Curs 10 - 11

Metode Numerice de Rezolvare a Ecuațiilor Diferențiale

Aplicații în Ingineria Electrică

As. Dr. ing. **Levente CZUMBIL**

Laboratorul de Cercetare în Metode Numerice

Departamentul de Electrotehnică, Inginerie Electrică

E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Introducere

Comportarea dinamică a sistemelor fizice conduce la **modele matematice formate din ecuaţii diferenţiale ordinare sau sisteme de ecuaţii diferenţiale** care nu pot fi rezolvate pe cale analitică (funcţii complicate ca formă sau funcţii cunoscute doar pe baza unor valori în puncte date tabelar şi obţinute pe cale experimentală). Din acest motiv se recurge la **rezolvarea numerică** a acestora.

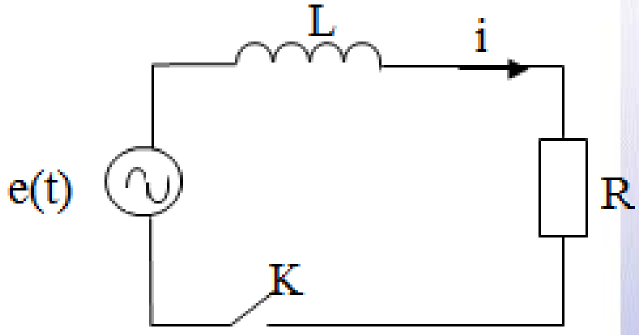
Metodele numerice de aproximare a soluţiilor conduc la tabele de valori ale funcţiei necunoscute. Valorile tabelate se calculează utilizând o valoare deja calculată cu un pas înainte (***metode unipas***) sau câteva valori calculate deja (***metode multipas***).

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Aplicaţii

❖**Circuit R-L serie în regim tranzitoriu**. Se consideră un circuit format dintr-un rezistor de rezistenţă *R* şi o bobină de inductivitate *L*, alimentate în serie la o tensiune electromotoare $e(t) = E \cdot cos(\omega \cdot t)$

Se studiază variaţia curentului în circuit la închiderea întreruptorului K.



Circuitul R-L Serie

Se scriu teoremele lui Kirchhoff şi rezultă o ecuaţie diferenţială de ordinul I:

$$e(t) = e_R(t) + e_L(t) = R \cdot i(t) + \omega L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = E \cdot \cos(\omega t)$$

Aplicaţii

❖ Ecuaţia liniilor de câmp create de o sarcină în mişcare în planul *xoy* sub acțiunea unui câmp de forțe, este o ecuație diferențială totală exactă;

❖ Mişcarea unui electron supus unui câmp electric $\bar{E}$ și a unui câmp magnetic $\bar{H}$ satisface ecuația diferențială vectorială:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{|e|}{m} \cdot \left(\vec{E} + \mu_0 \cdot \vec{v} \cdot \Delta\vec{H}\right)$$

❖ Rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale asociate unui circuit electric de ordin I sau II excitat cu un impuls – regim tranzitoriu;

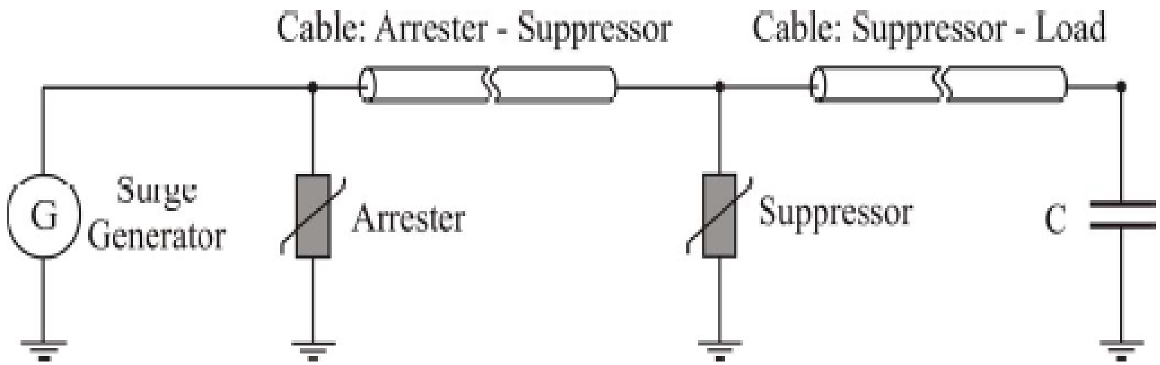
❖ Condensator de capacitate *C* care se încarcă de la o sursă de tensiune continuă *E*, printr-un rezistor de rezistenţă *R*.

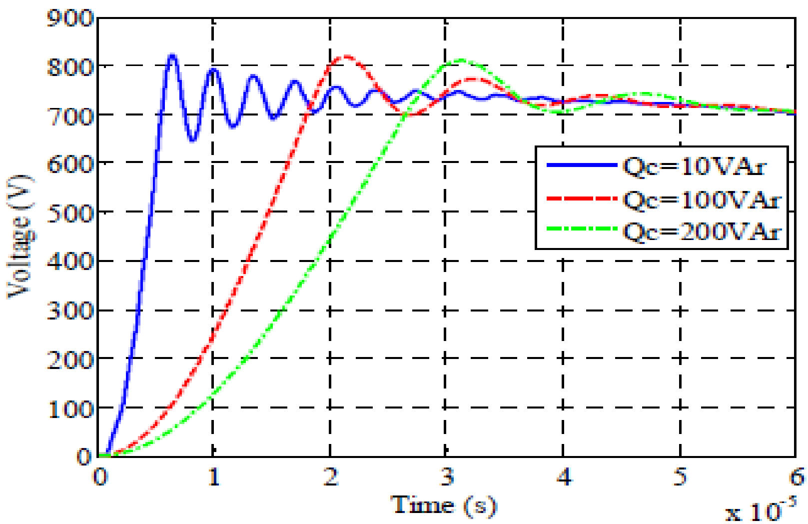
❖ Descărcare unui condensator de capacitate *C*, încărcat iniţial la tensiunea *E*, pe un rezistor de rezistenţă *R*.

