

Transmisii în banda de bază cu mai mulți biți pe simbol (PAM)
Filtrarea semnalelor modulate cu o modulație digitală

Scopul Aplicației

Aplicația propune studiul tehnicilor de modulare și demodulare ale modulațiilor PAM, respectiv se va studia necesitatea și implementarea filtrelor formatoare de impulsuri

Considerente Teoretice

Modulația numerică PAM (Pulse Amplitude Modulation).

În cazul modulației digitale PAM, pe durata celei de al k -lea perioadă de simbol (când se transmite al k -lea cuvânt binar format din n biți) în canal se transmite o tensiune constantă m_k . Nivelul tensiunii transmise în canal, m_k , poate lua una dintre cele $M=2^n$ valori permise. Valorile permise sunt elemente al mulțimii $\mathcal{M}$. Mulțimea $\mathcal{M}$ se mai numește și *alfabetul de intrare a canalului*. Considerând că valoarea maximă transmisă este A_M și impunând ca diferența de tensiune dintre oricare două elemente învecinate trebuie să fie constantă, elementele m_i ale mulțimii $\mathcal{M}$ sunt definite de relația:

$$m_i = 2 \cdot A_0 \cdot i - A_M; \quad i = 0, 1, \dots, 2^n - 1 \quad (1)$$

unde $2A_0$ este distanța minimă între oricare două elemente ale mulțimii $\mathcal{M}$ și valoarea lui A_0 pentru condițiile de mai sus este:

$$A_0 = \frac{A_M}{M-1} = \frac{A_M}{2^n - 1} \quad (2)$$

În Figura 1. este prezentată un exemplu de semnal PAM, și funcția (tabelul) de mapare utilizată, pentru situația când $n=3$ și $A_0=1V$.

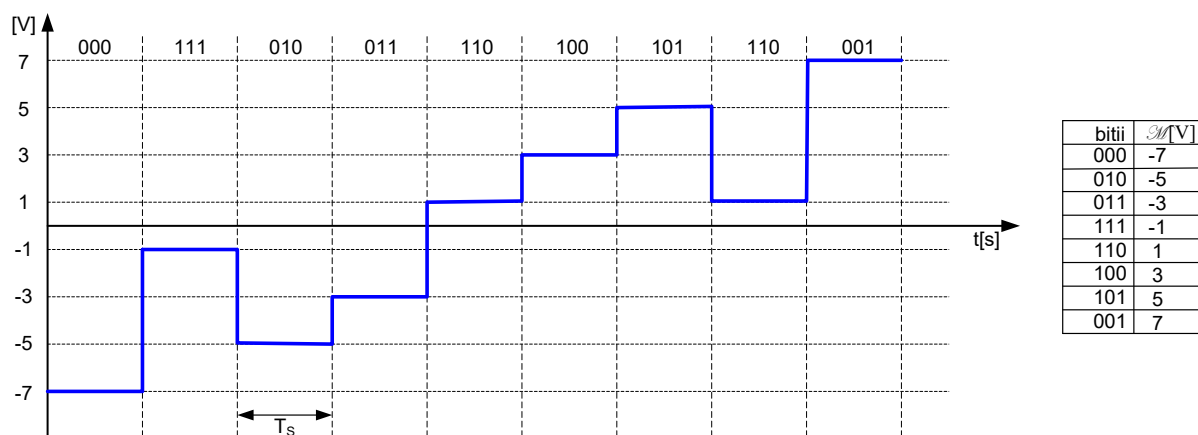


Figura 1. Exemplu de semnal PAM, și tabelul de mapare

Dacă considerăm că nivelele modulatorie date de relația (1) apar cu aceeași probabilitate, puterea medie a semnalelor PAM este dată de relația (3). Relația se obține utilizând valorile sumelor primelor M numere naturale și ale pătratelor acestora [nast]:

$$P_{mPAM} = \frac{A_0^2 \cdot \sum_{i=0}^{M-1} (2i+1-M)^2}{M} = \frac{A_0^2 \cdot (M^2-1)}{3}; \quad (3)$$

Expresia matematică a semnalului modulat este:

$$s_{PAM}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \cdot u_T(t - kT_s) \quad (4)$$

unde $u_T(t)$ este un impuls treaptă-unitate cu durata de o perioadă de simbol, T_s , și este descrisă de (5).

$$u_T(t) = \begin{cases} 1; & t \in [0; T_s) \\ 0; & t \notin [0; T_s) \end{cases} \quad (5)$$

Dacă considerăm că semnalul modulat poate lua M nivele de tensiune, iar datele modulatorie sunt aleatoare, atunci nivelul semnalului modulat este o variabilă aleatoare de medie m_m și dispersie σ_m . În acest caz, densitatea spectrală de putere a semnalelor PAM este dată de relația, [proa], [fuqin]:

$$S_{PAM}(f) = \sigma_m^2 \cdot T \cdot \left(\frac{\sin \frac{\pi f}{f_s}}{\frac{\pi f}{f_s}} \right)^2 + m_m^2 \cdot T \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\sin \frac{\pi(f - kf_s)}{f_s}}{\frac{\pi(f - kf_s)}{f_s}} \right)^2 \cdot \delta(f - kf_s) \right] \quad (6)$$

