

Notiuni de optimizare staționară

Control optimal
Master CAP / Master ICAF

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

- 1 Problema de optimizare
- 2 Probleme de optimizare fără restricții
- 3 Probleme de optimizare cu restricții
- 4 Alte subiecte de revăzut

Problema de optimizare staționară

1 $\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$

2 în raport cu setul de variabile independente $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$

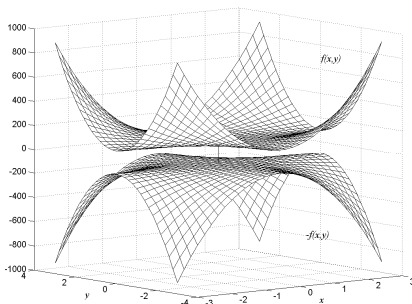
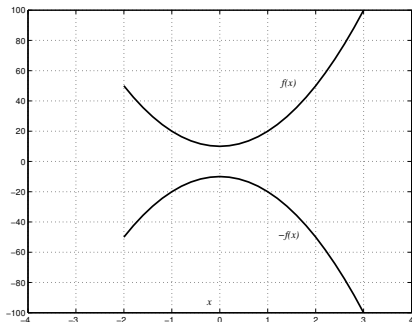
3 cu restricțiile de tip egalitate: $h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad m < n$

4 cu restricțiile de tip inegalitate: $g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = \overline{1, p}$

Problema de maxim și problema de minim

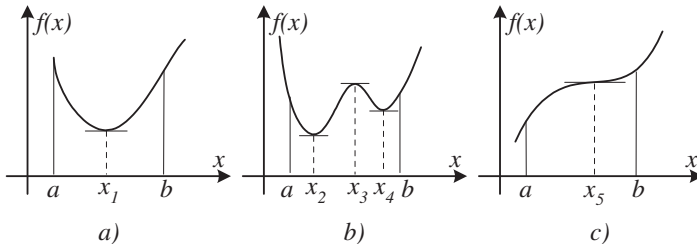
- Transformarea unei probleme de minim într-o problemă de maxim se poate face inversând semnul funcției obiectiv:

$$\arg \min_{\mathbf{x}} (f(\mathbf{x})) = \arg \max_{\mathbf{x}} (-f(\mathbf{x}))$$



Teorema lui Weierstrass

Dacă o funcție $f(x)$ este continuă pe un interval închis $[a, b]$, atunci $f(x)$ are un maxim și un minim în $[a, b]$. Dacă $f(x)$ are un extrem într-un interval deschis (a, b) atunci extremul este localizat într-un punct critic.



Optimizare fără restricții. Condiții necesare. Condiții suficiente

Condiții necesare

Puncte critice (staționare):

- pentru funcții de o variabilă: prima derivata a lui $f(x)$ este zero : $f'(x_0) = 0$
- pentru funcții de n variabile: gradientul este zero : $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T$$

Condiții suficiente pentru funcții de o singură variabilă

- Dacă $f''(x_0) < 0$, atunci x_0 este un punct de **maxim** local.
- Dacă $f''(x_0) > 0$, then x_0 este un punct de **minim** local.
- Dacă $f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ și:
 - Dacă k este par
 - Dacă $f^{(k)}(x_0) < 0$, atunci x_0 este un punct de **maxim** local.
 - Dacă $f^{(k)}(x_0) > 0$, atunci x_0 este un punct de **minim** local.
 - Dacă k este impar, atunci x_0 este un punct de **inflexiune**.

Exemplu

- Se caută extremele locale ale funcției

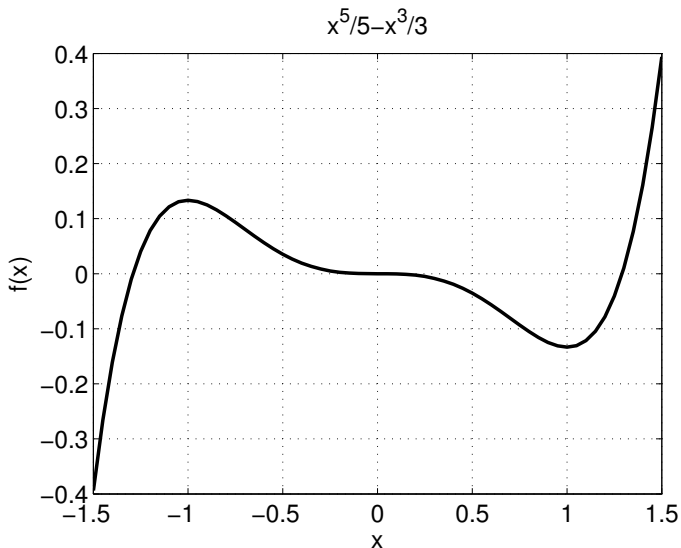
$$f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$$