Aplicaţii

❖ **Analiza comportării descarcătoarelor de supratensiuni**, datorate comutării liniilor electrice cu sarcină capacitivă, presupune modelarea liniei ca şi circuit, ţinând cont de prezenţa sursei de energie, de amplasarea descărcătoarelor (surge-arresters) şi de natura sarcinii electrice (capacitivă):

Modelul de cricuit electric





Soluţionarea numerică a ecuaţiei diferenţiale corespunzătoare circuitului, cu variabilă necunoscută – tensiunea la bornele descărcătorului, indică variaţiile care apar pentru diferite sarcini capacitive:

Generalităţi

Modelul matematic cel mai des întâlnit al fenomenelor care stau la baza majorităţii aplicaţiilor electrotehnice este **ecuaţia diferenţială**. Rezolvarea exactă a ecuaţiilor diferenţiale ordinare este posibilă pentru o **clasă foarte restrânsă de aplicații**!!!

O ecuaţie diferenţială este o ecuaţie care conţine pe lângă variabilele independente şi funcţiile necunoscute şi derivatele acestor funcţii (sau diferenţialele lor) până la ordinul n inclusiv (numărul n reprezintă ordinul ecuaţiei diferenţiale).

O **ecuaţie diferenţială se numeşte ordinară** dacă conţine o singură variabilă independentă şi are forma generală:

$$f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale conţin mai multe variabile independente şi derivatele parţiale ale funcţiilor necunoscute.

$$y\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = 0$$

Rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale de ordin ***n*** implică impunerea a ***n*** condiţii iniţiale. Există următoarele situaţii:

- Dacă toate cele ***n*** condiţii (valori) sunt date pentru aceeaşi valoare a variabilei independente, integrarea se face cu condiţii iniţiale impuse la început în problemă (problema Cauchy).

- Atunci când intervin diverse valori ale variabilei independente, rezolvarea se face cu condiţii la limită

I. Metoda dezvoltării în serie Taylor

Fie *f : I x R→R* o funcție continuă dată, care descrie ecuația diferențială de oridinul I care urmează a fi rezolvată, unde *I* este un interval real, iar y_0 este valoarea iniţială a funcției care statisface acestă ecuație diferențială – provenită din condiția inițială a problemei.

Se propune determinaea funcţiei *y : I→R* care satisface problema cu valori (condiţii) iniţiale (problemă Cauchy), adică evaluarea funcţiei *y(x)* în nodurile $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ aparținând intervalului de definiţie *I*.

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x_0 \in I$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \; [a,b] \subset I$$

Demonstratia 1 – pe tablă

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} \cdot f^{'}(x_i, y_i) + \ldots + \frac{h^n}{n!} \cdot f^{(n-1)}(x_i, y_i) + R_n(x_i)$$

$$R_n(x_i) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n)}(\xi, y(\xi)), \quad x_i < \xi < x_{i+1}$$

Aproximaţia este cu atât mai bună cu cât numărul de termeni luaţi în considerare în dezvoltarea Taylor este mai mare. Metoda este directă întrucât pentru calculul lui y_{i+1} sunt necesare informaţii numai despre punctul anterior (x_i, y_i).

Dacă se consideră doar primii trei termeni din descompunerea în serie Taylor $n = 2$ ($R_n(x)=0$) atunci se obține următoarea formulă aproximativă de calcul:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \left[f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} \cdot \left[f_x(x_i, y_i) + f(x_i, y_i) \cdot f_y(x_i, y_i) \right] \right]$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

II.1 Metoda lui Euler (forma clasică)

Este cea mai simplă metodă de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale ordinare. Se obţine din metoda Taylor pentru *n=1*, adică se reţin numai primii doi termeni din dezvoltare rezultând forma explicită a **metodei lui Euler**:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)} \qquad i = 0, 1, \ldots \qquad \varepsilon \le \frac{h^2}{2!} y''(\xi), \quad x_i < \xi < x_{i+1}$$

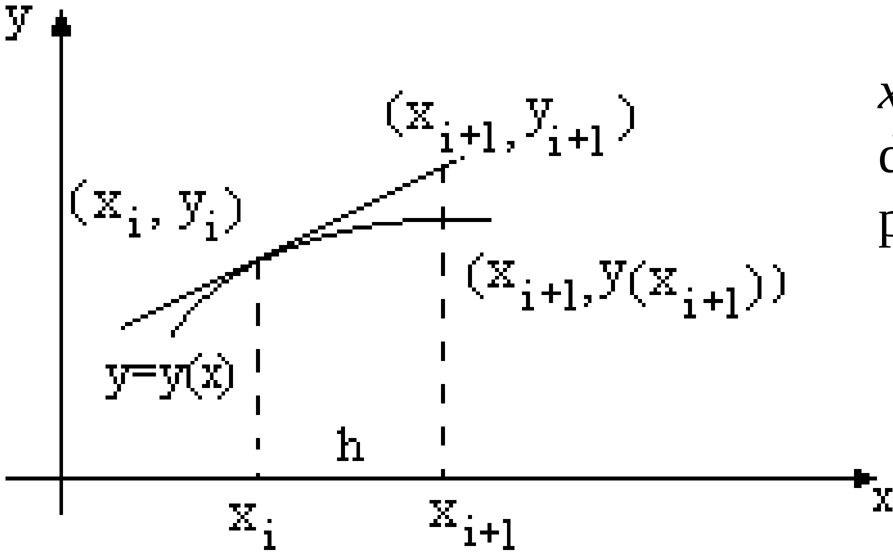
Interpretare geometrică: se alege un pas de integrare *h* astfel încât intervalul de definiţie [x_0, b] să fie împărţit în paşi egali:

$$h = \frac{b - x_0}{N}$$

Astfel avem aceeaşi problemă de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale cu condiţii iniţiale:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

și curba soluției: $y = y(x)$



Prin metoda lui Euler soluţia în nodul x_{i+1} se aproximează cu ordonata punctului de intersecţie a tangentei la curbă în punctul (x_i, y_i) cu dreapta $x=x_{i+1}$.