Dacă se impune condiția ca media nivelelor modulatorie să fie nulă, $m_m = 0$, adică nivelele modulatorie să aibă valori simetrice față de 0V, atunci densitatea spectrală de putere a semnalelor PAM este exprimată numai de primul termen al relației (6), și este reprezentată în Figura 2

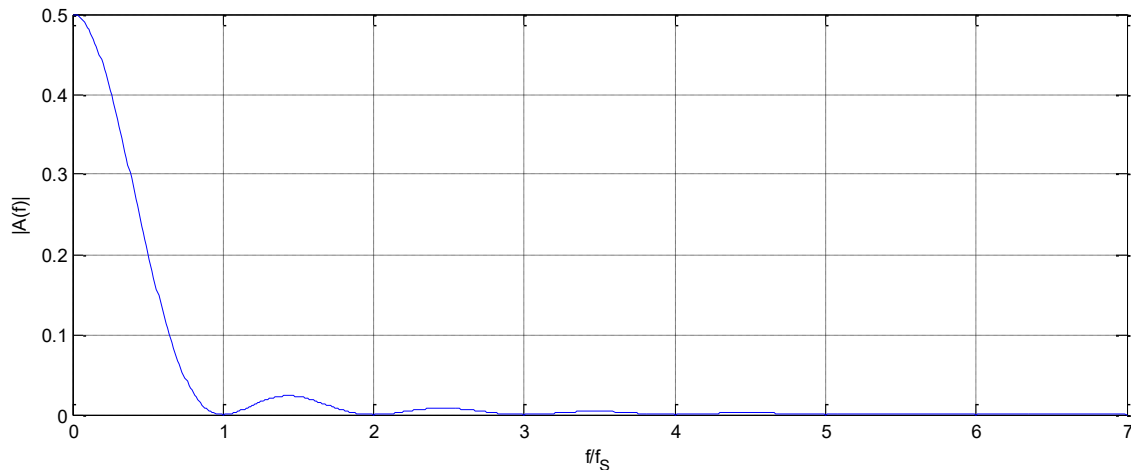


Figura 2 Densitatea spectrală a semnalului PAM

Semnalul modulat PAM reprezintă varianta în banda de bază a semnalului modulat cu *modulația cu salt de amplitudine*, ASK (Amplitude Shift Keying). Semnalul ASK se obține prin înmulțirea semnalului PAM cu o purtătoare cosinusoidală.

Probabilitatea de eroare a modulației PAM.

Se presupune că semnalul recepționat este afectat de un zgomot gaussian de medie nulă și dispersie σ . Expresia semnalului recepționat este:

$$r_{PAM}(t) = s_{PAM}(t) + n(t) \quad (7)$$

Astfel, probabilitatea condiționată ca semnalul să aibă valoarea r în momentul de sondare, dacă s-a emis nivelul m_i este:

$$p(r | m_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp \left(-\frac{(r - m_i)^2}{2\sigma^2} \right); \quad (8)$$

Distribuțiile densităților de probabilitate pentru cele M nivele emise și afectate de zgomot, precum și valorile celor M-1 praguri de decizie, sunt prezentate în Figura 3.

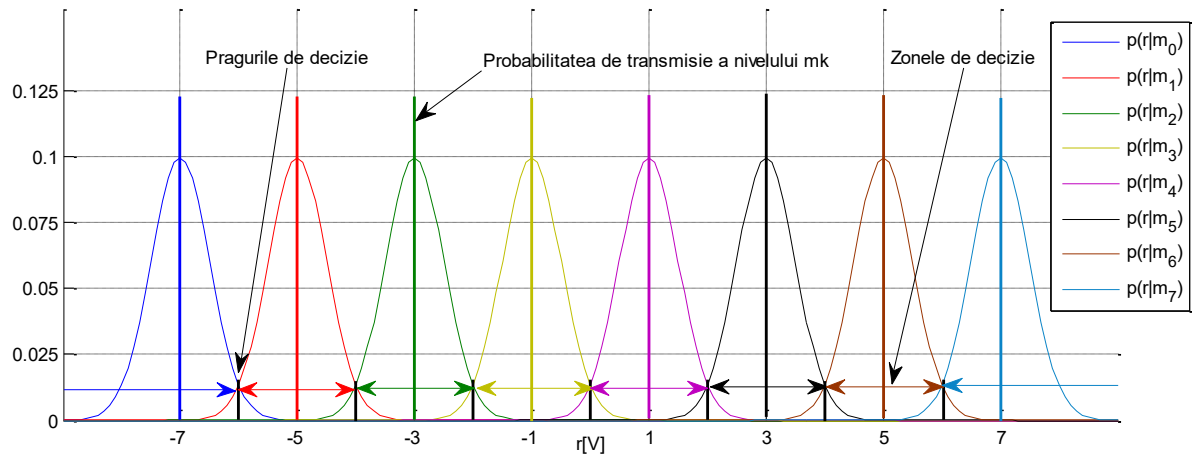


Figura 3 Distribuțiile densităților de probabilitate ale semnalului PAM recepționat, pragurile și zonele de decizie