- Punctele staționare se calculează egalând prima derivată cu zero:

$$f'(x) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x - 1)(x + 1) \quad x_1 = 1; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = x_4 = 0$$

- Tipul extremelor se evaluează din derivata a doua: $f''(x) = 4x^3 - 2x$
- $f''(1) = 2 \Rightarrow x_1 = 1$ este minim local
- $f''(-1) = -2 \Rightarrow x_2 = -1$ este maxim local
- $f''(0) = 0 \Rightarrow f'''(x) = 12x^2 - 2 \quad f'''(0) = -2 \neq 0$. Ordinul derivatei $k = 3$ (impar) $\Rightarrow x_{3,4} = 0$ sunt puncte de inflexiune.

Exemplu



Condiții suficiente pentru funcții de n variabile

Pentru funcția $f(\mathbf{x})$, matricea Hessian:

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Un punct staționar $\mathbf{x}_0$:

- Dacă $\mathbf{H}_2$ este pozitiv definită $\mathbf{x}_0$ este un **minim local** pentru f .
- Dacă $\mathbf{H}_2$ este negativ definită $\mathbf{x}_0$ este un **maxim local** pentru f .
- If $\mathbf{H}_2$ are unele valori proprii negative și altele pozitive $\mathbf{x}_0$ este **șa**
- altfel, testul nu e concludent.

Obs: dacă matricea hessian este pozitiv semidefinită sau negativ semidefinită, testul este de asemenea neconcludent.

Exemplu

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^4 - 2$$

- Puncte staționare: $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2^3 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (0, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

- Hessian:

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_1x_2} & f_{x_2x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 12x_2^2 \end{bmatrix}$$

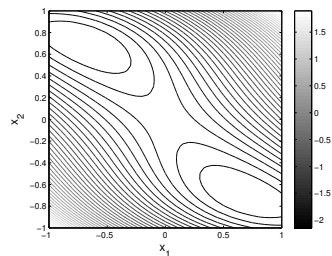
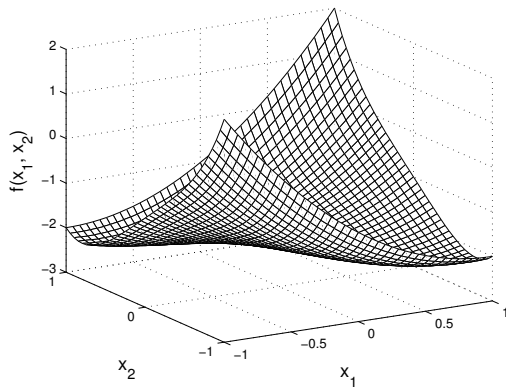
- $(x_{10}, x_{20}) = (0, 0)$ este **șa** pentru că:

$$\mathbf{H}_2(x_{10}, x_{20}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -1.23 < 0, \quad \lambda_2 = 3.23 > 0$$

- $(x_{10}, x_{20}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ și $(x_{10}, x_{20}) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ sunt **minime locale** pentru că pentru ambele puncte:

$$\mathbf{H}_2(x_{10}, x_{20}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 1.17 > 0, \quad \lambda_2 = 6.82 > 0, \quad \mathbf{H}_2 \text{ pozitiv definită}$$

Exemplu



Problema generală de optimizare cu restricții

O problemă tipică se formulează:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

cu restricțiile

$$g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = \overline{1, m}$$

$$h_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = \overline{1, p}$$

unde $\mathbf{x}$ este un vector de n variabile independente $[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$, iar f , g_i și h_j sunt funcții scalare de n variabile.