Ecuaţia tangentei:

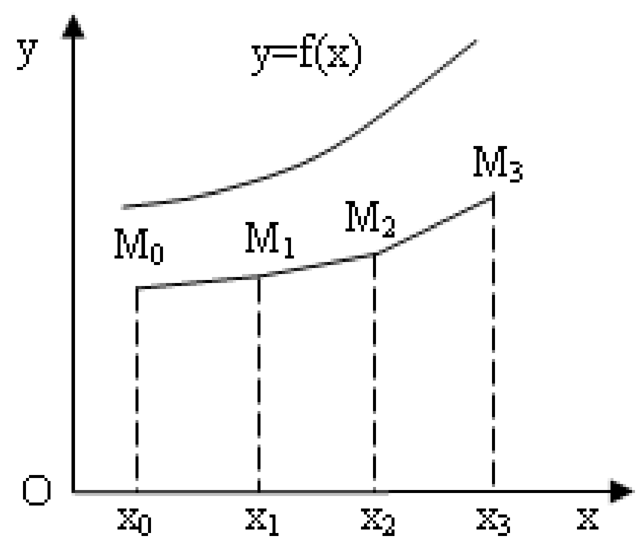
$$y = y_i + (x - x_i) \cdot y'(x)$$

$$y'(x) = f(x_i, y_i)$$

rezultă formula de recurenţă a algoritmului Euler: $$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Astfel metoda lui Euler se numeşte şi **metoda liniilor poligonale** pentru că curba *y=y(x)* se înlocuieşte prin linia poligonală M_0, M_1,… conform figurii alăturate.

Dreapta care trece prin M_0 cu coeficientul unghiular $f(x_0,y_0)$ - conform ipotezei prin care ecuaţia diferenţială care formează problema Cauchy dă în orice punct (x,y) **panta curbei**!!!



II.2 Metoda lui Euler (forme îmbunătățite)

Observaţie: În aplicaţiile electrotehnice utilizarea metodei lui Euler duce la unele dificultăţi din punct de vedere a preciziei metodei.

De aceea se folosesc variante ale metodei lui Euler cu precizie mai mare care folosesc relaţii de recurenţă de forma:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \Phi(x_i, y_i, h)$$

❖ **Metoda lui Euler îmbunătățită (formula Euler-Huen)**

$$\Phi(x_i, y_i, h) = \frac{1}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h \cdot y'_i)\right]$$

unde în dezvoltarea în serie Taylor se reţin primii trei termeni: $y'_i = f(x_i, y_i)$

❖ Metoda lui Euler modificată (formula Euler-Cauchy)

$$\Phi(x_{i-1}, y_{i-1}, h) = f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{h}{2} \cdot y'_{i-1}\right) \qquad y'_i = f(x_i, y_i)$$

În această metodă *y′* nu se mai aproximează pe intervalul [x_i, x_{i-1}] cu valoarea de la începutul intervalului ci cu o aproximație a valorii de la mijlocul acestui interval.

❖ Metoda lui Euler modificată „predictor – corector”

Rezultă din reuniunea versiunii metodei lui Euler clasică (relaţia predictor) şi a versiunii modificate (relaţia corector).

Cu metoda lui Euler clasică se calculează o primă aproximaţie (valoarea prezisă a soluţiei în punctul următor) adică se iniţializează valoarea lui y_i cu o relaţie:

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

După aceea la un pas k (k = $1,2,3,\ldots$) al procesului iterativ de calcul noua valoare a lui y_i rezultă prin aplicarea unei relaţii de recurență de forma:

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i^{(k)} + h \cdot \frac{f\left(x_i, y_i^{(k)}\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}\right)}{2}$$

Calculul se consideră terminat când y_i a fost determinat cu o precizie impusă aprioric, cu alte cuvinte iteraţiile se repetă până când diferența dintre două aproximaţii succesive $y_i^{(k)}$ şi $y_i^{(k-1)}$ este mai mică decât o eroare stabilită dinainte, primind atunci ultima valoare calculată.

$$\left| y_i^{(k)} - y_i^{(k-1)} \right| < \varepsilon$$ – eroarea maximă admisibilă impusă

Observaţie: La aceeaşi valoare a pasului de integrare h aceste metode modificate, îmbunătăţite a metodei lui Euler asigură o precizie mai bună şi o soluţionare mai rapidă a ecuaţiilor diferenţiale.

Exemplu Pratic

Fie ecuaţia diferenţială de ordinul I: $y'(x)+3y(x)-\cos\left(x-\frac{\pi}{9}\right)=5-x$ cu condiţia iniţială Cauchy *y(7)=6*, unde *x* ia valori pe intervalul [7,15]. Să se determine valorile funcţiei *y(x)* folosindu-se metoda lui Euler îmbunătăţită (Euler-Heun), respectiv varianta modificată (versiunea Cauchy).