Deoarece simbolurile decise se obțin pe baza distanței euclidiene minime dintre nivelele permise și nivelul recepționat, de aceea, probabilitatea de eronare a unui simbol este egală cu probabilitatea de apariție a unui semnal de zgomot astfel încât nivelul recepționat să fie mai aproape de un nivel permis altul decât cel transmis pe acea perioadă de simbol. Dacă pe o perioadă de simbol se transmite nivelul m_k cu probabilitatea P_{mk} , atunci probabilitatea de eronare a unui simbol este:

$$p_e = \sum_{k=1}^M \left(P_{mk} \cdot p(|r - m_k| > A_0) \cdot N_{k,A_0} \right); \quad (9)$$

unde N_{k,A_0} reprezintă numărul de nivele permise care se află la distanța euclidiană $2A_0$ față de nivelul m_k

Dacă datele modulatorie sunt aleatoare, atunci nivelele transmise sunt echiprobabile, adică $P_{mk} = \frac{1}{M}$

Dacă nivelele transmise respectă ecuația (1), atunci ecuația (9) poate fi rescrisă în felul următor:

$$\begin{aligned} p_e &= \frac{1}{M} \cdot \left[p(|r - m_1| > A_0) + p(|r - m_M| > A_0) + \sum_{k=2}^{M-1} \left(p(|r - m_k| > A_0) \cdot 2 \right) \right] = \\ &= \frac{2(M-2)+2}{M} p(|r - m_i| > A_0); \end{aligned} \quad (10)$$

Înlocuind (8) în (10), obținem probabilitatea medie de eroare de simbol:

$$p_e = \frac{2(M-1)}{M} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^2} \int_{A_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{(r - m_k)^2}{2\sigma^2}\right) d(r - m_k) = \frac{2(M-1)}{M} \cdot Q\left(\frac{A_0}{\sigma}\right); \quad (11)$$

unde

$$Q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du; \quad (12)$$

Probabilitatea de eroare de simbol poate fi exprimată și în funcție de puterea medie a semnalelor, ținând cont de relația (3):

$$p_e = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{3P_{mPAM}}{(M^2-1)\sigma^2}}\right); \quad (13)$$

Filtrarea semnalelor de date

Necesitate

- unul din efectele limitării benzii unui impuls rectangular de perioadă T_s , datorită filtrării, este „extinderea” sa în timp, care conduce la apariția **interferenței intersimbol** (Inter-Symbol Interference - ISI).

