

Curs 4

Serii Taylor

4.1 Formula lui Taylor

Notăm

$$C^n[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ este derivabilă pe } [a, b] \text{ și } f^{(n)} \text{ este continuă pe } [a, b] \right\}$$

Fiind dată o funcție $f \in C^n[a, b]$ și un punct $x_0 \in (a, b)$ se pune problema găsirii unui polinom de grad n , notat T_n , cu proprietatea că

$$T_n(x_0) = f(x_0), \quad T'_n(x_0) = f'(x_0), \quad \dots \quad T^{(n)}_n(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Cu ajutorul notației $M_n(x) = T_n(x + x_0)$, avem $M_n^{(k)}(0) = T_n^{(k)}(x_0)$. Rămâne să determinăm polinomul de grad n

$$M_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

care are proprietatea că $M_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)$, pentru orice $k = 0, 1, \dots, n$.

Prin înlocuire directă

$$a_0 = M_n(0) = f(x_0).$$

Prin derivare de k ori avem

$$M_n^{(k)}(0) = a_k k! + a_{k+1}(k+1)k \dots 2x + a_n n(n-1) \dots (n-k+1)x^{n-k} \Big|_{x=0} = a_k k!.$$

Așadar

$$M_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} x^k.$$

Atunci

$$T_n(x) = M_n(x - x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Dacă notăm $R_n(f, x_0, x) = f(x) - T_n(x)$, se obține **formula lui Taylor**

$$f(x) = T_n(x) + R_n(f, x_0, x).$$

Polinomul T_n se numește **polinomul lui Taylor**, iar funcția $R_n(f, x_0, x)$ se numește **restul din formula lui Taylor**.

Teoremă 4.1. Formula lui Taylor cu restul sub formă integrală

Fie $f \in C^{n+1}[a, b]$ și $x_0 \in (a, b)$. Pentru orice $x \in [a, b]$ avem

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Demonstrație. Demonstrăm prin inducție după n . Pentru $n = 0$ avem

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x_0) + \frac{1}{0!} \int_{x_0}^x (x - t)^0 f^{(1)}(t) dt.$$

Pentru a demonstra formula pentru $n + 1$ folosim formula de integrare prin părți.

$$\begin{aligned} R_n(f, x_0, x) &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \frac{1}{n!} \left(-\frac{(x - t)^{n+1}}{(n + 1)} f^{(n+1)}(t) \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^{n+1}}{n + 1} f^{(n+2)}(t) dt \right) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n + 1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt. \end{aligned}$$

Astfel

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(f, x_0, x) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} + R_{n+1}(f, x_0, x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n+1}(f, x_0, x). \end{aligned}$$

□

Teoremă 4.2. Formula lui Taylor cu restul sub formă de integrală multiplă

Fie $f \in C^{n+1}[a, b]$ și $x_0 \in (a, b)$. Pentru orice $x \in [a, b]$ avem

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_1} \cdots \int_{x_0}^{x_n} f^{(n+1)}(x_{n+1}) dx_{n+1} \cdots dx_2 dx_1.$$

Demonstrație. Demonstrăm prin inducție după n . Pentru $n = 0$ avem

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(x_1) dx_1.$$

Pentru a demonstra formula pentru $n + 1$, scriem

$$f^{(n+1)}(x_{n+1}) = f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x_{n+1}} f^{(n+2)}(x_{n+2}) dx_{n+2}.$$

Înlocuim în expresia restului

$$\begin{aligned} R_n(f, x_0, x) &= \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_1} \cdots \int_{x_0}^{x_n} f^{(n+1)}(x_{n+1}) dx_{n+1} \cdots dx_2 dx_1 \\ &= f^{(n+1)}(x_0) \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_1} \cdots \int_{x_0}^{x_n} dx_{n+1} \cdots dx_2 dx_1 \\ &\quad + \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_1} \cdots \int_{x_0}^{x_n} \int_{x_0}^{x_{n+1}} f^{(n+2)}(x_{n+2}) dx_{n+2} dx_{n+1} \cdots dx_2 dx_1. \end{aligned}$$

Pentru că

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_1} \cdots \int_{x_0}^{x_n} dx_{n+1} \cdots dx_2 dx_1 = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

se obține

$$R_n(f, x_0, x) = f^{(n+1)}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}(f, x_0, x).$$