Pasul 1. Se scrie ecuaţia diferenţială ce urmează a fi rezolvată:

$$y'(x) + 3\,y(x) - \cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right) = 5 - x$$

Pasul 2. Se extrage derivate funcţiei necunoscute:

$$y'(x) = 5 - x - 3\,y(x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right)$$

Pasul 3. Se defineşte funcţia asociată ecuaţiei diferenţiale:

$$f(x,y) := 5 - x - 3y + \cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Pasul 4. Definirea funcţiei caracteristice metodei îmbunătăţite Euler-Huen:

$$\Phi_{EH}(x,y,h) := \frac{1}{2}\cdot(f(x,y) + f(x+h, y + h\cdot f(x,y)))$$

Pasul 5. Definirea funcţiei caracteristice metodei îmbunătăţite Euler-Huen:

$$\Phi_{EC}(x,y,h) := f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}\cdot f(x,y)\right)$$

Pasul 6. Se definesc capetele intervalului, numărul de puncte de calcul şi se determină pasul de parcurgere al intervalului de definiţie:

$$a := 7 \qquad b := 15 \qquad N := 100 \qquad h := \frac{b-a}{N} \qquad h = 0.08$$

Pasul 7. Se determină şirul de puncte intermediare *x_i* în care se evaluează valoarea funcţiei necunoscute:

$$i := 0..N \qquad x_i := a + h\cdot i$$

Pasul 8. Se impune condiţia iniţială Cauchy *y(7)=5*:

$$y_{EH_0} := 5 \qquad y_{EC_0} := 5$$

Pasul 9. Se evaluează valorile funcţiei necunoscute conform metodei lui Euler îmbunătăţite (Euler-Heun) :

$$y_{EH_{i+1}} := y_{EH_i} + h \cdot \Phi_{EH}\left(x_i, y_{EH_i}, h\right)$$

Pasul 10. Se evaluează valorile funcţiei necunoscute conform metodei lui Euler modificată (versiunea Cauchy) :

$$y_{EC_{i+1}} := y_{EC_i} + h \cdot \Phi_{EC}\left(x_i, y_{EC_i}, h\right)$$

Pasul 11. Se vizualizează valorile funcţiei necunoscute determinate în punctele x_i:

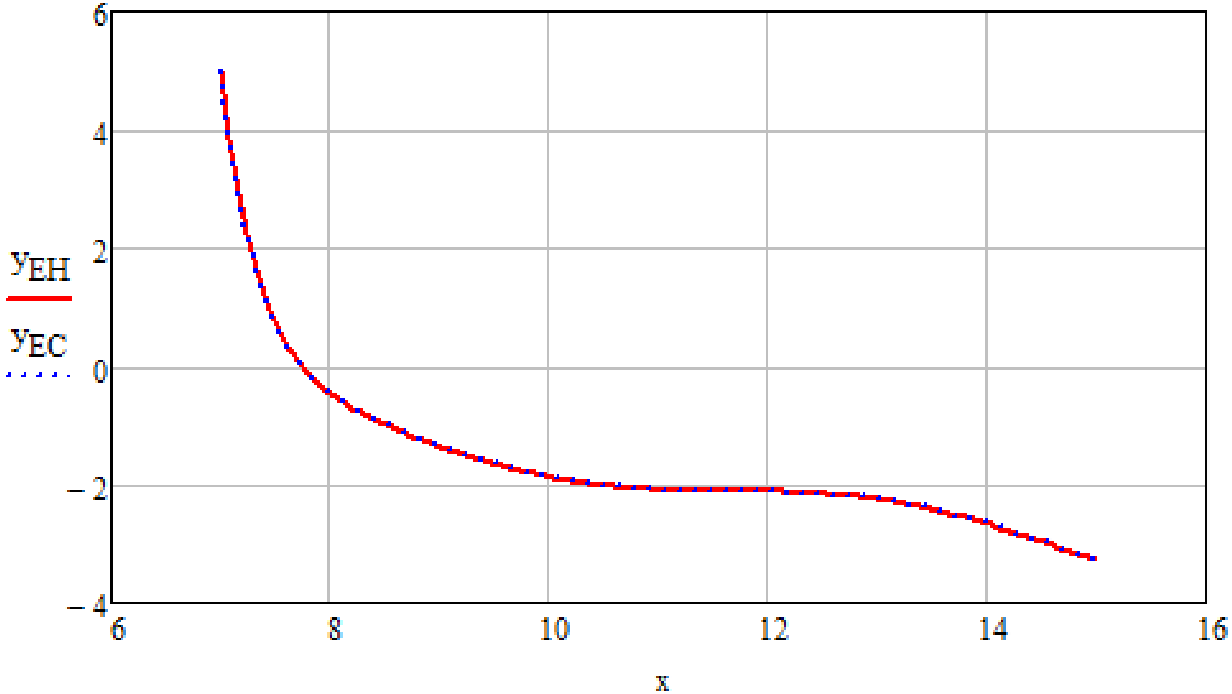
$y_{EH}^T =$

	0	1	2	3	4	5	6
0	5	3.864	2.961	2.239	1.661	1.196	...

$y_{EC}^T =$

	0	1	2	3	4	5	6
0	5	3.864	2.961	2.239	1.661	1.196	...

Pasul 12. Se reprezintă grafic alura funcţiei determinate cu cele două metode:



Pasul 13. Se evaluează abaterea procentuală dintre cele două metode:

$$Err := \frac{1}{N}\cdot\left(\sum_i \frac{\left|y_{EH_i} - y_{EC_i}\right|}{\left|y_{EH_i}\right|}\right) \qquad Err = 0.015\,\%$$

III Metode de tip Runge - Kutta

Metodele lui Euler implică necesitatea evaluării derivatelor de ordin superior ale funcţiei *y(x)* respectiv ale funcţiei *f(x,y)* care duc la **dificultăţi în aproximarea numerică a derivatelor de ordin superior**.