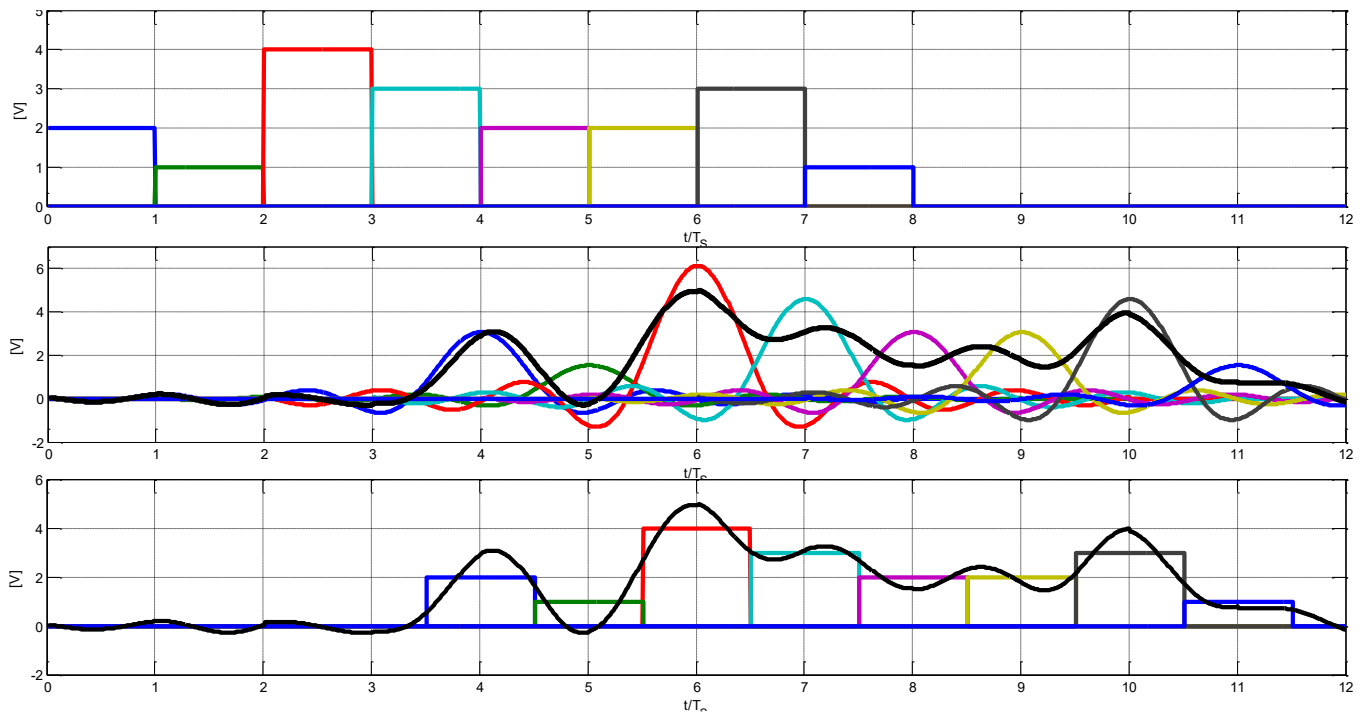


Figura 4 Filtrarea trece jos a impulsurilor. a). nivele de intrare. b). impulsurile individuale filtrate. c). Semnalul original si semnalul filtrat

- dacă a_k este impulsul ce apare în cea de a k-a perioadă de simbol, $x(t)$ este răspunsul la impuls al filtrului, iar τ este întârzierea introdusă de filtru, atunci semnalul la ieșirea filtrului este:

$$y(t) = \sum_{i=-n}^{+n} a_{k+i} \cdot x(t - kT_s - iT_s - \tau) = a_k \cdot x(t - kT_s - \tau) + \sum_{\substack{i=-n \\ i \neq 0}}^{+n} a_{k+i} \cdot x(t - kT_s - iT_s - \tau) \quad (14)$$

- din (14) rezultă că impulsul filtrat are un lob principal a_{k0} și o serie de lobi laterali a_{ki} , care apar în perioadele de simbol anterioare, $i < 0$, și în cele ulterioare, $i > 0$; acești lobi laterali afectează simbolurile transmise pe durata perioadelor de simbol respective. **Amplitudinile lobului principal și cele ale lobilor laterali depind de expresia răspunsului la impuls al filtrului folosit.**

Criteriile de filtrare ale lui Nyquist

- pentru a reduce efectele distorsionante ale ISI asupra semnalului filtrat, răspunsul la impuls al filtrului va trebui să fie nul la momente de timp bine definite, numite momente de sondare, cu excepția unuia, numit moment principal de sondare.

- Nyquist a arătat că, pentru a transmite simboluri cu perioadă T_s , într-o bandă de frecvență $[0, f_N]$ cu ISI = 0 în momentele de sondare (unde $f_N = 1/(2T_s) = f_s/2$), impulsurile trebuie filtrate cu un filtru ce are caracteristica de frecvență și răspunsul la impuls definite de relațiile (15) și, respectiv, (16).

- caracteristica de frecvență și răspunsul la impuls sunt prezentate în Figura 5 și Figura 6.

$$X(\omega) = \begin{cases} 1; \omega \leq \omega_N; \\ 0; \omega > \omega_N; \end{cases} \quad (15)$$

$$x(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T_s}\right)}{\pi \frac{t}{T_s}}; \quad (16)$$