□

Observație 4.3. Schimbând ordinea de integrare a integralelor pentru domeniul descris de $x_0 \leq x_{n+1} \leq x_n \leq \cdots \leq x_1 \leq x$, obținem

$$\begin{aligned} R_n(f, x_0, x) &= \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_1} \cdots \int_{x_0}^{x_n} f^{(n+1)}(x_{n+1}) dx_{n+1} \cdots dx_2 dx_1 \\ &= \int_{x_0}^x \int_{x_{n+1}}^x \cdots \int_{x_2}^x f^{(n+1)}(x_{n+1}) dx_1 \cdots dx_n dx_{n+1} \\ &= \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(x_{n+1}) \cdot \frac{(x - x_{n+1})^n}{n!} dx_{n+1}, \end{aligned}$$

care este forma integrală a restului din formula lui Taylor.

Teoremă 4.4. Formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange

Fie $f \in C^n[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $f^{(n)}$ este derivabilă pe (a, b) și fie $x_0 \in (a, b)$. Atunci, pentru orice $x \in [a, b]$ există un punct c între x și x_0 astfel încât

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Demonstrație. Dacă $x = x_0$ putem alege $c = x_0$ și formula lui Taylor este verificată. Fie $x \neq x_0$. Fie I intervalul închis care are capetele x și x_0 și fie funcția $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$F(t) = f(t) + (x - t)f'(t) + \cdots + \frac{(x - t)^n}{n!}f^{(n)}(t) + (x - t)^{n+1} \cdot K, \quad t \in I,$$

cu $K \in \mathbb{R}$ ales astfel încât $F(x) = F(x_0)$. Dar $F(x) = f(x)$, iar $F(x_0)$ se scrie în funcție de polinomul lui Taylor, $F(x_0) = T_n(x) + (x - x_0)^{n+1} \cdot K$, de unde obținem valoarea

$$K = \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}}.$$

Funcția F este continuă pe I și derivabilă pe I , exceptând poate punctul x . Calculând derivata funcției F , obținem

$$F'(t) = \frac{(x - t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) - (n+1)(x - t)^n \cdot K.$$

Pentru că $F(x) = F(x_0)$, putem aplica Teorema lui Rolle și deducem existența unui c între x și x_0 cu proprietatea că $F'(c) = 0$. Acest lucru este echivalent cu

$$(n+1)(x - c)^n \left(\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} - K \right) = 0,$$

adică

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = K = \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}},$$

ceea ce demonstrează formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange.

□

Observație 4.5. 1) Pentru $n = 0$ obținem Teorema de medie a lui Lagrange: pentru $f \in C[a, b]$, derivabilă pe (a, b) , există c între x și x_0 astfel încât

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0).$$

2) Dacă în demonstrația teoremei anterioare, se ia funcția $(x - x_0)^p$, cu $1 \leq p \leq n + 1$, ca și coeficient al lui K în definirea funcției F atunci se obține formula lui Taylor cu restul sub forma lui Schlömilch

$$f(x) = T_n(x) + \frac{(x - x_0)^p (x - c)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(c).$$

Teoremă 4.6. Formula lui Taylor cu restul sub forma lui Peano

Fie $x_0 \in (a, b)$ și $f \in C^{n-1}[a, b]$ o funcție care are derivată de ordin $n \geq 1$ finită în x_0 . Atunci, există o funcție continuă $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$ și

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n \cdot h(x),$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Demonstrație. Definim funcția $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ prin

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n / n!}, & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0. \end{cases}$$

Rămâne să demonstrăm că h este continuă în $x = x_0$. Aplicăm regula lui l'Hospital de $n - 1$ ori.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n / n!} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}}{(x - x_0)^{n-1} / (n-1)!} \\ &= \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0). \end{aligned}$$

Ținând cont de faptul că derivata de ordinul n a funcției f în $x = x_0$ este finită, scriem pe baza definiția derivatei de ordinul n

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Acest lucru demonstrează faptul că $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$. □

4.2 Dezvoltări în serie Taylor

Notăm

$$C^\infty[a, b] = \{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ este indefinit derivabilă pe } [a, b] \}.$$

Definiție 4.7. Fie $f \in C^\infty[a, b]$ și $x_0 \in (a, b)$. Seria

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

se numește **seria Taylor** a lui f în jurul punctului x_0 .

