

Modulația în frecvență

Scopul Aplicației

Aplicația propune studiul tehnicilor de modulare și demodulare ale modulațiilor în frecvență. Se vor prezenta câteva tipuri de modatoare și demodatoare MF analogice și digitale respectiv implementarea acestora utilizând SDR (Software defined Radio).

Un alt scop urmărit este evaluarea performanțelor asigurate de modulații în frecvență.

Considerente Teoretice

- *Modulația în frecvență* - MF – modifică valoarea **deviației frecvenței instantanee a semnalului modulat, în jurul frecvenței purtătoare direct proporțional cu nivelul semnalului modulator**, păstrând amplitudinea semnalului modulat la o valoare constantă.
- considerând semnalul modulator:

$$g(t) = g_M \cdot f(t); \quad f(t) \in [-1; 1] \quad (1)$$

- frecvența instantanee a semnalului modulat MF trebuie să fie:

$$f_i(t) = f_c + k_{FM} \cdot g(t) \quad (2)$$

$$[k_{FM}] = \frac{\text{Hz}}{\text{V}}$$

- expresia pulsației instantanee a semnalului MF este:

$$\omega_i(t) = \omega_c + K_{FM} \cdot g_M \cdot f(t) = \omega_c + \Delta\omega_M \cdot f(t); \quad (3)$$

$$[K_{FM}] = \frac{\text{rad}}{\text{s} \cdot \text{V}}$$

- deoarece faza instantanee $\phi_i(t)$ a semnalului modulat este integrala pulsației instantanee în raport cu timpul

$$\omega_i(t) = \frac{\delta\phi_i(t)}{\delta t} \Rightarrow \phi_i(t) = \int_0^t \omega_i(\tau) d\tau = \int_0^t \omega_c d\tau + \int_0^t \Delta\omega_M \cdot f(\tau) d\tau = \omega_c t + \Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (4)$$

expresia semnalului modulat MF este (considerând că amplitudinea semnalului purtător este V_0):

$$s_{FM}(t) = V_0 \cos\left(\omega_c t + \Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau\right) \quad (5)$$

- $\Delta\omega_M$ reprezintă deviația maximă a pulsației. Indicele de modulație este definită ca

$$\beta = \frac{\Delta\omega_M}{\omega_{mM}} = \frac{2\pi\Delta f_m}{2\pi f_{mM}} = \frac{\Delta f_m}{f_{mM}} \quad (6)$$

- ărgimea de bandă a semnalului modulat FM este infinit de mare. În practică lărgimea de bandă este definită ca fiind banda de frecvență care conține aproximativ 99% din puterea semnalului MF, lărgimea acestei benzi poate fi determinată cu relația (7). Deoarece spectrul semnalului este simetrică față de frecvența purtătoare f_c banda de frecvență a semnalului modulat în frecvență poate fi determinată cu relația (8):

$$LB_{MF} = 2 \cdot f_{mM} (1 + \beta + \sqrt{\beta}) \quad (7)$$

$$BF_{MF} \in \left[f_c - \frac{LB_{MF}}{2}; f_c + \frac{LB_{MF}}{2} \right] \quad (8)$$

- semnalul modulat MF și spectrul său sunt prezentate în Fig. 1. pentru un semnal modulator $g(t) = A\cos(\omega_m t)$, cu $f_m = 4$ Hz, $g_M = 2$ V, $\Delta\omega_M = 13$ Hz, și $f_c = 80$ Hz; $\beta = 3.25$, $LB_{MF} = 40.25$ Hz;