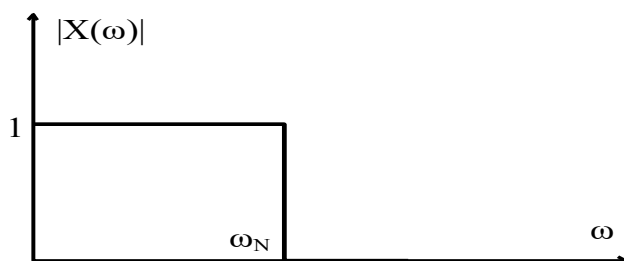


Figura 5 Caracteristica filtrului Nyquist ideal

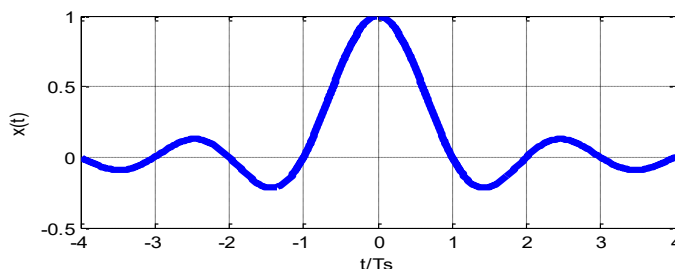


Figura 6. Răspunsul la impuls al filtrului Nyquist ideal

- această caracteristică este numită caracteristica Nyquist ideală, deoarece nu este realizabilă
- răspunsul la impuls al filtrului Nyquist ideal se anulează o dată în fiecare perioadă de simbol, la mijlocul acesteia (momente de sondare), cu excepția unei perioade de simbol, în care impulsul filtrat își atinge valoarea nominală la momentul de sondare.
- datorită acestei proprietăți, impulsul filtrat nu va afecta, în momentele de sondare, valorile impulsurilor transmise în perioadele de simbol anterioare și ulterioare, asigurând astfel o ISI nulă în momentele de sondare.
- pentru a obține o caracteristică de filtrare realizabilă trebuie să “relaxăm” una din condițiile impuse de filtrarea Nyquist ideală;
- cele trei posibilități de “relaxare” sunt:
 - a) mărirea lărgimii de bandă (LB) a caracteristicii de filtrare Nyquist;
 - b) acceptarea unei ISI nenule, controlate;
 - c) scăderea debitului de simbol, adică a lui f_s ;
- îndeplinirea condiției a) conduce la primul criteriu de filtrare a lui Nyquist;
- îndeplinirea condiției b) conduce la al doilea criteriu de filtrare a lui Nyquist – se obțin astfel așa numitele Tehnici cu Răspuns Parțial (PR);
- îndeplinirea condiției c) nu este luată în considerare deoarece conduce la scăderea debitului binar.

Primul criteriu de filtrare al lui Nyquist. Caracteristica în cosinus ridicat (Raised-Cosine – RC)

- caracteristica de frecvență a acestui filtru este dată de (17), unde prin α s-a notat factorul de exces de bandă - “roll-off factor”;
- acesta este raportul dintre banda suplimentară de frecvență introdusă și banda minimă necesară, care e egală cu f_N .
- modulul caracteristicii este prezentat în Figura 7 pentru $\alpha = 0$ (caracteristica ideală – aproximativ), 0,5 și 1.
- deoarece expresia sa este un cosinus pătrat această caracteristică se numește “cosinus ridicat” - “raised cosine” (RC).
- caracteristica ideală $X(\omega)$ (15), care nu necesită un exces de bandă se obține făcând $\alpha \rightarrow 0$ în (17).

$$X_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_N(1-\alpha); \\ \frac{1 - \sin\left[\frac{T_s(\omega - \omega_N)}{2\alpha}\right]}{2} = \cos^2\left(\frac{\pi\omega}{4\alpha\omega_N} - \frac{\pi(1-\alpha)}{4\alpha}\right); & \omega \in (\omega_N(1-\alpha), \omega_N(1+\alpha)); \\ 0 & \omega \geq \omega_N(1+\alpha); \end{cases} \quad (17)$$

expresia (17) este o caracteristică de tip trece-jos

- expresia caracteristicii RC trece-bandă, centrată pe frecvența purtătoare f_p , se obține înlocuind în (17) ω cu $(\omega - \omega_p)$.

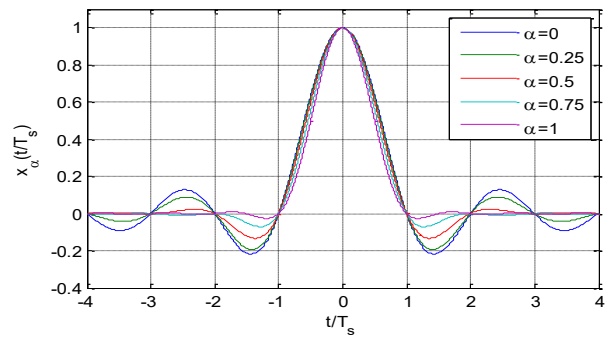
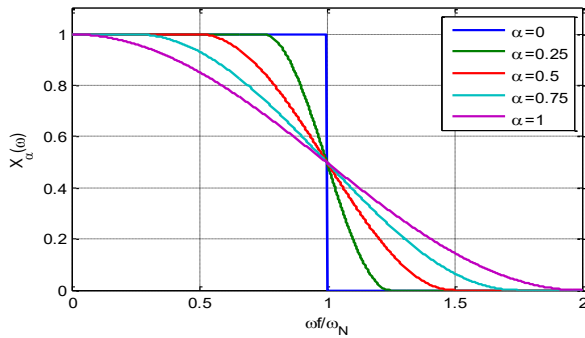


Figura 7 Caracteristicile de frecvență ale filtrelor RC Figura 8 Răspunsul la impuls al filtrelor RC

- banda de trecere a semnalului filtrat TB este:

$$B = [\omega_p - \omega_N(1 + \alpha); \omega_p + \omega_N(1 + \alpha)] \quad (18)$$

- răspunsul la impuls al filtrului RC este definit de relația (19), reprezentată în Figura 8 pt. $\alpha = 0.5$.

$$x_\alpha(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)}{\frac{\pi t}{T_s}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\alpha \pi t}{T_s}\right)}{1 - \frac{4\alpha^2 t^2}{T_s^2}}; \quad (19)$$

- comparând expresiile (16) și (19) sau Figura 6 și Figura 8, rezultă că lobii laterali ai răspunsului filtrului cu banda extinsă sunt sensibil mai mici decât cei ai răspunsului filtrului ideal; aceasta datorită celui de al doilea factor din (19), factor generat de banda de frecvență suplimentară utilizată.
- atenuarea lobilor laterali crește odată cu creșterea factorului de exces de bandă.
- dacă $t = kT_s - T_s/2$ este considerat începutul perioadei de simbol, atunci momentul de sondare este întârziat cu $T_s/2$ și apare la mijlocul perioadei de simbol; deci momentele de sondare sunt $t = kT_s$.
- Momentele de sondare au aceleași proprietăți ca și cele descrise la filtrul Nyquist ideal.