În schimb **metodele de tip Runge – Kutta** evită în totalitate utilizarea derivatelor de ordin superior ele folosind numai derivatele de ordin I ale funcţiei *y(x)*, adică valorile funcţiei *f(x,y)*.

Se calculează valorile funcţiei *f(x,y)* într-un număr de puncte intermediare ale intervalului $[x_i,x_{i+1}]$ pentru determinarea lui y_i cu o eroare minimă.

Cu alte cuvinte metodele Runge – Kutta de integrare numerică a unei ecuaţii diferenţiale, înlocuiesc calculul derivatelor funcţiei *f(x,y)* prin evaluări ale sale în diverse puncte.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Fie ecuaţia diferenţială ordinară cu condiţii iniţiale de forma: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \qquad x_i = a + h \cdot i,\ i = \overline{1, N} \qquad h = \frac{b-a}{N}$$

o diviziune echidistantă a intervalului [a, b]!!!

Din raţiuni de simplificare a calculelor considerăm combinaţii liniare de valori ale funcţiei în anumite puncte ale intervalului $[x_i, x_{i+1}]$, soluţia calculându-se cu o relaţie unipas de forma:

$$y_{i+1} = y_i + a_0 \cdot k_0 + a_1 \cdot k_1 + \ldots + a_n \cdot k_n$$

unde, din condiţia ca dezvoltarea în serie Taylor a membrului drept (în funcţie de *h*) să coincidă cu membrul drept al formulei lui Taylor de ordinul *n+1*, avem şi formula dedusa şi toţi coeficienţii după particularizări:

Demonstratia 2 **– pe tablă**

Particularizând parametrul *n* se determină diverse formule:

- **Runge – Kutta de orinul I (n=0):** y_0 – dat

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)}$$ -- fomula lui Euler clasică

- **Runge – Kutta de orinul II (n=1):** y_0 – dat

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_0 + k_1)}$$

$$k_0 = h \cdot f(x_i, y_i) \qquad k_1 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_0)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h \cdot f(x_i, y_i))\right]$$

fomula modificată a lui Euler (Euler-Huen)

❖ **Runge – Kutta de orinul III (n=2):** $y_0 - \text{dat}$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_0 + 4k_1 + k_2\right)$$

$$k_0 = h \cdot f\left(x_i, y_i\right) \quad k_1 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right) \quad k_2 = h \cdot f\left(x_i + h, y_i + 2k_1 - k_0\right)$$

❖ **Runge – Kutta de orinul IV (n=3):** $y_0 - \text{dat}$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3\right)$$

$$k_0 = h \cdot f\left(x_i, y_i\right) \quad k_1 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right) \quad k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_i + h, y_i + k_2\right)$$

Aceste formule sunt foarte utilizate în aplicaţiile din domeniul electrotehnic - complicate şi pretenţioase din punct de vedere a preciziei!!!

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Adams ***Adams – Bashforth*** ***Adams – Moulton***

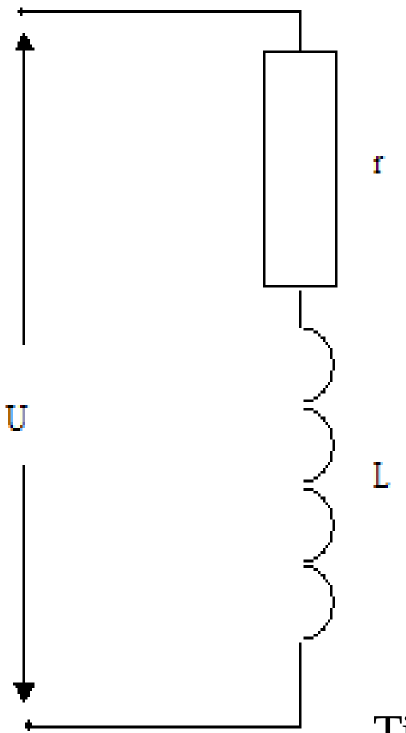
Predictor – corector Milne ***Predictor - corector Hamming***

Soluţia în punctul x_i se determină prin aceste metode multipas folosindu-se valorile calculate ale funcţiei în mai mulţi paşi anteriori. Dacă la metodele unipas funcţia necesită evaluări pentru un număr mare de valori ale variabilei independente la metodele multipas (metode cu paşi legaţi) nu este necesar calculul valorilor funcţiei $f(x,y)$ în puncte intermediare suplimentare faţă de cele corespunzătoare pasului de discretizare (integrare) h. Pentru aceste metode este preferabil ca punctele luate în considerare pentru calculul soluţiilor sa fie echidistante.

Fiind date valorile (x_0,y_0), (x_1,y_1),..., (x_i,y_i), metodele multipas folosesc aceste informaţii pentru calculul lui y_{i+1}. Dezavantajul acestor metode este pornirea mai dificilă. Ele nu se autopornesc, adică la primul pas nu sunt disponibile (nu se cunosc) informaţiile din punctele anterioare necesare (adică primele valori ale soluţiei trebuie să fie calculate prin alte metode)!!!

