

Introducere in control optimal

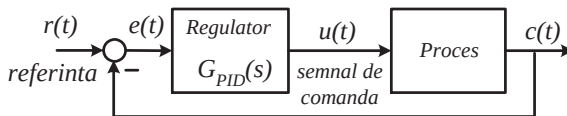
Control optimal
Master CAP / Master ICAF

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

- 1 Control clasic vs. Control optimal
- 2 Formularea problemelor de control optimal
 - Modelul matematic
 - Restrictii
 - Funcția de cost
 - Problema de control optimal: sumar
- 3 Exemple

Sisteme de reglare automată "clasice"

- Sistem de reglare automată:



- Regulatorul se calculează astfel încât să se respecte specificații de tipul: timp de răspuns, suprareglaj, margine de fază, margine de câștig, etc
- Discuțați semnalul de eroare $e(t)$

Control optimal

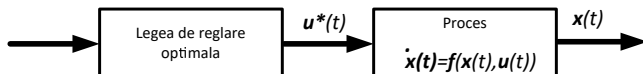
Obiectivul unui sistem de control optimal este să determine un semnal de comandă pentru care procesul să respecte restricțiile impuse și să minimizeze (sau maximizeze) un criteriu de performanță.

Exemple:

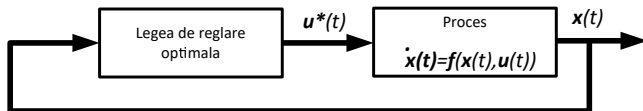
- O mașină se deplasează dintr-un punct în altul cu consum **minim** de combustibil.
- Un avion urmărește o traiectorie dată (**minimizând** diferența între traiectoria curentă și traiectoria dată ca referință)
- Un braț de robot trebuie să ajungă dintr-un punct dat în alt punct dat în timp **minim** și cu viteza finală zero.
- Un sistem economic se proiectează astfel încât să **maximizeze** profitul.
- etc.

Control optimal

- Legea de reglare optimală în buclă deschisă



- Legea de reglare optimală în buclă închisă - în general reglare cu reacție de la stare



Formularea problemelor de control optimal

O problemă de control optimal cuprinde:

- Un model matematic al procesului de controlat
- Stabilirea restricțiilor fizice
- Formularea unei funcții de cost (funcție de performanță, indice de performanță)

Modelul matematic în spațiul stărilor

- Se utilizează modele în spațiul stărilor (sisteme liniare sau neliniare)
- Notății:

$$\text{vectorul de stare: } \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{vectorul intrărilor de comandă: } \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

- Ecuația de stare:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

unde $\mathbf{f}$ este o funcție (în general neliniară) de stări, intrări și timp

Exemplu 1



- Se consideră o mașină (aproximată ca un punct) care se deplasează în linie dreaptă din punctul 0.
- Variabile de stare: $x_1(t)$ deplasarea (poziția) mașinii la timpul t , $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ - viteza mașinii la timpul t
- Variabile de intrare (comandă): $u_1(t)$ - accelerația mașinii, $u_2(t)$ - decelerarea (accelerație negativă = frânare).
- Ecuațiile de stare sunt:

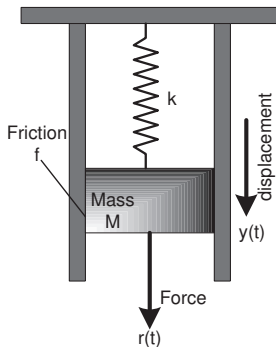
$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u_1(t) + u_2(t)\end{aligned}$$

- Ecuațiile de stare sunt liniare. Se pot scrie în formă matricială:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

Exemplu 2. Masa-resort-amortizor

■ Sistemul masa - resort - amortizor



■ Ecuația care descrie mișcarea masei pe verticală:

$$\underbrace{M \frac{d^2 y(t)}{dt^2}}_{\text{masa} \times \text{accelerația}} = \underbrace{r(t)}_{\text{intrarea}} - \underbrace{f \frac{dy(t)}{dt}}_{\text{forța de frecare}} - \underbrace{ky(t)}_{\text{forța elastică}}$$

■ Constante: M - masa corpului, f - coeficient de amortizare, k - constanta elastică a resortului

Exemplu 2. Masa-resort-amortizor

- Ecuația devine:

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + f \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = r(t)$$

- Se aleg variabilele de stare: $x_1(t) = y(t)$ = deplasarea, $x_2(t) = \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t)$ = viteza. Variabila de intrare $u(t) = r(t)$.
- Ecuațiile de stare:

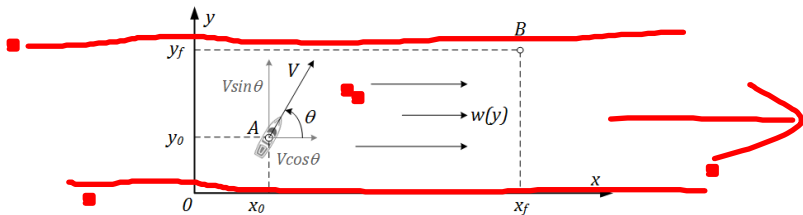
$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{M}x_1(t) - \frac{f}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}u(t)\end{aligned}$$

- Sistem liniar. Ecuațiile de stare în formă matricială:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{f}{M} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

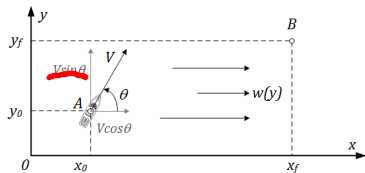
Exemplu 3. Barca lui Zermelo

- Se consideră o barcă, care se deplasează în coordonate carteziene dintr-un punct A într-o regiune cu curenți de apă.