Definiție 4.8. O funcție $f \in C^\infty[a, b]$ se numește **dezvoltabilă în serie Taylor** în $x_0 \in (a, b)$ dacă există $r > 0$ încât $a < x_0 - r < x_0 + r < b$ și

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \text{ pentru orice } x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

O funcție f se numește **dezvoltabilă în serie Maclaurin** dacă f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul lui $x_0 = 0$.

O funcție f se numește **analitică** pe intervalul deschis (c, d) dacă f este dezvoltabilă în serie Taylor în fiecare punct al intervalului (c, d) .

Exemplu 4.9. Fie $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ o serie de puteri care este convergentă pentru $x \in (-R, R)$, unde $R > 0$. Atunci S este dezvoltabilă în serie Taylor în $x = 0$, pentru că avem $S \in C^\infty(-R, R)$ și

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Dar nu orice funcție indefinit derivabilă este dezvoltabilă în serie Taylor. Considerăm funcția

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x \in [-1, 0] \end{cases}$$

Funcția g este indefinit derivabilă pe $[-1, 1]$ și $g^{(n)}(0) = 0$, $n \geq 0$. Într-adevăr, pentru $x < 0$, $g^{(n)}(x) = 0$, iar pentru $x > 0$, $g^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)$, unde $P_{2n}(t)$ este polinomul de gradul $2n$ definit prin relația de recurență $P_{2n+2}(t) = t^2[P_{2n}(t) - P'_{2n}(t)]$, $P_0(t) = 1$. Acest lucru rezultă din relația

$$g^{(n+1)}(x) = \left(e^{-\frac{1}{x}} P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} \cdot P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) - e^{-\frac{1}{x}} P'_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2}.$$

Avem $g^{(n+1)}(0-) = 0$ și prin inducție

$$g^{(n+1)}(0+) = \lim_{x \searrow 0} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t P_{2n}(t)}{e^t} = 0.$$

Seria Taylor atașată funcției g în jurul lui $x = 0$ este funcția nulă. Dar $g \neq 0$ pe orice interval deschis care conține originea. Așadar, g nu este dezvoltabilă în serie Taylor în $x = 0$.

Teoremă 4.10. Teorema lui Taylor

Fie $f \in C^\infty[a, b]$ și $x_0 \in (a, b)$. Dacă există $M > 0$ astfel încât $|f^{(n)}(x)| \leq M$, pentru orice $n \geq 0$ și orice $x \in [a, b]$ atunci seria Taylor a lui f în jurul lui x_0 este convergentă la $f(x)$.

Demonstrație. Suma parțială de ordinul n a seriei Taylor este $T_n(f, x_0, x)$ polinomul lui Taylor de ordinul n atașat funcției f în x_0 :

$$T_n(f, x_0, x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Pe baza formulei lui Taylor cu restul Lagrange avem $f(x) - T_n(f, x_0, x) = R_n(f, x_0, x)$. Seria Taylor este convergentă la $f(x)$ dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, x_0, x) = 0.$$

Conform ipotezei are loc inegalitatea

$$|R_n(f, x_0, x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)| |x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Să observăm că seria $\sum_{n \geq 0} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ este convergentă. Într-adevăr, aplicăm criteriul raportului pentru $a_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ și avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n+2} = 0 < 1.$$

Dacă seria $\sum_{n \geq 0} a_n$ este convergentă, atunci termenul general a_n converge la 0. Din inegalitatea

$$|f(x) - T_n(f, x_0, x)| \leq M a_n, \quad x \in [a, b], n \geq 0,$$

rezultă că $T_n(x)$ converge la $f(x)$, pentru orice $x \in [a, b]$. □

Observație 4.11. Teorema anterioară ne asigură că orice funcție infinit derivabilă care are derivate mărginite în vecinătatea unui punct, este dezvoltabilă în serie Taylor în acel punct. Dar condiția asupra mărginirii derivatelor poate fi înlocuită cu următoarea condiție

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \cdot \frac{n!}{C^n}, \quad \text{pentru orice } x \in [a, b] \text{ și orice } n \geq 0,$$

unde M și C sunt constante pozitive. Într-adevăr, alegând x astfel încât $|x - x_0| < C$ rezultă că $|R_n(f, x_0, x)| \leq M \left(\frac{|x-x_0|}{C}\right)^{n+1}$ și deci restul R_n converge la zero pentru x din intervalul $(x_0 - C, x_0 + C)$. Rezultă că f este dezvoltabilă în serie Taylor în x_0 .

