

Seminar 6

Serii Taylor

Probleme rezolvate

Problema 6.1. Să se arate că niciun coeficient din dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln(1-x), & x \neq 0, \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

în jurul punctului $x_0 = 0$ nu este negativ. Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x)$.

Avem

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln(1-x) &= \left(1 - \frac{2}{x}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x)^n = \left(\frac{2}{x} - 1\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2x^m}{m+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}\right) x^n = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n(n+1)} \cdot x^n. \end{aligned}$$

Din această dezvoltare,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = 2! \cdot a_2 = 2 \cdot \frac{2-1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

Problema 6.2. Să se dezvolte în serie Taylor $f(x) = e^x \cos x$ în jurul punctului $x_0 = 0$ și apoi să se calculeze $f^{(20)}(0)$.

Fiindcă $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ obținem $f(x) = \frac{1}{2} [e^{x(1+i)} + e^{x(1-i)}]$. Folosind seria exponențială

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (1+i)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (1-i)^n}{n!} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} [(1+i)^n + (1-i)^n].$$

Dar $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$. Atunci $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$. Pentru că $1-i$ este conjugatul lui $1+i$ rezultă $(1-i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$. Obținem $(1+i)^n + (1-i)^n = 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \cos \frac{n\pi}{4}$. În final,

$$e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \cos \frac{n\pi}{4}}{n!} \cdot x^n, \quad x \in \mathbb{C} \Rightarrow f^{(20)}(0) = 20! \cdot a_{20} = 2^{10} \cdot \cos(5\pi) = -1024.$$

Problema 6.3. Să se dezvolte în serie Taylor $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ în jurul punctului $x_0 = 1$.

Folosim descompunerea

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{(x - i)(x + i)} = \frac{A}{x - i} + \frac{B}{x + i},$$

cu $A = \frac{1}{2i}$ și $B = -\frac{1}{2i}$. Cu schimbarea de variabilă $x - 1 = t$ obținem

$$\frac{A}{x - i} = \frac{A}{t + 1 - i} = \frac{A}{1 - i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{t}{1-i}} = \frac{A}{1 - i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{1-i} \right)^n = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-i)^{n+1}} (x-1)^n.$$

La fel

$$\frac{B}{x + i} = B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} (x-1)^n.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \frac{A}{x-i} + \frac{B}{x+i} &= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \frac{(1+i)^{n+1} - (1-i)^{n+1}}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \frac{2i \sin \frac{(n+1)\pi}{4}}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{(n+1)\pi}{4}}{2^{n+1}} (x-1)^n. \end{aligned}$$

Discul de convergență este dat de inegalitatea $\left| \frac{-t}{1-i} \right| < 1$, adică $|x-1| < \sqrt{2}$.

Problema 6.4. Să se dezvolte în serie Taylor $f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{1+x^2}$ în jurul punctului $x_0 = 0$.

Vom folosi produsul a două serii.

$$f(x) = \operatorname{sh} x \cdot \frac{1}{1+x^2} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \sum_{m+k=n} \frac{(-1)^k}{(2m)!}.$$

Eliminând indicele k rezultă

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m}}{(2m)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{(2m)!}.$$

Problema 6.5. Să se determine primii 6 coeficienți din seria Taylor în jurul punctului $x = 0$ a funcției

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Fie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dezvoltarea în serie Maclaurin a funcției f . Observăm că $f(-x) = f(x)$. Derivând de $2k+1$ ori obținem $(-1)^{2k+1} f^{(2k+1)}(-x) = f^{(2k+1)}(x)$. Pentru $x = 0$, obținem $f^{(2k+1)}(0) = 0$. Atunci $a_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = 0$. Înseamnă că $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m}$. Atunci

$$f(x) \cdot \sin x = \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n+1}$$

unde $c_n = \sum_{m+k=n} a_{2m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$.

Dar $x = \sin x \cdot f(x)$, ceea ce arată că $c_0 = 1$ și $c_n = 0$, pentru $n \geq 1$. Pe de altă parte,

$$c_0 = a_0 \cdot \frac{1}{1!} \Rightarrow a_0 = 1.$$

Apoi

$$0 = c_1 = a_0 \cdot \frac{-1}{3!} + a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{6}$$

Continuând

$$0 = c_2 = a_0 \cdot \frac{1}{5!} + a_2 \cdot \frac{-1}{3!} + a_4 \Rightarrow a_4 = a_2 \cdot \frac{1}{6} - a_0 \cdot \frac{1}{120} = \frac{1}{36} - \frac{1}{120} = \frac{7}{360}.$$

Astfel

$$f(x) = 1 + 0 \cdot x + \frac{1}{6} \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \frac{7}{360} \cdot x^4 + 0 \cdot x^5 + \dots = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \dots$$