Aplicația 01

Să se studieze conectarea unui circuit alcătuit dintr-o rezistență r și o inductanță L la o sursă de tensiune continuă U și scurtcircuitarea circuitului.



a) Conectarea circuitului la sursa continuă

Teorema a doua a lui Kirchhoff devine: $$U = r \cdot i(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i(t)$$

Curentul este format din două componente una staționară și una tranzitorie:

$$i(t) = i_{st}(t) + i_{tr}(t)$$

$$L \cdot \frac{d}{dt} i(t) = U - r \cdot i(t) \Rightarrow \frac{di}{U - r \cdot i} = \frac{dt}{L} \Rightarrow U - r \cdot i = A \cdot e^{-\frac{r}{L} \cdot t}$$

Tinând cont de condițiile inițiale rezultă: $t = 0 \quad i = 0 \quad U = A$

$$i = I \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \qquad \tau = \frac{L}{r}$$

Componenta staționară a curentului este: $i_{st}(t) = \frac{U}{r}$

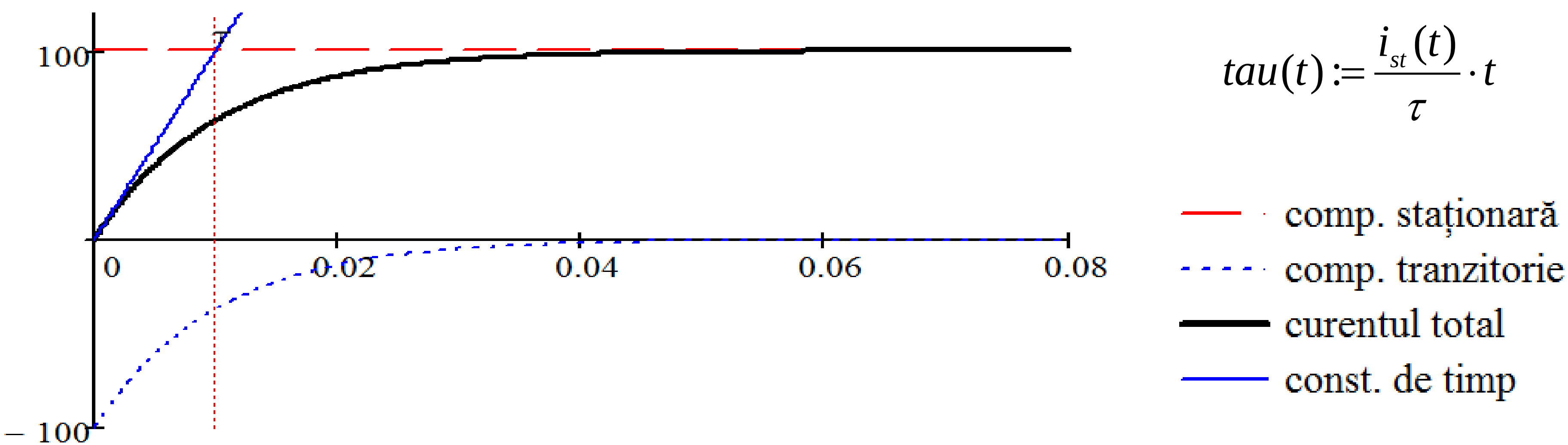
Componenta tranzitorie a curentului este: $i_{tr}(t) = -\frac{U}{r} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

Se implementeză în Mathcad rezolvarea problemei considerându-se valorile numerice:

$L := 0.001$ H $\qquad r := 0.1$ Ω $\qquad U := 10$ V

$\tau := \frac{L}{r}$ $\qquad \tau = 0.01$ s $\qquad i_{st}(t) := \frac{U}{r}$ $\qquad i_{tr}(t) := -\frac{U}{r} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\qquad i(t) := i_{st}(t) + i_{tr}(t)$