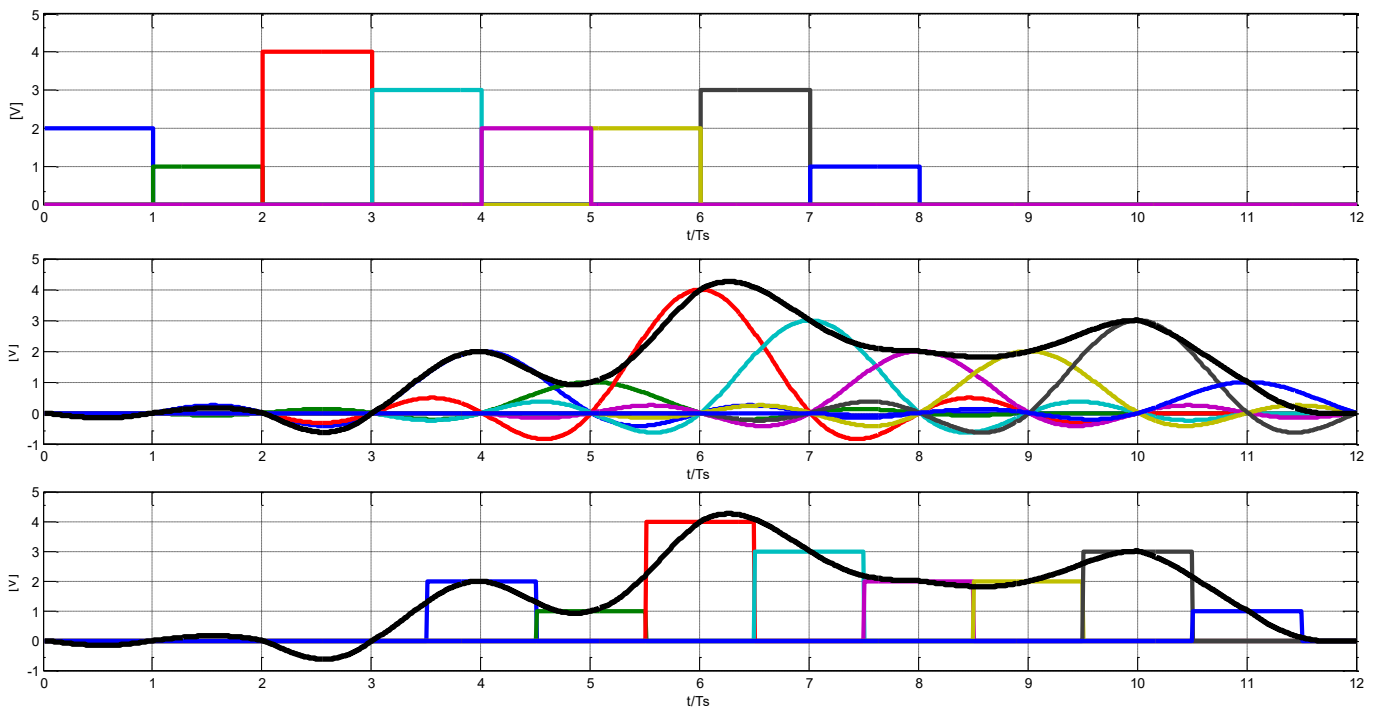


Figura 9 Filtrarea trece jos a impulsurilor cu un filtru Nyquist.

a. nivele de intrare. b. impulsurile individuale filtrate. c. Semnalul original si semnalul filtrat

Caracteristica de filtrare radical din cosinus ridicat - Root-Raised Cosine (RRC)

- pentru a asigura cele mai bune performanțe în prezența zgomotului, caracteristica de filtrare RC este repartizată în mod egal între emisie și recepție.
- aceasta implică filtrarea semnalului, atât la emisie cât și la recepție cu caracteristicile G_E și G_R , care sunt egale cu $X_\alpha^{1/2}$, vezi (20).

$$\left. \begin{aligned} X_\alpha(\omega) &= G_E(\omega) \cdot G_R(\omega) \\ G_E(\omega) &= G_R(\omega) \end{aligned} \right\} \Rightarrow G_E(\omega) = G_R(\omega) = X_\alpha^{1/2}(\omega); \quad (20)$$

- dacă filtrul de la recepție este plasat înaintea demodulatorului, la intrarea acestuia, semnalul este filtrat cu produsul $G_E \cdot G_R$, adică cu o caracteristică RC.
- implementarea unei caracteristici RC este echivalentă cu implementarea a două caracteristici RRC, fie ele de tip TJ sau TB.
- expresia matematică a caracteristicii RRC este dată de (21) și reprezentată în Figura 10;