Exemplu 4.12. Seria Maclaurin a funcției exponențiale numită *seria exponențială* este

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Într-adevăr, pentru $f(x) = e^x$, derivatele sunt $f^{(n)}(x) = e^x$, care sunt funcții mărginite într-un interval deschis care conține pe 0 (de exemplu intervalul $(-1, 1)$). În plus, avem $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Atunci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Raza de convergență a seriei exponențiale este

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n + 1 = +\infty,$$

ceea ce arată că seria este convergentă peste tot pe $\mathbb{R}$.

Observație 4.13. Utilizând seria exponențială obținem

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplu 4.14. Funcțiile trigonometrice se dezvoltă în serie Maclaurin astfel

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aceste dezvoltări sunt adevărate pentru că derivatele funcțiilor trigonometrice

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{și} \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

sunt funcții mărginite în orice interval care conține punctul zero. Aceste formule pentru derivate se demonstrează inductiv folosind relațiile

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{și} \quad (\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Valorile derivatelor de ordin superior în origine sunt

$$(\sin x)^{(n)} \Big|_{x=0} = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^k, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

și

$$(\cos x)^{(n)} \Big|_{x=0} = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k \\ 0, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

Observație 4.15. Să observăm că

$$\cos x + i \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$$

ceea ce se poate exprima cu ajutorul funcției exponențiale

$$\cos x + i \sin x = e^{ix}.$$

Cu ajutorul acestei relații se poate defini funcția exponențială în $\mathbb{C}$

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Mulți autori definesc funcția exponențială în $\mathbb{C}$ (sau $\mathbb{R}$) ca fiind seria

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

și cu ajutorul proprietăților seriilor de puteri stabilesc proprietățile funcției exponențiale.

Exemplu 4.16. Plecând de la *seria geometrică*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

obținem

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

care prin integrare ne dă *seria logaritmică*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

Exemplu 4.17. Pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ și $x \in (-1, 1)$ seria

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

se numește *seria binomială*, iar $\binom{\alpha}{n}$ se numesc coeficienți binomiali. Au loc formulele $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$, pentru $n \geq 1$ și $\binom{\alpha}{0} = 1$.

Plecând de la funcția $f(x) = (1+x)^\alpha$ și derivând de n ori avem

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Fie $x \in (-r, r)$, $r \in (0, 1)$. Pentru $0 \leq \alpha < n$ rezultă inegalitatea

$$f^{(n)}(x) < n!(1-r)^{\alpha-n} = (1-r)^\alpha \cdot \frac{n!}{(1-r)^n}$$

iar pentru $\alpha \geq n$ obținem

$$f^{(n)}(x) \leq n!(1+\alpha-n)^n(1+r)^{\alpha-n} \leq (1+r)^\alpha \frac{n!}{\left(\frac{1+r}{1+\alpha}\right)^n}.$$

Dacă $\alpha \in (-1, 0)$ atunci

$$\left| f^{(n)}(x) \right| = |\alpha|(|\alpha| + 1) \dots (|\alpha| + n - 1)(1 + x)^{\alpha - n} < (1 - r)^\alpha \cdot \frac{n!}{(1 - r)^n},$$

iar dacă $\alpha \leq -1$ atunci

$$\left| f^{(n)}(x) \right| = |\alpha|(|\alpha| + 1) \dots (|\alpha| + n - 1)(1 + x)^{\alpha - n} < (1 - r)^\alpha \cdot \frac{n!}{\left(\frac{1-r}{|\alpha|}\right)^n},$$

ceea ce demonstrează că f este dezvoltabilă în serie Maclaurin.

4.3 Aplicații ale seriilor de puteri

4.3.1 Aproximarea locală a funcțiilor

Polinoamele lui Taylor aproximează funcția oricât de bine în jurul punctului în care se face dezvoltarea.