- Barca are viteză constantă V în raport cu apa, iar orientarea sa θ poate fi modificată.
- Viteza curentului de apă $w(y)$ este paralelă cu axa x -axis și variază cu y . Funcția w poate fi constantă, poate depinde de timp și/sau de distanța $y(t)$ și este dată.

Exemplu 3. Barca lui Zermelo



- Se aleg variabilele de stare: $x(t)$ = deplasarea în direcția axei x , $y(t)$ = deplasarea în direcția axei y . Intrarea (comanda): orientarea $\theta(t)$.
- Dinamica bărcii este descrisă de:

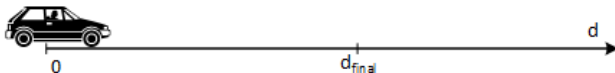
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= V \cos \theta(t) + w(y(t)) \\ \dot{y}(t) &= V \sin \theta(t)\end{aligned}$$

- Dacă, de exemplu, viteza curentului crește liniar în sensul axei y , iar $w(y(t)) = y(t)$, atunci ecuațiile devin:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= V \cos \theta(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) &= V \sin \theta(t)\end{aligned}$$

Restricții

- După ce modelul matematic a fost determinat, se stabilesc restricțiile (dacă există) asupra variabilelor de stare și intrare
- Exemplu:



Dacă t_0 este timpul de plecare din punctul 0 și t_f este timpul de sosire în d_{final} , restricțiile pot fi:

$$x_1(t_0) = 0$$

$$x_1(t_f) = d_{final}$$

- Dacă mașina pornește din repaus și se oprește la d_{final} , viteza inițială și viteza finală sunt zero:

$$x_2(t_0) = 0$$

$$x_2(t_f) = 0$$

Restricții



- Dacă mașina nu merge înapoi:

$$0 \leq x_1(t) \leq d_{final}$$
$$x_2(t) \geq 0$$

- Dacă accelerația maximă este $M_1 > 0$ și decelerarea maximă este $M_2 > 0$, restricțiile asupra variabilelor de intrare pot fi:

$$0 \leq u_1(t) \leq M_1$$
$$-M_2 \leq u_2(t) \leq 0$$

- Dacă mașina are G litri de combustibil și nu este alimentată în timpul deplasării, o restricție poate fi:

$$\int_{t_0}^{t_f} [k_1 u_1(t) + k_2 x_2(t)] dt \leq G$$

unde consumul de combustibil în timpul $t \in [0, t_f]$ este proporțional cu accelerația și viteza mașinii, ponderate cu constantele k_1 și k_2 .

Comanda admisibilă. Traiectorie admisibilă

O intrare (comandă) este **admisibilă** dacă satisface restricțiile impuse asupra intrării în tot intervalul de timp $t \in [t_0, t_f]$.

O traiectorie de stare este **admisibilă** dacă satisface restricțiile impuse asupra stării în tot intervalul de timp $t \in [t_0, t_f]$.

Funcția de cost

- Funcție de cost, funcție de performanță, indice de cost, indice de performanță, măsură de performanță
- Control optimal: minimizează (sau maximizează) o măsură de performanță (sau funcție de cost).
- O formă generală:

$$J = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

unde t_0 și t_f sunt timpul inițial și final; h și g sunt funcții scalare; t_f poate fi dat sau necunoscut, depinzând de formularea problemei.

Probleme de timp minim

- Dacă, de exemplu, mașina prezentată în exemplele anterioare trebuie să ajungă din punctul 0 în punctul d_{final} **în timp minim** $\Rightarrow$ trebuie minimizată diferența $t_f - t_0$, iar funcția de cost este:

$$J = t_f - t_0$$

- Dacă $t_0 = 0 \Rightarrow J = t_f$

Problema de timp minim: să se transfere sistemul dintr-o stare inițială dată $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ într-o stare finală dată $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ în timp minim. Funcția de cost care trebuie minimizată este:

$$J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt$$

- Comparăție cu forma generală:

$$J = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

$$h(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0; \quad g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = 1$$

Forme pătratică

- Înainte de a prezenta alte forme ale funcției de cost, se reamintesc *forme pătratică*.
- Dacă $\mathbf{x}$ este un vector *coloană* ($n \times 1$), iar $\mathbf{Q}$ este o matrice de ponderi pătrată, simetrică pozitiv semidefinită ($n \times n$):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{12} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{1n} & q_{2n} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

atunci $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ este o formă pătratică

