Rezolvare subiecte Matematici speciale Inginerie electrică restanțe toamnă 2025

Note Title 9/13/2025

II

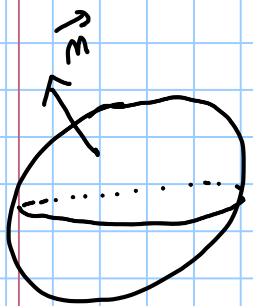
1. Formula lui Gauss – Ostrogradski
2. $x(t) = ?$ $\quad x' - \frac{2}{t} \cdot x = t^3$ și $x(1) = 2$
3. Ecuația căldurii în bara finită
4. $x(t) = ?$ $\quad x'' - 5x' + 6x = e^{-2t}$
5. $\mathcal{L}\{(1 - \cos 2t) \cdot (e^{-t} + t)\}(s) = ?$

1. Formula lui Gauss – Ostrogradski.

Fie $V \subseteq \mathbb{R}^3$ un corp mărginit

S suprafața frontieră a corpului V care este netedă pe porțiuni

$\vec{n}$ versorul normalei la suprafața S îndreptat înspre exteriorul lui V



$\vec{v}$ câmp vectorial de clasă C^1 pe V de forma $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Atunci are loc:
$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \, dxdydz .$$

2. $x(t) = ?$ $\quad x' - \frac{2}{t} \cdot x = t^3$ și $x(1) = 2$

ecuația diferențială $x' - \frac{2}{t} x = t^3$ este liniară de forma $x' + p(t) \cdot x = q(t)$

cu $p(t) = -\frac{2}{t}$ și $q(t) = t^3$.

$$x' - \frac{2}{t} x = t^3 \quad \Big| \cdot e^{\int p(t)dt}$$

Calculăm factorul integrant $e^{\int p(t)dt} = e^{\int -\frac{2}{t}dt} = e^{-2\int \frac{1}{t}dt} = e^{-2\ln t}$

$$= e^{\ln(t^{-2})} = t^{-2} = \frac{1}{t^2}$$

$$\Rightarrow \quad x' - \frac{2}{t} \cdot x = t^3 \quad \Big| \cdot \frac{1}{t^2}$$

$$\Rightarrow \quad x' \cdot \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^3} \cdot x = t^3 \cdot \frac{1}{t^2} \Rightarrow x' \cdot \frac{1}{t^2} + x \cdot \left(\frac{1}{t^2}\right)' = t \Rightarrow \left(x \cdot \frac{1}{t^2}\right)' = t$$

$$\Rightarrow \quad x \cdot \frac{1}{t^2} = \int t\,dt \quad \Rightarrow \quad x \cdot \frac{1}{t^2} = \frac{t^2}{2} + c \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t^4}{2} + ct^2$$

Am obținut soluția generală $x(t) = \frac{t^4}{2} + c \cdot t^2$.

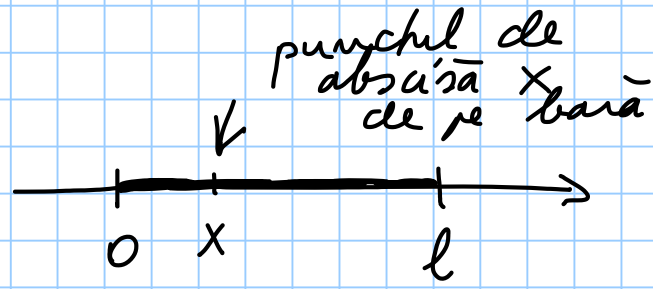
Rămâne să determinăm constanta c.

Avem $x(1) = 2$ și $x(1) = \frac{1^4}{2} + c \cdot 1^2 = \frac{1}{2} + c$

$$\Rightarrow \quad 2 = \frac{1}{2} + c \quad \Rightarrow \quad c = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{t^4}{2} + \frac{3t^2}{2}.$$

3. Ecuația căldurii în bara finită.



Fie o bară de lungime l.

$u(x,t)$ reprezintă temperatura punctului de abscisă $x \in [0,l]$ de pe bară la momentul de timp $t \in [0,\infty)$

Ecuația este $u'_t = a^2 \cdot u''_{x^2}$, unde a este un parametru real.

Condiții la limită: $u(0,t) = u(l,t) = 0$ temperatura la capetele barei este menținută constantă 0.

Condiții inițiale $u(x,0) = f(x)$ distribuția temperaturii la momentul inițial

4. $x(t) = ?$ $\quad x'' - 5x' + 6x = e^{-2t}$

Rezolvăm mai întâi ecuația omogenă $x'' - 5x' + 6x = 0$.