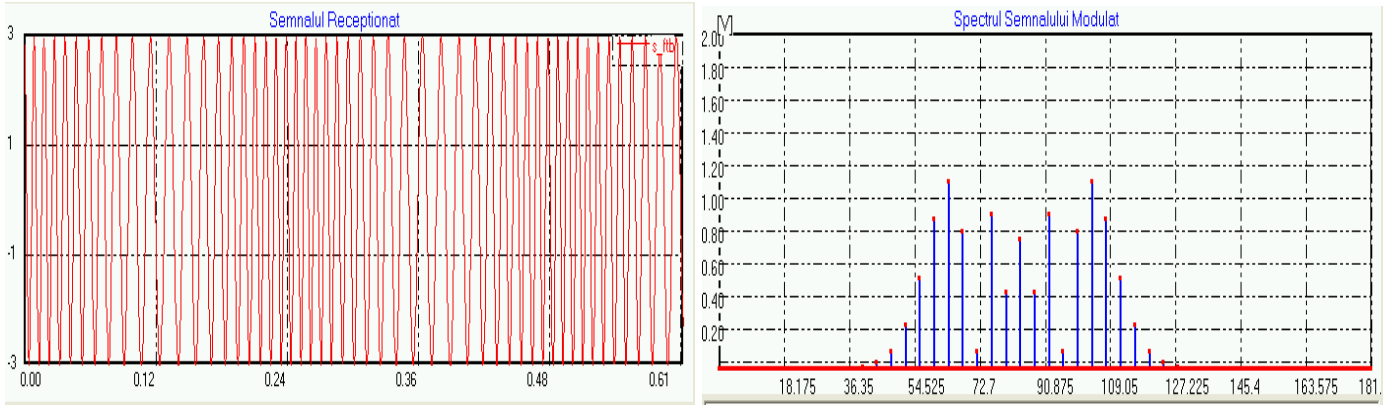


Fig. 1. Semnalul modulat FM (reprezentare în timp și spectru de frecvență) cu semnal modulator cosinusoidal

obs. cel mai uzual exemplu de utilizare a MF este “FM radio”, având parametrii: $f_{mM} = 15$ kHz, $\Delta f_M = 50$ kHz, $\beta = 3.33$, $LB_{FM} = 184.6$ kHz;

Producerea semnalelor MF

Metoda Armstrong

- aproximează semnalul MF:

$$s_{FM}(t) = V_0 \cos \left(\omega_c t + \Delta \omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau \right) = V_0 \cos(\omega_c t) \cdot \cos \left[\Delta \omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau \right] - V_0 \sin(\omega_c t) \cdot \sin \left[\Delta \omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau \right] \quad (9)$$

$$\text{pentru } \left| \Delta \omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau \right| \leq 0.2 \text{ rad} \Rightarrow \begin{cases} \cos \left[\Delta \omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau \right] \approx 1 \\ \sin \left[\Delta \omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau \right] \approx \Delta \omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau \end{cases} \quad (10)$$

Utilizând aproximația (10) relația (9) devine:

$$s_{FM}(t) \approx V_0 \cos \omega_c t - V_0 \cdot \left[\Delta \omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau \right] \cdot \sin \omega_c t \quad (11)$$

- condiția impusă în (10), pentru a permite aproximațiile făcute, conduce, pentru un semnal modulator de bandă limitată $[\omega_{mm}, \omega_{mM}]$, la un indice de modulație cu valoare mică, adică:

$$\beta' = \frac{\Delta \omega_M'}{\omega_{mM}} \leq 0.5 \quad (12)$$

- pentru a permite obținerea unor valori mai mari ale lui β , semnalul este mai întâi modulat pe o frecvență intermediară f_c' și cu un indice de modulație β' care să respecte condiția (10)—mai mici decât f_c și respectiv β

- apoi este limitat în amplitudine, iar descompunerea în serie Fourier a semnalului astfel obținut este:

$$s_L(t) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \left[(2k-1) \omega_c' t + (2k-1) \Delta \omega_M' \int_0^t f(\tau) d\tau \right] \quad (13)$$

- impunând pentru cea de a k -a armonică nenulă, condițiile:

$$\left. \begin{aligned} (2k-1) \omega_c' &= \omega_c \\ (2k-1) \Delta \omega_M' &= \Delta \omega_M \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2k-1) \beta' = \beta \quad (14)$$

- rezultă că valorile frecvenței intermediare f_c' și ale indicelui de modulație β' pe care trebuie făcută modularea descrisă de relația (11) sunt date de relațiile:

$$f'_c = \frac{f_c}{2k-1}$$

$$\beta' = \frac{\beta}{2k-1} \leq 0.5$$
(15)

- filtrând TB semnalul limitat (13) cu un filtru având $\omega_0 = \omega_c$ și cu o bandă de trecere LB_{FM} se obține semnalul MF pe frecvența purtătoare și cu indicele de modulație impuse
- trebuie însă reținut că factorul $(2k-1)$ nu trebuie să ia valori prea mari (valorile practice sunt cele < 11), deoarece amplitudinea armonicii corespunzătoare în (13) ar putea fi prea scăzută.
- schema bloc a modulatorului Armstrong este prezentată în Fig. 2.