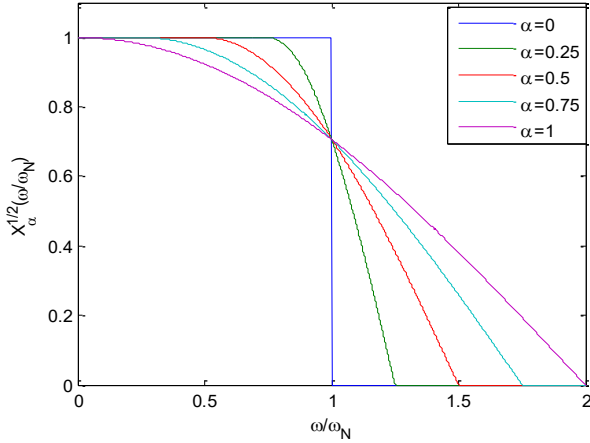


Figura 10. Caracteristicile de frecvență ale filtrelor RRC

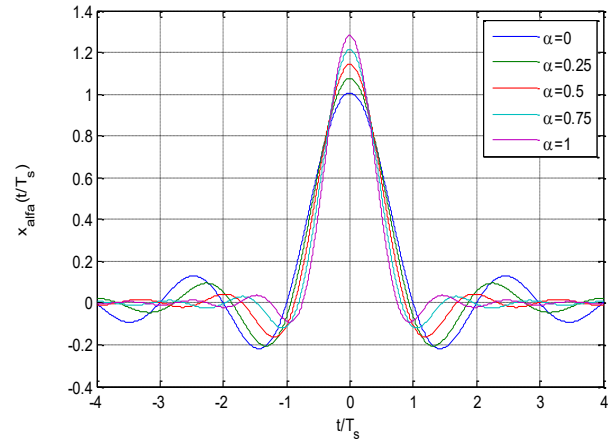


Figura 11 Răspunsurile la impuls ale filtrelor RRC

$$X_\alpha^{1/2}(\omega) = \begin{cases} 1; & 0 \leq \omega \leq \omega_N(1-\alpha); \\ \cos\left(\frac{\pi\omega}{4\alpha\omega_N} - \frac{\pi(1-\alpha)}{4\alpha}\right); & \omega \in [\omega_N(1-\alpha), \omega_N(1+\alpha)]; \\ 0; & \omega > \omega_N(1+\alpha) \end{cases} \quad (21)$$

- această caracteristică mai este denumită și caracteristica “în cosinus”.
- caracteristica definită în (21) este una TJ; - cea TB-RRC se obține similar cu caracteristica RC, iar banda semnalului filtrat este exprimată tot de (18)
- răspunsul la impuls al acestei caracteristici este definit de (22) și este prezentat în Figura 11.

$$h_{R\alpha}(t) = \frac{1}{1 - \left(\frac{4\alpha t}{T_s}\right)^2} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi(1-\alpha)t}{T_s}\right)}{\frac{\pi t}{T_s}} + \frac{4\alpha}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi(1+\alpha)t}{T_s}\right) \right]; \quad (22)$$

Rețineți că:

- răspunsul la impuls al filtrului RRC, $\alpha > 0$, nu are valori nule în momentele de sondare;
- amplitudinea semnalului filtrat este mai mare decât 1 în momentul principal de sondare; amplitudinea semnalului filtrat, în acest moment, crește cu creșterea lui α .
- amplitudinile lobilor laterali scad cu creșterea lui α .
- deși semnalul filtrat transmis în canal are ISI nenulă în momentele de sondare, semnalul de la intrarea demodulatorului are ISI=0 în aceste momente, datorită filtrării RRC efectuată în receptor, adică răspunsul global la impuls este (17), asigurându-se ISI=0 în toate momentele de sondare.

Transmisia PAM în canal AWGN cu bandă de frecvență limitată

Limitarea benzii de frecvență a semnalului PAM este echivalent cu înlocuirea impulsului unitate $u_{Ts}(t-kT_s)$ cu varianta lui filtrată trece jos cu filtru formator de la emisie; de exemplu $h_{Ra}(t-kT_s)$ dacă se dorește filtrarea cu caracteristica RRC. expresia semnalului PAM cu banda de frecvență limitată devine:

$$s_{PAM}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \cdot h_{FFE}(t-kT_s) \quad (23)$$

Semnalul recepționat din canal cu AWGN poate fi exprimat ca:

$$r_{PAM}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \cdot h_{FFE}(t - kT_s) + n(t) \quad (24)$$

pentru a reduce puterea zgomotului la recepție semnalul trebuie filtrat cu un filtru care are banda de trecere mai mare sau egal cu banda de frecvență a semnalului util. Expresia semnalului la ieșirea acestui filtru este:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \cdot (h_{FFE}(t - kT_s) * h_{FFR}(t - kT_s)) + (n(t) * h_{FFR}(t - kT_s)) \quad (25)$$

notând cu $h(t - kT_s) = h_{FFE}(t - kT_s) * h_{FFR}(t - kT_s)$ răspunsului la impuls a filtrului echivalent obținut din concatenarea filtrului formator de la emisie cu filtrul formator de la recepție, și cu $w(t) = n(t) * h_{FFR}(t - kT_s)$ zgomotul filtrat cu filtru formator din receptor, relația (25) poate fi rescris ca:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \cdot h(t - kT_s) + w(t) \quad (26)$$

semnalul filtrat este sondat (eșantionat) în momentele $t = nT_s$,

$$y_n = y(nT_s) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \cdot h(nT_s - kT_s) + w(nT_s) \quad (27)$$

