f[x_1] + f[x_0]}{h^2}$$

Într-un punct în care se fac și măsurătorile (se cunoaște valoarea funcției) derivata de ordin II funcției în acel punct va fi:

Caz I. $\begin{cases} z = x_0 \\ h = x_1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = z + h \\ x_2 = z + 2h \end{cases} \Rightarrow f''(z) = \frac{f(z + 2h) - 2f(z + h) + f(z)}{h^2}$
Eroarea_I = $O(h^2)$

Caz II. $\begin{cases} z = x_1 \\ h = z - x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = z - h \\ x_2 = z + h \end{cases} \Rightarrow f''(z) = \frac{f(z + h) - 2f(z) + f(z - h)}{h^2}$
Eroarea_{II} = $O(h^2)$

Cu ajutorul polinoamelor de aproximare se pot calcula derivatele unei funcții definite numeric și în puncte situate între nodurile în care se cunosc valorile funcției. Precizia cea mai bună se obține însă în punctele din apropierea mijlocului intervalului.

II. Derivarea Numerică bazată pe Dezvoltarea în serie Taylor

Metoda permite aproximarea valorilor derivatelor funcției în punctele

$$x_i \in [a, b], i = \overline{1, n}$$

în care valoarea funcției f este cunoscută. Se consideră cele $n+1$ puncte echidistante,

$$x_{i+1} = x_i + h$$

adică pasul de discretizare este $h = x_{i+1} - x_i$

Pornind de la dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f(x)$ în jurul punctului x_i și neglijând termenii care urmează după cel care conține derivata de ordin II (f admite derivate cel puțin până la ordinul III)

Demonstratia 3 – pe tablă



Observații

1. Eroarea se micșorează odată cu reducerea pasului h adică a diferenței dintre abscisele a două noduri consecutive, dar totuși prin micșorarea distanței h poate duce și la reducerea diferenței

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})$$

ceea ce ar putea duce la creșterea erorii de rotunjire.

2. Dacă nodurile **nu sunt echidistante** adică: $x_{i+1} = x_i + \alpha h$, $\alpha \neq 1$

$$f'(x_i) \cong \frac{1}{(\alpha + 1)h} [f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})]$$

$$f''(x_i) \cong \frac{1}{h^2} \frac{2}{\alpha(\alpha + 1)} [\alpha f(x_{i-1}) - (1 + \alpha)f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

3. Pentru derivatele de ordin mai mare decât 2 se procedează asemănător, calculele fiind mai complicate. De exemplu pentru ordinul III se reține în dezvoltarea Taylor încă un termen și se obține:

$$f'''(x_i) \cong \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3}$$



Concluzii

- Se observă că toate relațiile conțin puncte aflate de ambele părți ale lui x_i , fiind **relații centrale**. Se pot deduce și **relații unilaterale** care utilizează puncte aflate numai de o parte sau alta a lui x_i dar sunt **mai puțin precise** decât cele centrale.
- Derivarea numerică poate genera **erori destul de mari** datorită imposibilității reducerii pasului de discretizare h sub o anumită valoare limită, determinată bineînțeles și de erorile de rotunjire.
- Dar cu toate acestea formulele de derivare numerică sunt **foarte utile pentru deducerea unor metode numerice de rezolvare** a ecuațiilor diferențiale ordinare și ecuațiilor cu derivate parțiale.
- Se pot folosi și alte procedee de aproximare: Hermite, spline, metoda celor mai mici pătrate (Master – Complemente de Matematici)

Aplicație Practică

Să se determine numeric câmpul electric pe suprafața unui cilindru, după o direcție în situația în care se cunoaște expresia analitică a fluxului electric care străbate suprafața și coordonatele cilindrice care o definesc.

Date numerice:

❖ raza cilindrului

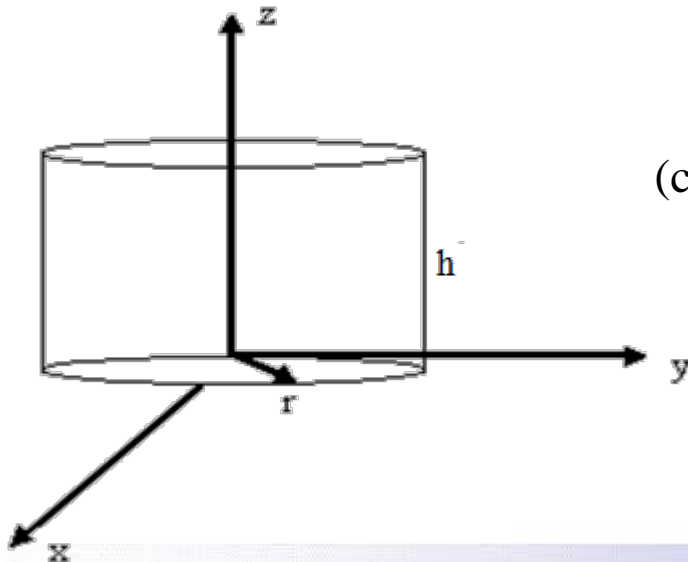
$$r := 5 \quad \text{cm} \quad \theta := 2\pi$$

