

Curs 1

Integrala Riemann

1.1 Primitive

Definiție 1.1. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Funcția $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **primitivă** a funcției f dacă F este derivabilă pe $[a, b]$ și

$$F'(x) = f(x), \quad \text{pentru orice } x \in [a, b].$$

Notăție 1.2. Mulțimea primitivelor unei funcții date f se numește **integrală nedefinită** și se notează $\int f(x) dx$. Așadar, avem formula generală

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

unde C este o constantă oarecare.

Redăm mai jos, un tabel cu primitivele uzuale.

$\int t^a dt = \frac{t^{a+1}}{a+1} + C,$	$a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, t \in I \subset (0, \infty)$
$\int \frac{1}{t} dt = \ln t + C,$	$t \in I \subset \mathbb{R}^*$
$\int a^t dt = \frac{a^t}{\ln a} + C,$	$a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, t \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} + C,$	$a \neq 0, t \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{t^2 - a^2} dt = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{t-a}{t+a} \right + C,$	$a \neq 0, t \in I \subset \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$
$\int \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} dt = \ln \left(t + \sqrt{t^2 + a^2} \right) + C,$	$a \neq 0, t \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\sqrt{t^2 - a^2}} dt = \ln \left t + \sqrt{t^2 - a^2} \right + C,$	$a > 0, t \in I \subset \mathbb{R} \setminus [-a, a]$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt = \arcsin \frac{t}{a} + C,$	$a > 0, t \in I \subset (-a, a)$
$\int \sin t dt = -\cos t + C,$	$t \in \mathbb{R}$
$\int \cos t dt = \sin t + C,$	$t \in \mathbb{R}.$

1.2 Integrala Riemann

Definiție 1.3. O funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **integrabilă (Riemann)** dacă există un număr real $I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice diviziune a intervalului $[a, b]$

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad \text{cu proprietatea că} \quad \max_{k \in \{1, 2, \dots, n\}} (x_k - x_{k-1}) < \delta$$

și pentru orice alegere a punctelor intermediare $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$ să avem

$$\left| I - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon.$$

Notăție 1.4. Dacă numărul I din definiția unei funcții integrabile există atunci el este unic și se numește **integrala Riemann** a funcției f pe intervalul $[a, b]$ și se notează $\int_a^b f(x) dx$. Pentru o funcție pozitivă f , acest număr I reprezintă aria de sub graficul funcției f cuprins între dreptele $x = a$ și $x = b$ și axa OX .

Exemplu 1.5. Funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ este integrabilă și $\int_a^b dx = b - a$.

Într-adevăr, pentru orice diviziune și orice puncte intermediare suma Riemann este

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

Funcția lui Dirichlet, $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nu este integrabilă. Într-adevăr, pentru orice diviziune $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$ și punctele intermediare $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \cap \mathbb{Q}$ suma Riemann este

$$\sum_{k=1}^n g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = 1,$$

iar pentru punctele intermediare $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k] \setminus \mathbb{Q}$ suma Riemann este

$$\sum_{k=1}^n g(\eta_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0.$$

Propoziție 1.6. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ atunci f este mărginită pe $[a, b]$.

Propoziție 1.7. Dacă f este continuă pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Propoziție 1.8. Dacă f este monotonă pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Definiție 1.9. O mulțime $M \subset [a, b]$ are lungime zero dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există intervalele $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots$ astfel încât

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \quad \text{și} \quad \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \varepsilon.$$

Propoziție 1.10. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită pe $[a, b]$ și fie $M \subset [a, b]$ o mulțime de lungime zero. Dacă f este continuă pe $[a, b] \setminus M$, atunci f este integrabilă.

Proprietăți ale integralei Riemann

1) Dacă f și g sunt integrabile pe $[a, b]$ și $c, d \in \mathbb{R}$ atunci $cf + dg$ este integrabilă pe $[a, b]$ și

$$\int_a^b [cf(x) + dg(x)] dx = c \int_a^b f(x) dx + d \int_a^b g(x) dx.$$

2) Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ și $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$ atunci

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

3) Dacă f este continuă pe $[a, b]$ atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a).$$

4) Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$, $a < b$, atunci prin definiție

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

5) Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ și $c \in (a, b)$ atunci f este integrabilă pe $[a, c]$ și pe $[c, b]$ și

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Calculul integralei Riemann

Teoremă 1.11 (Leibniz-Newton). Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe $[a, b]$ și $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a lui f . Atunci

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Observație 1.12. Nu orice funcție integrabilă are primitive. De exemplu, funcția semn $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sgn}(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Funcția f este mărginită și are un punct de discontinuitate de prima speță. Ea este integrabilă, dar nu are primitive, pentru că nu are proprietatea lui Darboux.

Nu orice funcție care admite primitive este integrabilă. De exemplu, $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este o primitivă pentru funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Dar f nu este integrabilă pentru că nu este mărginită.

Teoremă 1.13 (Integrarea prin părți). Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funcții integrabile pe $[a, b]$ și derivabile astfel încât f' și g' sunt integrabile pe $[a, b]$. Atunci

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Teoremă 1.14 (Prima metodă de schimbare de variabilă). Fie $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu derivata continuă pe $[c, d]$. Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă și mulțimea valorilor lui φ este inclusă în $[a, b]$, $\varphi([c, d]) \subset [a, b]$, atunci

$$\int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x) dx.$$

Teoremă 1.15 (A doua metodă de schimbare de variabilă). Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ o funcție bijectivă astfel încât φ și φ^{-1} sunt de clasă C^1 , iar $\varphi'(t) \neq 0$ pe $[c, d]$. Atunci

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Exemplu 1.16. Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right).$$

Fie $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$. Fie $x_k = \frac{k}{n}$ punctele diviziunii echidistante a intervalului $[0, 1]$

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \cdots < x_n = \frac{n}{n} = 1.$$

Alegem punctele intermediare $\xi_k = \frac{k}{n} \in [x_{k-1}, x_k]$. Fie funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Atunci S_n se poate scrie ca o sumă Riemann

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Fiindcă f este continuă pe $[0, 1]$ ea este integrabilă pe $[0, 1]$. Va rezulta că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2.$$

Exemplu 1.17. Să se calculeze $\int_1^e \ln x dx$.

Folosim integrarea prin părți.

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x dx &= \int_1^e x' \cdot \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot (\ln x)' dx \\ &= e \ln e - \ln 1 - \int_1^e dx = e - x \Big|_1^e = e - (e - 1) = 1. \end{aligned}$$

Exemplu 1.18. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x}{x^4+1} dx$.

Folosim schimbarea de variabilă $x^2 = t$. Diferențiind se obține $2x dx = dt$. Pentru $x = 0$ avem $t = 0$, iar pentru $x = 1$ rezultă $t = 1$. Cu acestea

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x dx}{(x^2)^2+1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} \arctg t \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \arctg 1 = \frac{\pi}{8}.$$