Dacă filtrele formatoare de la emisie respectiv de la recepție sunt alese astfel încât filtrul echivalent obținut din concatenarea lor să fie un filtru Nyquist atunci pe baza (19) putem scrie ca:

$$h(nT_s - kT_s) = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n \end{cases} \quad (28)$$

și:

$$y_n = m_n + w_n \quad (29)$$

Dacă zgomotul din canal are densitatea spectrală de putere N_0 puterea zgomotului filtrat va fi:

$$\begin{aligned} \sigma^2 = P_n &= \int_{-\infty}^{\infty} (w(T))^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) \cdot h_{FFR}(\tau - kT_s) d\tau \right)^2 dt = \\ &= N_0 \int_{-\infty}^{\infty} (h_{FFR}(t - kT_s))^2 dt = N_0 \mathcal{E} \end{aligned} \quad (30)$$

În cazul filtrelor RRC coeficientul $\mathcal{E}$ este egal cu 1, deci dispersia zgomotului va fi identică cu dispersia zgomotului nefiltrat. În aceste condiții performanțele în prezența AWGN rămân același ca și în cazul transmisiei cu bandă de frecvență nelimitată.

Schema lanțului de transmisie este prezentată în Figura 12.

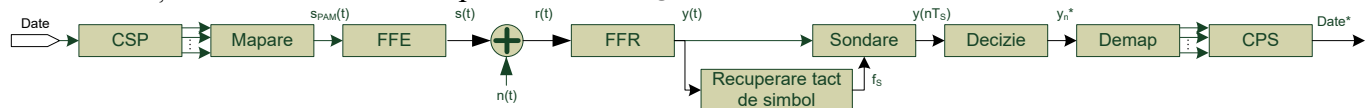


Figura 12. Schema bloc a unei transmisii PAM cu banda de frecvență limitată

Desfășurarea Lucrării

Se va implementa un modulator PAM cu $M \in \{4, 8, 16\}$ nivele care are frecvența de simbol de 1kHz. Vor fi utilizate generatorul de date aleatorii "Bernoulli Binary Generator" și modulatorul PAM "M-PAM Modulator Baseband" din Communication Toolbox.

- Pasul 1. se vor genera impulsuri rectangulare cu "Ideal Rectangular Pulse Filter" din Communications Toolbox\Comm Filters, care va supraeșantiona cu 31 eșantion/simbol.
 - Se va afișa semnalul în timp, spectrul semnalului și diagrama ochiului.
- Pasul 2. se filtrează semnalul PAM cu un filtru trece jos cu frecvența de tăiere la $5 \cdot f_s$, $2.5 \cdot f_s$, f_s și la $0.5 \cdot f_s$.
 - Se va suprapune semnalul filtrat și semnalul PAM nefiltrat întârziat cu întârzierea introdusă de filtrul trece jos
 - Se va afișa semnalul în timp, spectrul semnalului și diagrama ochiului.
- Pasul 3. se filtrează semnalul PAM cu un filtru trece jos de tip Nyquist (*Raised Cosine Transmit Filter* din Communications Toolbox\Comm Filters) cu factorul de exces de bandă 0.25, 0.5, 0.75 și 0.9999.

- Se va suprapune semnalul filtrat și semnalul PAM nefiltrat întârziat cu întârzierea introdusă de filtrul Nyquist
- Se va afișa semnalul în timp, spectrul semnalului și diagrama ochiului.
 - Se va interpreta diagrama ”proprietățile” ochilor din diagrama ochiului
- Pasul 4 se va introduce un generator de zgomot AWGN, filtrul formator de la recepție și demodulatorul PAM
 - Se va studia efectului zgomotului asupra diagramei ochiului
 - Se va analizat efectul citirii semnalului în afara momentelor de sondare (efectul recuperării incorecte a tactului de simbol)

Pentru fiecare pas vor fi încărcate pe teams modele și salvările ecranului cu diagramele cerute

Referințe:

- John G Proakis , Masoud Salehi, ”*Fundamentals Of Communication Systems*” Prentice Hall 2004
- Fuqin Xiong, “*Digital Modulation Techniques (Communications/Networking)*” 2nd Revised edition, Artech House, 2006
- Simon Haykin ”*Communication Systems*” 4th edition, John Wiley & Sons, 2001
- Bernard Sklar, ”*Digital Communications, fundamentals and Applications*” Prentice Hall, 2001