❖ înălțimea cilindrului

$$h := 6 \quad \text{cm}$$

❖ câmpul scalar flux electric

$$\Psi(x, y, z) := 10^{12} \cdot (x^2 \cdot z - 3x) \cdot y \cdot 3^z \quad \text{Wb}$$



(coordonatele cilindrice cunoscute: r , θ , $z=h$)

Având dată o formă analitică pentru fluxul electric, se poate determina câmpul electric care produce acel flux prin derivare numerică după direcția z , când valorile x și y ale suprafeței și, implicit, ale câmpului de flux sunt impuse de raza cilindrului, r , și unghiul θ din coordonatele cilindrice.

Ψ_{el} -- fluxul electric E_V -- câmpul electric (câmp vectorial)

$dS = r \cdot \theta \cdot dz$ -- elementul de suprafață scris în coordonate cilindrice

Formula matematică care sta la baza rezolvării problemei se exprimă prin teorema lui Gauss:

$$\Psi_{el} = \int E_V dS \quad (\text{se aplică operatorul de derivare})$$

$$E_V = \frac{d}{dS} \Psi_{el} \quad (\text{care devine}) \quad E_V = \frac{1}{r \cdot \theta} \cdot \frac{d}{dz} \Psi_{el}$$

↓ dependența variabilelor x și y de coordonatele cilindrice ↓

$$x = r \cdot \cos(\theta) \quad y = r \cdot \sin(\theta)$$



Pentru rezolvarea problemei se alege o metodă numerică de derivare utilizând dezvoltarea în serie Taylor. Aceasta metodă aproximează valorile derivatelor funcției într-un șir de puncte în care valoarea funcției este cunoscută.

- Șirul de puncte în care se evaluează derivata se definește în felul următor:

$$N := 50 \quad (\text{numărul de elemente din șir}) \quad i := 0..N - 1 \quad (\text{numărul de iterații})$$

$$a := 0 \quad b := 6 \quad (\text{limitele intervalului din care face parte șirul})$$

$$h := \frac{b-a}{N} \quad h = 0.12 \quad (\text{pasul șirului, distanța dintre două valori consecutive})$$

$$z_0 := a \quad z_N := b \quad (\text{valorile inițiale și finale ale șirului})$$

$$z_{i+1} := z_i + h \quad (\text{relația generală între elementele șirului})$$

Observație: Derivarea numerică prin metoda abordată poate conduce la erori semnificative, în anumite condiții, datorită imposibilității reducerii pasului h sub o anumită valoare limită.

- Funcția matematică de derivat, după modelul completat este următoarea:

$$f(z) := \frac{\Psi(x, y, z)}{r \cdot \theta}$$

iar derivarea numerică are loc în cadrul formulei deduse din seria Taylor:

$$f'(z) := \frac{f(z_{i+1}) - f(z_{i-1}))}{2 \cdot h}$$

- Versorul direcției câmpului electric după axa z : $r_z := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Expresia câmpului electric scrisă vectorial după direcția z :

$$E_z(z, i) := f'(z, i) \cdot r_z$$

- Punctele șirului considerat în care se dorește aflarea câmpului electric (derivata numerică):

$$z_i = (z, i) \quad (\text{echivalentă}) \quad z_{18} = 2.16 \text{ mm}$$

$$E_z(z, 18) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.0034223 \end{pmatrix} \frac{V}{m} \quad (\text{valoarea câmpului electric})$$

Observație: Metoda numerică expusă, pentru problema de față se dovedește eficace la un număr restrâns de argumente ale funcției, adică pentru o valoare limitată de coordonate z pentru care se dorește cunoașterea mărimii câmpului electric.

În continuare, se va apela operatorul predefinit de derivare din utilitarul Mathcad. După aplicarea acestuia funcției, la valorile câmpului electric se ajunge prin înlocuirea coordonatei z cu punctele de interes.

$$z := 2.16 \text{ mm} \quad f'(z) := \frac{d}{dz} f(z) \quad f'(z) := -0.028$$

- Valoare câmpului electric calculată în acest fel: $E_z(z) := f'(z) \cdot r_z$

$$E_z(z) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.002838 \end{pmatrix} \frac{V}{m}$$

Raportarea celor două valori obținute, prin metoda numerică, respectiv prin funcția definită în toolbox-ul Mathcad, evidențiază acuratețea metodei numerice.