$tau(t) := \frac{i_{st}(t)}{\tau} \cdot t$

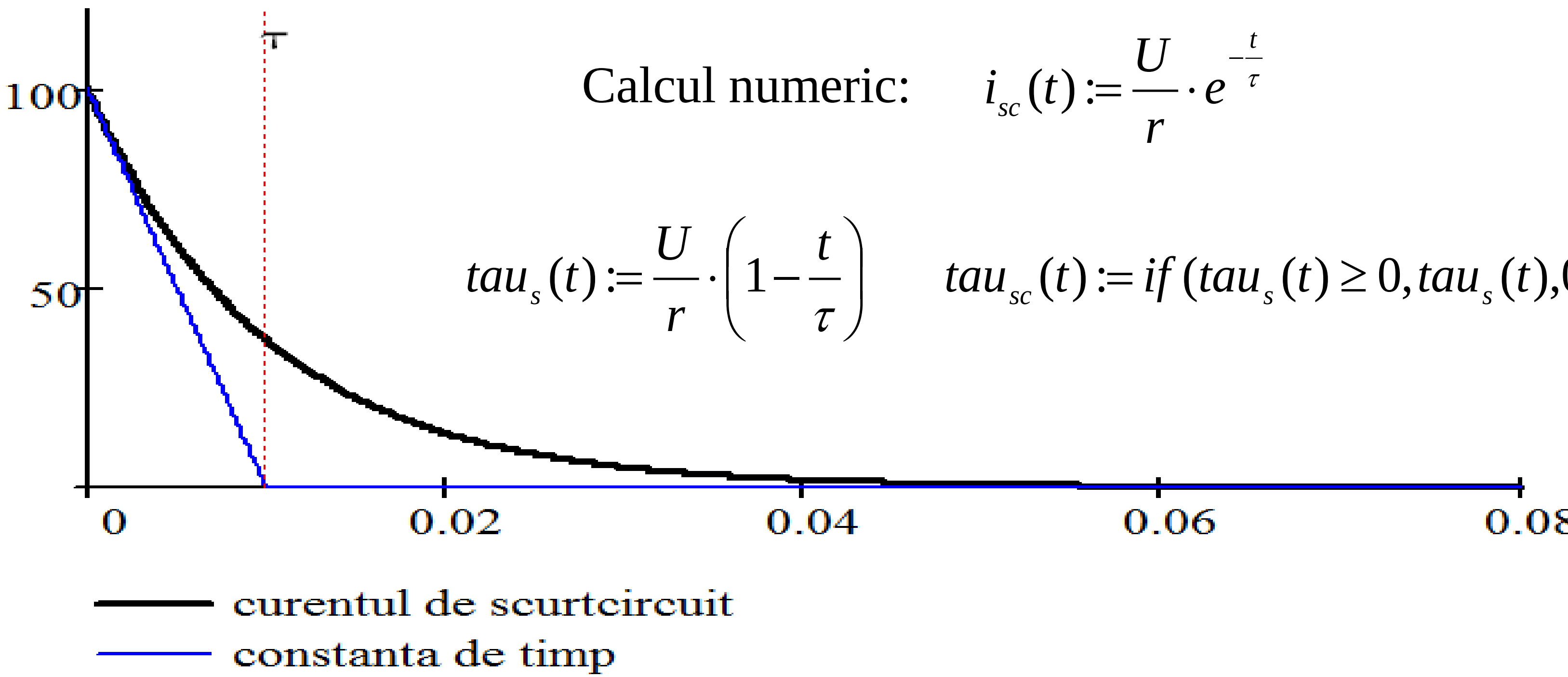


b) Scurtcircuitarea circuitului

Dacă scurtcircuităm circuitul (r, L) tensiunea U la borne devine egal cu zero, curentul permanent devine egal cu zero:

$$i_{st}(t) = 0 \qquad i(t) = i_{st}(t) + i_{tr}(t) = i_{tr}(t) = A \cdot e^{-\frac{r}{L} \cdot t}$$

Ținând cont de condițiile inițiale rezultă: $t = 0 \quad i = I = \dfrac{U}{r} \quad A = I$

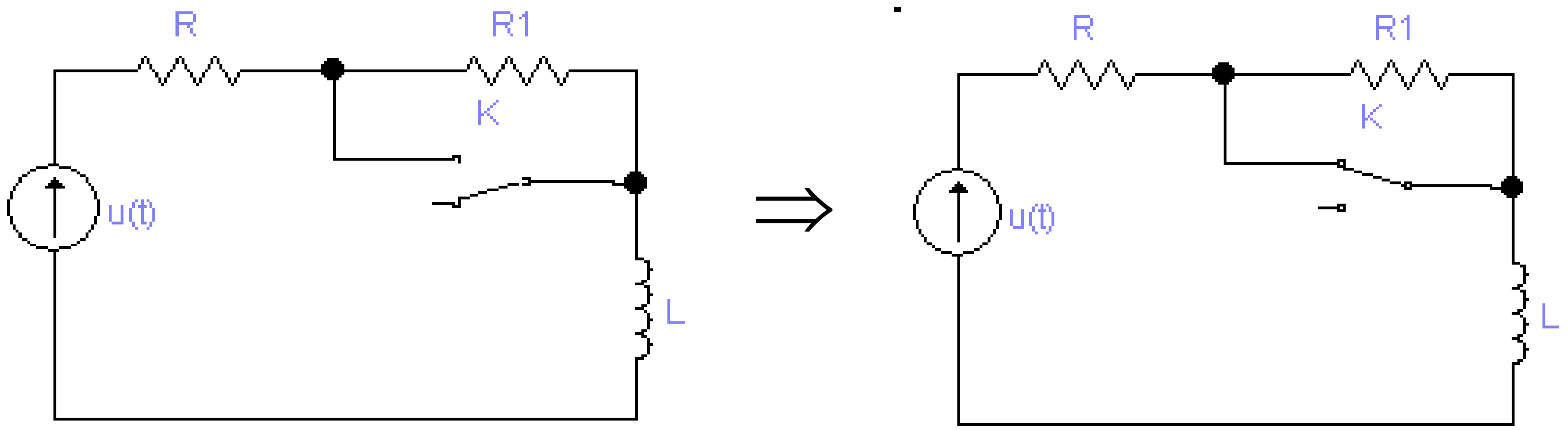


Calcul numeric: $i_{sc}(t) := \dfrac{U}{r} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$tau_s(t) := \frac{U}{r} \cdot \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \qquad tau_{sc}(t) := if\,(tau_s(t) \geq 0, tau_s(t), 0)$$

Aplicația 02

Circuitul din figura de mai jos funcționează în regim permanent cu întrerupătorul **K** deschis. Să se determine variația în timp a curentului din bobină, în urma scurtcircuitării rezistorului R1.



Se precizează valorile numerice ale parametrilor circuitului și a sursei de alimentare.

$R := 10 \ \Omega$ $\quad R_1 := 30 \ \Omega$ $\quad L := 0.1 \ \mathrm{H}$ $\quad E := 120 \ \mathrm{V}$

$f(t) := E \cdot \sin(t)$ -- funcția care determină forma alurei de creștere a semnalului dat sursa de tensiune *u(t)*