Fie x de forma e^{rt}. Avem $x = e^{rt} \Rightarrow x' = (e^{rt})' = e^{rt} \cdot r$

$$x'' = (e^{rt} \cdot r)' = (e^{rt})' \cdot r = e^{rt} \cdot r^2.$$

$$\Rightarrow e^{rt} \cdot r^2 - 5 \cdot e^{rt} \cdot r + 6 \cdot e^{rt} = 0 \quad | : e^{rt} \neq 0$$

$\Rightarrow r^2 - 5r + 6 = 0$ ecuație de gradul 2 cu necunoscuta r

de forma $ar^2 + br + c = 0$ $\quad a = 1$, $b = -5$, $c = 6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow r_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \text{ și } r_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$\Rightarrow x_0 = c_1 \cdot e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$$

Pentru rezolvarea ecuației neomogene $x'' - 5x' + 6x = e^{-2t}$ căutăm o soluție particulară x_p corespunzătoare termenului $f(t) = e^{-2t}$

În general $f(t) = e^{at}(Q(t)\cos bt + R(t)\cdot\sin bt)$

În cazul nostru $f(t) = e^{-2t}$

$\Rightarrow a = -2 \Rightarrow Q(t)\cdot\cos bt + R(t)\sin bt = 1 \Rightarrow b = 0$

$\Rightarrow Q(t) = 1$

Fiindcă $a + bi = -2$ nu este printre soluțiile r_1 și $r_2 \Rightarrow s = 0$.

Atunci $x_p = t^s \cdot e^{at}(S(t)\cos bt + T(t)\sin bt) = t^0 \cdot e^{-2t}\cdot S(t) = e^{-2t}\cdot A$

pt că $s = 0$ $a = -2$ $b = 0$

și $S(t)$ are același grad cu $Q(t)$

adică este o constantă A.

$\Longrightarrow \quad x_p = e^{-2t} \cdot A$ este forma soluției particulare.

Pentru a determina valoarea lui A înlocuim pe x_p în ecuația inițială: $\quad x_p'' - 5x_p' + 6x_p = e^{-2t}$

Dar $x_p' = (e^{-2t} \cdot A)' = A \cdot (e^{-2t})' = A \cdot e^{-2t} \cdot (-2t)' = A \cdot e^{-2t} \cdot -2 = -2A \cdot e^{-2t}$

$x_p'' = (x_p')' = (-2A \cdot e^{-2t})' = -2A(e^{-2t})' = -2Ae^{-2t} \cdot (-2) = 4Ae^{-2t}$

$\Longrightarrow \quad 4Ae^{-2t} - 5 \cdot (-2Ae^{-2t}) + 6 \cdot (e^{-2t} \cdot A) = e^{-2t} \quad \Big| : e^{-2t}$

$\Longrightarrow \quad 4A + 10A + 6A = 1$

$\Longrightarrow \quad 20A = 1 \quad \Longrightarrow A = \frac{1}{20} \quad \Longrightarrow \quad x_p = e^{-2t} \cdot \frac{1}{20}$

Soluția generală este $\quad x = x_0 + x_p = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} + \frac{1}{20} e^{-2t}$.

5. $\mathcal{L}\{(1-\cos 2t)\cdot(e^{-t}+t)\}(s) = ?$

Pentru a calcula transformata Laplace, desfacem parantezele:

$$\mathcal{L}\{e^{-t}+t-e^{-t}\cos 2t - t\cos 2t\}(s)$$

$$= \mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) + \mathcal{L}\{t\}(s) - \mathcal{L}\{e^{-t}\cdot\cos 2t\}(s) - \mathcal{L}\{t\cos 2t\}(s)$$

Avem $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a} \Longrightarrow \mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) = \frac{1}{s+1}$

$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \Longrightarrow \mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\left.\begin{aligned}&\mathcal{L}\{e^{at}\cdot f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a)\\&\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{at}\cos\omega t\}(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{e^{-t}\cdot\cos 2t\}(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

$$\mathcal{L}\{t\cdot f(t)\}(s) = -\left(\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\right)'$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{t\cos 2t\}(s) = -\left(\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s)\right)' = -\left(\frac{s}{s^2+4}\right)' = -\frac{s'\cdot(s^2+4)-s\cdot(s^2+4)'}{(s^2+4)^2}$$

$$= -\frac{s^2+4-s\cdot 2s}{(s^2+4)^2} = -\frac{4-s^2}{(s^2+4)^2} = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{(1-\cos 2t)(e^{-t}+t)\}(s)$$

$$= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{s+1}{(s+1)^2+4} - \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}.$$