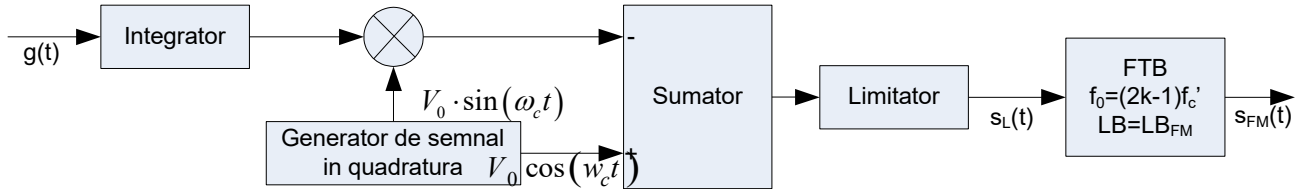


Fig. 2. Modulator MF cu metoda Armstrong

- o altă metodă analogică folosită uzual este comanda frecvenței semnalului de ieșire al unui oscilator comandat în tensiune OCT de către nivelul semnalului modulator [Vătășescu – cap. circuite PLL]

Metodă digitală de producere a semnalului MF

- utilizând metode digitale poate fi calculat cu o precizie arbitrară valoarea funcției $\cos(\cdot)$, deci o metodă de generare a semnalelor modulate cu modulații neliniare constă în generarea unui semnal numeric care reprezintă *faza instantanee (argumentul)* a semnalului modulat, și după aceea aplicarea acestui semnal la intrarea unui bloc care calculează funcția $\cos(\cdot)$.
- în practică, pentru valori mai mari a frecvenței centrale (purtătoare) se preferă generarea semnalului cu ajutorul unei modulații MAQ. Ținând cont de egalitatea $\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$ expresia semnalului modulat FM (5) poate fi rescrisă în forma:

$$s_{FM}(t) = V_0 \cos\left(\omega_c t + \Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau\right) =$$

$$= V_0 \cos\left(\Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau\right) \cdot \cos(\omega_c t) - V_0 \sin\left(\Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau\right) \cdot \sin(\omega_c t)$$
(16)

Notând cu

$$I_{FM}(t) = V_0 \cos\left(\Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau\right)$$

$$Q_{FM}(t) = V_0 \sin\left(\Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau\right)$$
(17)

Semnalul modulat în frecvență devine:

$$s_{FM}(t) = I_{FM}(t) \cdot \cos(\omega_c t) - Q_{FM}(t) \cdot \sin(\omega_c t)$$
(18)

obs. semnalul complex $s_{FM-BB}(t) = I_{FM}(t) + j \cdot Q_{FM}(t)$ se numește anvelopa complexă a semnalului FM.

- după eșantionarea $I_{FM}(t)$ și $Q_{FM}(t)$ se obțin semnalele $I_{FM}(nT_e)$ și $Q_{FM}(nT_e)$ care pot fi scrise în formă recursivă, cu pas variabil care depinde de semnalul modulator:

$$\Theta_I(n \cdot T_e) = \Theta_Q(n \cdot T_e) = \Theta_{BB}(n \cdot T_e) = \Delta\omega_M \cdot T_e \cdot \sum_{i=0}^n f(i \cdot T_e) =$$

$$= T_e \cdot \left(\Delta\omega_M \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(i \cdot T_e) + \Delta\omega_M \cdot f(n \cdot T_e) \right) =$$

$$= \Theta_{BB}((n-1) \cdot T_e) + \Theta_{BB-p}(n \cdot T_e)$$
(19)

$$\Theta_{p-BB}(n \cdot T_e) = \Delta\omega_M \cdot f(n \cdot T_e) = K_{FM} \cdot g(n \cdot T_e) \quad (20)$$

- schema bloc a modulatorului devine:

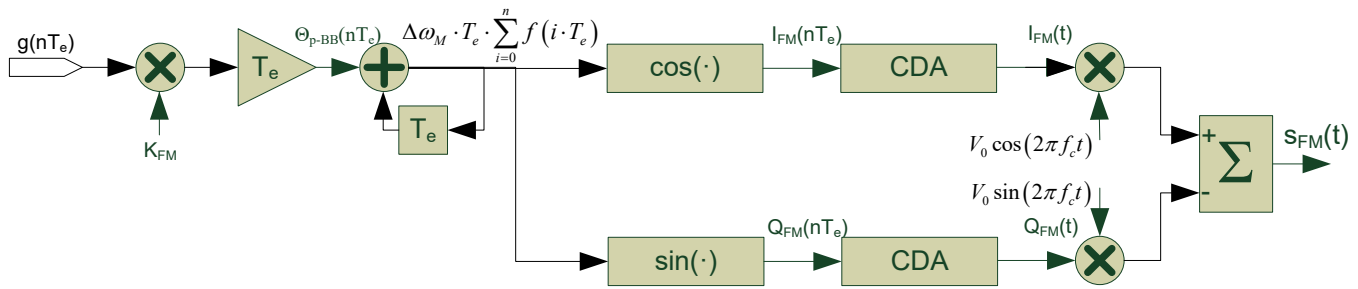


Fig. 3. Modulator digital FM cu ajutorul modulației MAQ

obs. În cazul modulatorului care utilizează modulația QAM frecvența de eșantionare poate să fie mult mai mică decât în cazul generării digitale a semnalului MF direct pe purtătoare. (de obicei $f_{mM} \ll f_p$)

Desfășurarea Lucrării

- Se va implementa modulatorul FM de bandă îngustă prezentat în Figura 2. utilizând un semnal modulator cu frecvența modulatoră maximă de 5kHz
 - Frecvența de eșantionare se setează la $44100 \cdot 10$
 - Se alege frecvența purtătoare de 10000Hz
 - Se alege indicele de modulație pentru modulatorul de bandă îngustă 0.5
 - Se va determina lărgimea de bandă
- Se va implementa modulatorul FM digital prezentat în Figura 3. utilizând un semnal modulator cu frecvența modulatoră maximă de 5kHz
 - Se va afișa spectrul semnalului FM bandă de bază pentru diferite valori a indicelui de modulație
 - Se va determina banda de frecvență a semnalului modulat FM pentru următoarele valori a deviației maxime de frecvență: 5kHz, 10kHz, 15kHz, 20kHz.

Să salvați reprezentarea în timp și în frecvență a semnalelor demodulate.

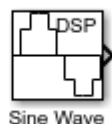
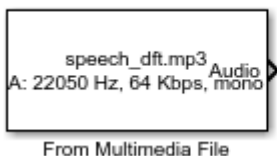
Blocurile simulink utilizate

Surse de semnal:

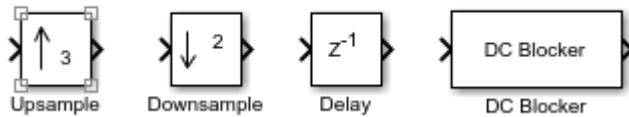
Simulink → Sources



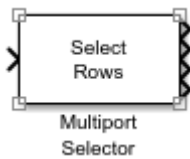
DSP System Toolbox → Sources



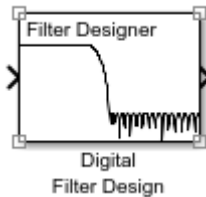
Prelucrarea semnalului: DSP System Toolbox → Signal Operations



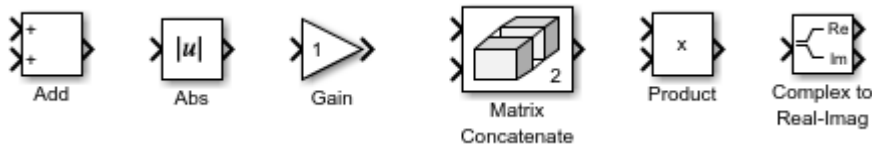
Gestionarea semnalului: DSP System Toolbox -> Signal Management -> Indexing



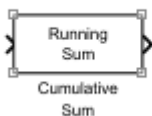
Filtrarea semnalului: DSP System Toolbox -> Filtering -> Filter Designs



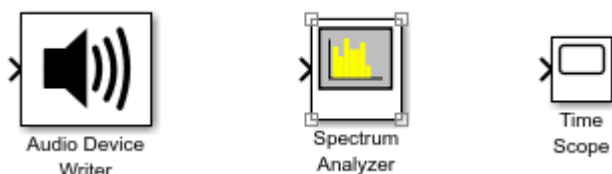
Operațiuni matematice: Simulink-> Math Operations



DSP System Toolbox -> Statistics



Afișarea/redarea semnalelor: DSP System Toolbox -> Sinks



Referințe:

- Ed.Nicolau, coord. "Manualul Inginerului electronist. Radiotehnica vol.III", Ed. Tehnică, 1989
- <https://ccrma.stanford.edu/software/snd/snd/fm.html>
- John G Proakis , Masoud Salehi, "Fundamentals Of Communication Systems" Prentice Hall 2004
- B.P. Lathi, "Modern Digital and Analog Communication Systems" Third Edition, Oxford University Press, 1998
- Simon Haykin "Communication Systems" 4th edition, John Wiley & Sons, 2001