Polinomul lui Taylor de gradul întâi este

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

care reprezintă ecuația dreptei tangente. Această ecuație reprezintă aproximația liniară a funcției f în jurul punctului x_0 . Această dreaptă ia în considerare valoarea funcției f în x_0 și ține cont și de monotonia funcției.

Cu cât gradul polinomului crește cu atât aproximarea este mai bună.

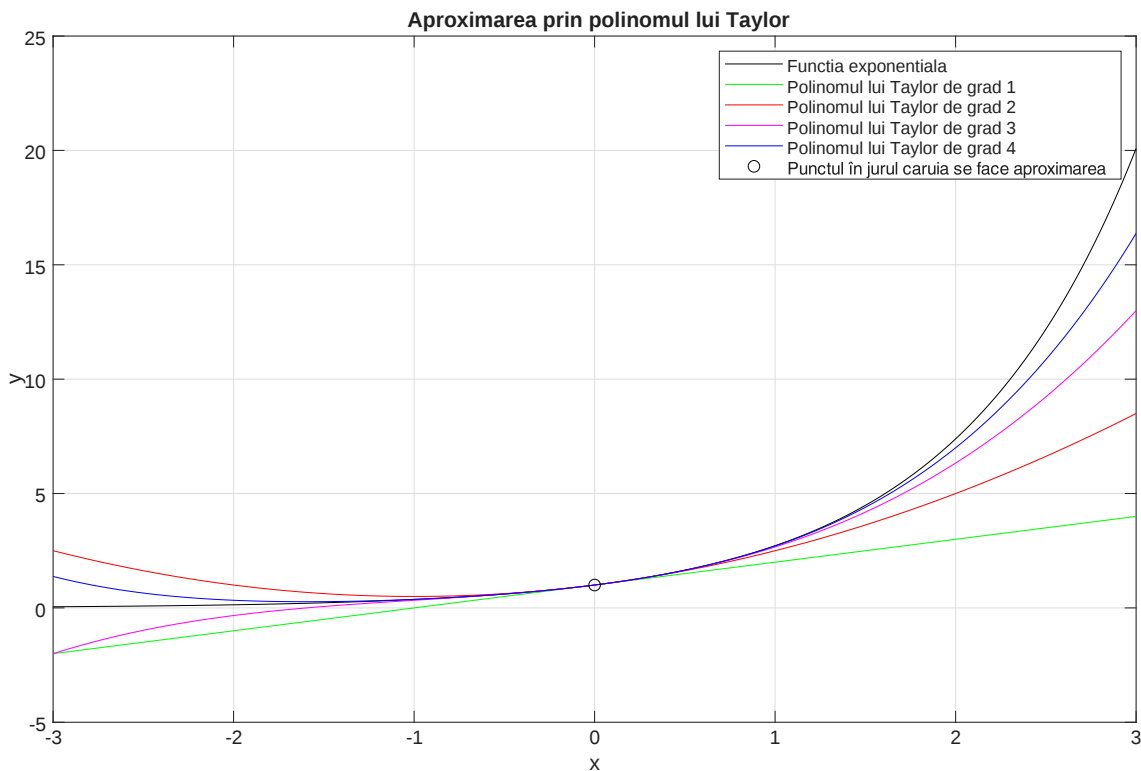


Figura 4.1: Aproximarea unei funcții prin polinoame Taylor

4.3.2 Definirea unor noi funcții în matematică

Mulți autori definesc funcția exponențială în complex prin

$$\exp(z) = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

și deduc toate proprietățile ei, plecând de la proprietățile acestei serii de puteri.

Funcțiile lui Bessel de speța întâi și ordin k se definesc prin

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ele verifică proprietatea $x^2 J_k''(x) + x J_k'(x) + (x^2 - k^2) J_k(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

4.3.3 Calculul unor limite

Exemplu 4.18.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Exemplu 4.19. Pentru $f \in C^3[-1, 1]$ cu proprietatea că $f'(0) \neq 0$, să calculăm

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} \left(\frac{f'(a) \cdot f'(-a)}{\left(\frac{f(a) - f(-a)}{2a}\right)^2} - 1 \right)$$