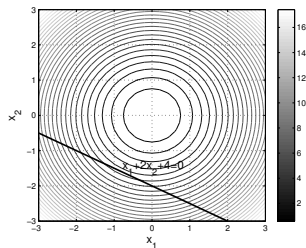
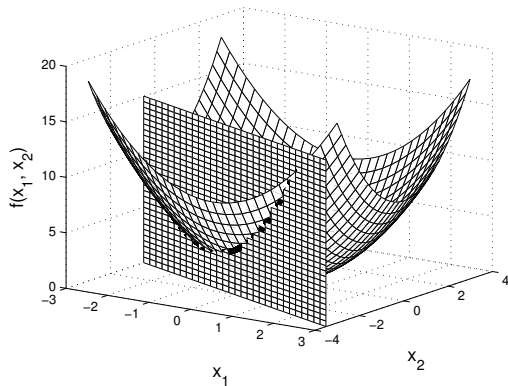
Exemplu 1

Minimizați

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

cu restricția:

$$g(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 + 4 = 0$$



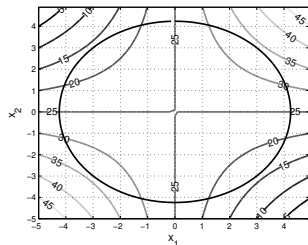
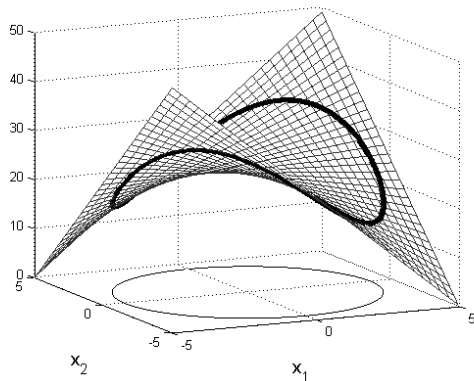
Exemplu 2

Minimizați

$$f(x_1, x_2) = x_1x_2 + 25$$

cu restricția:

$$x_1^2 + x_2^2 = 18$$



Multiplicatori Lagrange

Condiții necesare pentru probleme de optim cu restricții de tip egalitate

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

cu restricțiile

$$g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad m < n$$

- Se definește funcția Lagrange (extinsă):

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

sau

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &+ \dots + \lambda_m g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

- Punctele staționare sunt date de:

$$\nabla L(\mathbf{x}, \lambda) = \nabla (f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x})) = 0$$

Exemplul 2

Minimizați

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + 25$$

cu restricția:

$$x_1^2 + x_2^2 = 18 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 - 18 = 0$$

■ Funcția Lagrange:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + 25 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 18)$$

■ Gradientul (derivatele parțiale de ordinul 1) = 0:

$$L_{x_1} = x_2 + 2\lambda x_1 = 0$$

$$L_{x_2} = x_1 + 2\lambda x_2 = 0$$

$$L_{\lambda} = x_1^2 + x_2^2 - 18 = 0$$

Exemplul 2

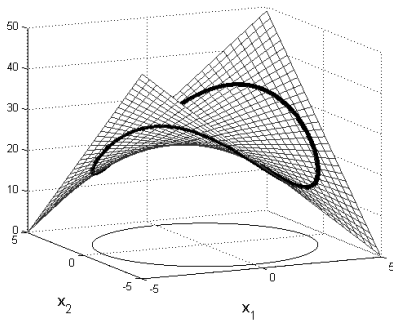
Rezultă punctele staționare:

$$x_{10} = -3, \quad x_{20} = 3, \quad \lambda_0 = \frac{1}{2}$$

$$x_{10} = 3, \quad x_{20} = 3, \quad \lambda_0 = -\frac{1}{2}$$

$$x_{10} = 3, \quad x_{20} = -3, \quad \lambda_0 = \frac{1}{2}$$

$$x_{10} = -3, \quad x_{20} = -3, \quad \lambda_0 = -\frac{1}{2}$$



Pentru condiții suficiente revedeți: 1- Theory of maxima and minima.pdf

Alte subiecte de revăzut

- modele în spațiul stărilor
- stabilitatea sistemelor liniare
- sisteme cu reacție de la stare
- discretizarea modelelor de stare
- optimizări: metode de gradient

Optimizare staționară vs. optimizare dinamică

- Optimizare staționară: se caută valoarea variabilelor care dau minimul (sau maximul) unei funcții obiectiv

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

- Optimizare dinamică: se caută variabilele, ca funcții de timp, care dau minimul (sau maximul) unei funcții obiectiv:

$$\min_{\mathbf{u}(t)} J(\mathbf{u}(t))$$