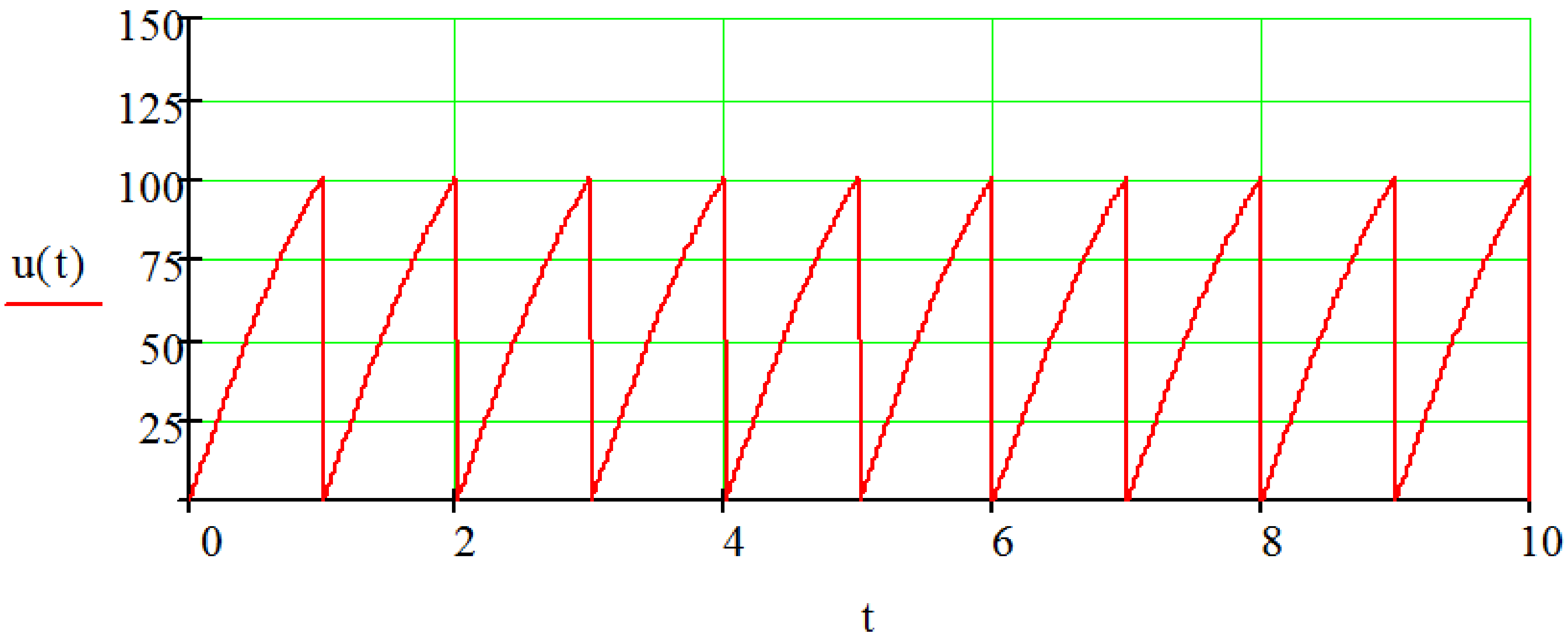
$a := -1 \quad b := 1$ -- coeficienți pe baza caroră se calculează frecvența semnalului

$mantissa(t) := t - floor(t)$ -- funcțiile **floor** și **mantissa** returneaza partea întreagă și partea fracționară a unui număr

$u(f, t, a, b) := f(mantissa(t))$

-- semnalul periodic de tensiune electrică

$u(t) := u(f, t, a, b)$



Modificarea poziției întrerupătorului **K** conduce la apariția regimului tranzitoriu în circuitul electric R-L. Modelul matematic, reprezentat de o ecuatie diferențială, se obține din aplicarea teoremei a doua a lui Kirchhoff pe ochiul de circuit. Condiția inițială a ecuației diferențiale se deduce din calculul intensității curentului electric în regimul permanent anterior apariției fenomenului tranzitoriu.

$$L \cdot \frac{d}{dt} i(t) + R \cdot i(t) = u(t)$$ -- ecuația diferențială de ordnul I care se obține

$T_0 = 2.5 \ \ s$ -- momentul de timp la care se face comutația

$i_0 := \dfrac{u(T_0)}{R + R_1}$ $\quad i_0 = 1.438 \ \ A$ -- condiția inițială la momentul T_0 deoarece regimul de funcționare nu este alternativ, ci doar periodic

Deși soluția analitică a ecuației diferențiale descrise anterior se cunoaște, problema se va soluționa printr-o metodă numerică de integrare aproximativă, metoda Runge-Kutta de ordinul IV. Scopul este de a prezenta o alternativă numerică de rezolvare.

Se scrie derivata curentului în funcție de celelalte mărimi din ecuație:

$$\frac{d}{dt}i(t)=\frac{u(t)-R\cdot i(t)}{L}$$

Se atașează membrului drept al ecuației o funcție de doi parametri: timpul și curentul electric:

$$f(t,i):=\frac{u(t)-R\cdot i}{L}$$

Se condiționeaza perioada de simulare, începând de la comutarea întrerupătorului:

$T_f := 6 \;\; \text{s} \qquad h := 0.01 \;\; \text{s}$ -- pasul de discretizare a timpului

$N := \frac{T_f - T_0}{h} \qquad N = 350$ -- numărul de puncte de calcul folosit pentru aproximarea valorilor de curentului electric *i(t)*

$k := 0..N \qquad T_k := T_0 + h\cdot k$ -- punctele intermediare în care se vor determina valorile curentului electric *i(t)*

$I_0 := i_0$ -- inițializarea condiției impuse în ecuația diferențială

Implementarea formulelor aferente metodei Runge-Kutta de ordinul IV:

$$k_0(t,i) := h \cdot f(t,i) \qquad k_1(t,i) := h \cdot f\left(t+\frac{h}{2}, i+\frac{k_0(t,i)}{2}\right)$$

$$k_2(t,i) := h \cdot f\left(t+\frac{h}{2}, i+\frac{k_1(t,i)}{2}\right) \qquad k_3(t,i) := h \cdot f\left(t+h, i+k_2(t,i)\right)$$

Implementarea relației de recurență aferentă metodei Runge-Kutta de ordinul IV:

$$I_{k+1} := I_k + \frac{1}{6} \cdot \left(k_0\left(t_k, I_k\right) + 2 \cdot k_1\left(t_k, I_k\right) + 2 \cdot k_2\left(t_k, I_k\right) + k_3\left(t_k, I_k\right)\right)$$