Avem

$$\begin{aligned} f(a) &= f(0) + af'(0) + \frac{a^2}{2} f''(0) + \frac{a^3}{6} f'''(b), \quad b \in (-|a|, |a|) \\ f(-a) &= f(0) - af'(0) + \frac{a^2}{2} f''(0) - \frac{a^3}{6} f'''(c), \quad c \in (-|a|, |a|) \\ f'(a) &= f'(0) + af''(0) + \frac{a^2}{2} f'''(d), \quad d \in (-|a|, |a|) \\ f'(-a) &= f'(0) - af''(0) + \frac{a^2}{2} f'''(e), \quad e \in (-|a|, |a|). \end{aligned}$$

Atunci

$$f'(a) \cdot f'(-a) = \left[f'(0) + af''(0) + \frac{a^2}{2} f'''(d) \right] \cdot \left[f'(0) - af''(0) + \frac{a^2}{2} f'''(e) \right]$$

și

$$\left(\frac{f(a) - f(-a)}{2a} \right)^2 = \left(f'(0) + \frac{a^2}{12} f'''(b) + \frac{a^2}{12} f'''(c) \right)^2.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} f'(a) \cdot f'(-a) - \left(\frac{f(a) - f(-a)}{2a} \right)^2 \\ = a^2 \left(\frac{1}{2} f'(0) f'''(e) - [f''(0)]^2 + \frac{1}{2} f'(0) f'''(d) - \frac{1}{6} f'(0) [f'''(b) + f'''(c)] \right) \end{aligned}$$

Fiindcă f''' este continuă în $x = 0$ rezultă

$$\lim_{a \rightarrow 0} f'''(b) = f'''(0) = \lim_{a \rightarrow 0} f'''(c) = \lim_{a \rightarrow 0} f'''(d) = \lim_{a \rightarrow 0} f'''(e).$$

În concluzie

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} \cdot \frac{f'(a) \cdot f'(-a) - \left(\frac{f(a) - f(-a)}{2a} \right)^2}{\left(\frac{f(a) - f(-a)}{2a} \right)^2} = \frac{\frac{2}{3} f'(0) f'''(0) - [f''(0)]^2}{[f'(0)]^2}$$

4.3.4 Calculul unor derivate

Exemplu 4.20. Să se calculeze $f^{(15)}(0)$ unde $f(x) = x \cdot \sin(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Dezvoltând în serie Maclaurin funcția f obținem

$$f(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+3}.$$

Pe baza teoremei lui Taylor

$$f^{(15)}(0) = 15! \cdot \text{coeficientul lui } x^{15} \text{ din seria Maclaurin} = 15! \cdot \frac{(-1)^3}{7!} = -\frac{15!}{7!}.$$

Exemplu 4.21. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^{(4)}.$$

Notând $f(x) = \frac{x}{\sin x}$, pentru $x \neq 0$ și $f(0) = 0$, avem de calculat $f^{(4)}(0)$.

Primii termeni din seria Taylor pentru f se obțin folosind seria geometrică

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots} \\ &= \frac{1}{1 - x^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} + \dots \right)} \\ &= 1 + x^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} + \dots \right) + x^4 \left(\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} + \dots \right)^2 + \dots \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} + x^4 \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{120} \right) + \dots \end{aligned}$$

Înseamnă că $f^{(4)}(0) = 4! \cdot \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{120} \right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$.

4.3.5 Aproximări numerice ale unor funcții

Exemplu 4.22. Să calculăm $e^{0.63}$ cu două zecimale exacte.

Fie $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Avem de calculat $f(0.63)$. Scriem formula lui Taylor cu restul Lagrange pentru $f(x) = e^x$ în jurul originii:

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}e^c}{(n+1)!}.$$

Pentru $x = 0.63$ aproximăm pe $f(x)$ cu polinomul lui Taylor T_n de grad n . Trebuie să vedem care este valoarea minimă a lui n astfel încât restul să fie mai mic decât 0.005.