Problema, prin referirea metodei numerice, face posibilă exprimarea valorilor câmpului electric la suprafața de separație a două medii, după direcția tangențială.

Prin alegerea corespunzătoare a valorilor r , și z se poate acoperi întreg domeniul suprafeței cilindrului, ceea ce înseamnă determinarea valorilor câmpului electric pe toată suprafața considerată.

Reprezentarea Grafică a Gradientului

Se introduce funcția $f(x,y)$: $f(x, y) := 2 \cdot [\sin(x)]^2 \cdot \cos(y - 2)$

Se introduc valorile de capăt (punctele finale) pentru x și y :

$$x_{\min} := -2 \quad x_{\max} := 2 \quad y_{\min} := -4 \quad y_{\max} := 4$$

Se introduc numărul valorilor lui x și y în șir: $N_x := 20 \quad N_y := 20$

$$i := 0..N_x - 1 \quad j := 0..N_y - 1$$

$$xind_i := x_{\min} + i \cdot \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N_x - 1} \quad yind_j := y_{\min} + j \cdot \frac{y_{\max} - y_{\min}}{N_y - 1}$$

Gradientul funcției va fi:

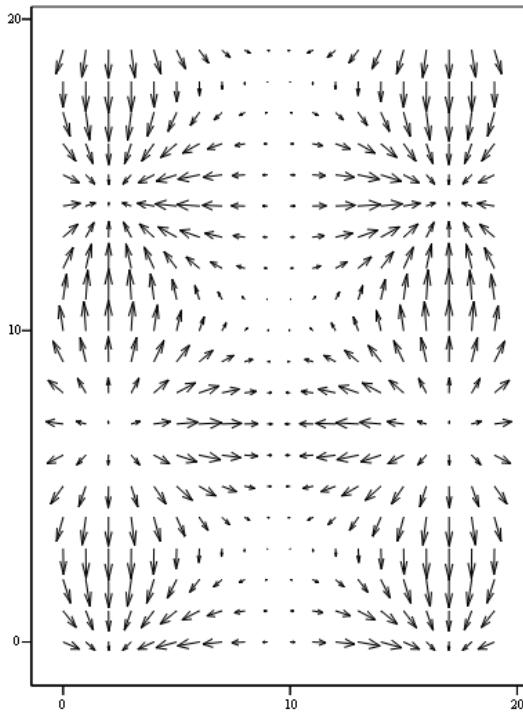
$$grad(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f(x, y) \\ \frac{d}{dy} f(x, y) \end{pmatrix}$$



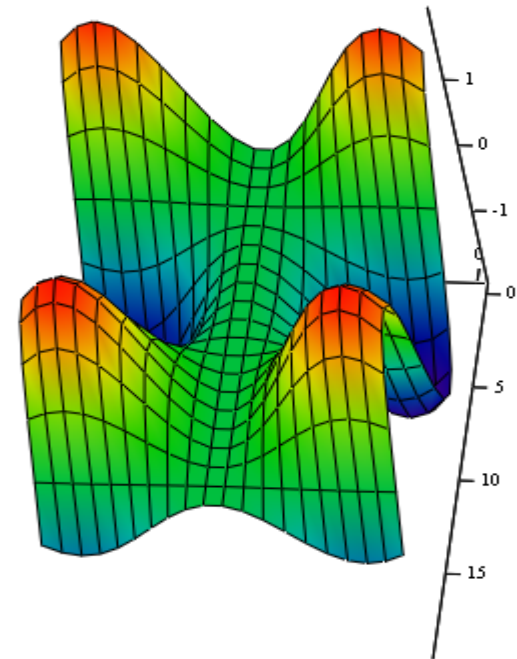
Se stochează într-o matrice valorile gradientului în punctele de calcul ale funcției:

$$V_{i,j} := \text{grad}(xind_i, yind_j) \quad M_{i,j} := (V_{i,j})_0 \quad N_{i,j} := (V_{i,j})_1$$

$$F_{i,j} := f(xind_i, yind_j)$$



(M,N)
(câmpul vectorial)



F (reprezentarea grafică pe suprafață)

Evaluarea Numerică a Derivatelor unei Funcții într-un Punct

Introducem funcția pe care dorim să o derivăm:

$$f(x) := x^3 \cdot \ln(x) + 3 \cdot x^2 + [\cos(x)]^2$$

Evaluarea simbolică a derivatei din paleta **Evaluation**:

$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 6 \cdot x + 3 \cdot x^2 \cdot \ln(x) + 2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$$

$$n := 3 \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x) \rightarrow 6 \cdot \ln(x) + 8 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) + 11$$

Punctul în care calculăm derivata: $x := 4$

$$\frac{d}{dx} f(x) = 105.553$$

(prima derivată)

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = 23.275$$

(derivata de ordin n)





2K