Dar $e^c < e^{0.63} < e < 3$ și $0.63 \cdot 3 = 1.89 < 2$. Rămâne $\frac{2}{(n+1)!} < \frac{1}{200}$, adică $(n+1)! > 400$, adevărată pentru $n \geq 5$. Inegalitatea este adevărată și pentru $n = 4$. Să observăm că $0.63 \cdot 0.63 = 0.3969$ și $0.63^4 < 0.4^2 = 0.16$. Astfel, obținem

$$\frac{x^{n+1}e^c}{(n+1)!} = \frac{0.63^5 e^c}{5!} < \frac{0.16 \cdot 2}{120} < \frac{0.4}{120} = \frac{1}{300} < \frac{1}{200}.$$

Acest lucru înseamnă că T_4 are cel puțin două zecimale exacte. Dar

$T_4 = 1 + 0.63 + \frac{0.63^2}{2} + \frac{0.63^3}{6} + \frac{0.63^4}{24} < 1.63 + 0.2 + \frac{0.63 \cdot 0.4}{6} + \frac{0.16}{24} < 1.83 + 0.042 + 0.007 = 1.879$ și $T_4 > 1.63 + 0.198 + \frac{0.63 \cdot 0.396}{6} + \frac{0.396^2}{24} = 1.828 + 0.21 \cdot 0.198 + 0.066 \cdot 0.099 > 1.828 + 0.041 + 0.006 = 1.875$.

Înseamnă că $e^{0.63} = 1.87 \dots$

Exemplu 4.23. Să calculăm $\sqrt{102}$ cu 5 zecimale exacte.

Vom scrie

$$\sqrt{102} = \sqrt{100(1 + 2 \cdot 0.01)} = 10 \cdot (1 + 2 \cdot 0.01)^{\frac{1}{2}}.$$

Folosim dezvoltarea

$$(1 + 2x)^{\frac{1}{2}} = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{5x^4}{8} + \frac{7x^5}{8} - \dots$$

pentru $x = 0.01$. Fiindcă $0.01^3/2 = 0.0000005$ înseamnă că

$$\sqrt{102} = 10 \cdot (1 + 2 \cdot 0.01)^{\frac{1}{2}} \approx 10 + 10x - 5x^2 = 10.1 - 0.0005 = 10.09950$$

este o aproximare cu 5 zecimale exacte.

4.3.6 Aproximări ale unor formule din fizică

Exemplu 4.24. Energia cinetică relativistă are formula

$$E_k = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right),$$

unde v este viteza, m masa, iar c viteza luminii.

Folosind seria binomială pentru $\alpha = -1/2$ se obține

$$E_k = mc^2 \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \frac{v^{2n}}{c^{2n}} = mc^2 \left(\frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} + \dots \right) = \frac{mv^2}{2} + \frac{3mv^4}{8c^2} + \dots$$

Pentru viteze v mici, energia cinetică se poate aproxima prin $E_k = \frac{mv^2}{2}$.

4.3.7 Studiarea șirurilor recurente

O metodă foarte folosită în combinatorică este atașarea unei funcții generatoare pentru un șir de numere dat.

Exemplu 4.25. Șirul lui Fibonacci verifică relația de recurență

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geq 0, \quad \text{unde } F_0 = 1 \text{ și } F_1 = 1.$$

Fie funcția $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$. Atunci

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 + x + \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2} x^{n+2} = 1 + x + \sum_{n=0}^{\infty} (F_{n+1} + F_n) x^{n+2} \\ &= 1 + x + x \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^{n+1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\ &= 1 + x + x(F(x) - 1) + x^2 F(x). \end{aligned}$$

Adică

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{A}{x_1 - x} + \frac{B}{x_2 - x}$$

unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 + x - 1 = 0$. Avem $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ și $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ și $A = \frac{-1}{x_2 - x_1} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ și $B = \frac{-1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Folosind seria geometrică, obținem

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A}{x_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{B}{x_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}} = \frac{A}{x_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \frac{B}{x_2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{A}{x_1^{n+1}} + \frac{B}{x_2^{n+1}} \right] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Ax_2^{n+1} + Bx_1^{n+1}}{(x_1 x_2)^{n+1}} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Ax_2^{n+1} + Bx_1^{n+1}}{(-1)^{n+1}} \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [B(-x_1)^{n+1} - B(-x_2)^{n+1}] x^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right] x^n. \end{aligned}$$

Am obținut termenul general

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right], \quad n \geq 0.$$

4.4 Bibliografie

1. I. Gavrea, Analiză matematică, Mediamira, 2004.
2. A. Ciupa, Analiză matematică, Mediamira, 1996.
3. R. Bartle, D. Sherbert, Introduction to Real Analysis, John Wiley & Sons, Inc., 2000.
4. O. Stănășilă, Analiză matematică, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.