- Exemplu pentru $n = 2$ și matricea $\mathbf{Q}$ diagonală:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 5x_2^2$$

Probleme cu valori terminale

Problema: să se minimizeze deviația stării finale a unui sistem $\mathbf{x}(t_f)$ de la o valoare dată $\mathbf{r}_f = [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_n]^T$

- O posibilă funcție de cost este:

$$J = \sum_{i=1}^n [x_i(t_f) - r_{if}]^2$$

care poate fi scrisă în formă matricială (ca o formă pătratică):

$$J = [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}_f]^T [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}_f], \quad (\mathbf{Q} = \mathbf{I} = \text{matricea unitate})$$

- Generalizare:

$$J = [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}_f]^T \mathbf{H} [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}_f]$$

unde $\mathbf{H}$ este o matrice pătrată, diagonală, pozitiv semi-definită.

- Elementele matricii $\mathbf{H}$, h_{ii} ponderează fiecare diferență (deviație) $[x_i(t_f) - r_{if}]^2$.
- O valoare h_{ii} mare atașează mai multă semnificație deviației lui $x_i(t_f)$ de la valoarea dorită r_i . O valoare mică, sau zero a ponderii h_{ii} înseamnă că valoarea finală a lui x_i nu are importanță.

Probleme cu valori terminale

- Comparație cu forma generală:

$$J = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}(t_f), t_f) &= [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}_f]^T \mathbf{H} [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}_f] = \\ &= h_{11}(x_1(t_f) - r_1)^2 + \cdots + h_{nn}(x_n(t_f) - r_n)^2 \\ g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) &= 0 \end{aligned}$$

Exemplu:

$$J = 100 \cdot [x_1(t_f) - 1]^2 + 0.1 \cdot [x_2(t_f) - 3]^2, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

(Obiectivul este ca starea x_1 să ajungă la timpul final t_f cât se poate de aproape de valoarea 1 - cu importanță mare, iar starea x_2 să ajungă la timpul final cât se poate de aproape de valoarea 3 - cu importanță mică).

Probleme de energie minimă

Problema: să se determine o comandă admisibilă, pentru care sistemul urmează o traiectorie de stare admisibilă cu consum minim de energie de comandă.

- Pentru o singură intrare (comandă):

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^2(t) dt$$

- Exemplu: $u(t)$ = tensiunea pe o rezistență constantă R . Energia = $u(t)^2/R \times t$. $u^2(t)$ integrată de la t_0 la t_f , pentru o rezistență constantă are dimensiune de energie.
- Exemplu: dacă $u(t)$ este viteza, integrala funcției $u^2(t)$ în raport cu timpul are dimensiunea energiei cinetice, dacă masa obiectului în mișcare este constantă.

Probleme de energie minimă

- Pentru un sistem cu m intrări, funcția de cost generală:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt$$

unde $\mathbf{R}$ este o matrice pătrată, simetrică, **pozitiv definită**

- Elementele matricii $\mathbf{R}$ au semnificație de ponderi pentru fiecare intrare în parte (dacă matricea este diagonală).

Exemplu: Pentru

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} (u_1^2(t) + 100u_2^2(t)) dt$$

(este mai importantă minimizarea energiei consumate cu u_2)

Probleme de urmărire

Problema: să se mențină starea sistemului $\mathbf{x}(t)$ cât de aproape se poate de o traiectorie dată $\mathbf{r}(t)$, în intervalul de timp $t \in [t_o, t_f]$.

■ Funcția de cost:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t))^T \mathbf{Q} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)) dt$$

unde $\mathbf{Q}$ este o matrice pătrată, simetrică și **pozitiv semi-definită**.

Exemplu: pentru un sistem cu 2 variabile de stare și matricea $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 100(x_1(t) - \sin(t))^2 + (x_2(t) - t)^2 dt$$

(se dorește ca $x_1(t)$ să urmărească o funcție sinus - cu importanță mare, iar $x_2(t)$ să urmărească o rampă - cu importanță mică)

Probleme de stabilizare

Problema: starea sistemului $\mathbf{x}(t)$ să tindă la 0 în intervalul de timp $t \in [t_o, t_f]$.

- Problema este un caz particular al problemei de urmărire, în care $\mathbf{r}(t) = 0$.
- Funcția de cost:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) dt$$

unde $\mathbf{Q}$ este o matrice pătrată, simetrică și **pozitiv semi-definită**.

- Comparăție cu forma generală:

$$J = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

$$h(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0, \quad g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t)$$

- Pentru a evita restricțiile de tip inegalitate asupra variabilelor de intrare (tratare matematică mai complicată), se pot include în funcția de cost, de exemplu:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t))^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R}\mathbf{u}(t)) dt$$

Problema de control optimal

Să se determine o comandă admisibilă $\mathbf{u}^*$, pentru care sistemul

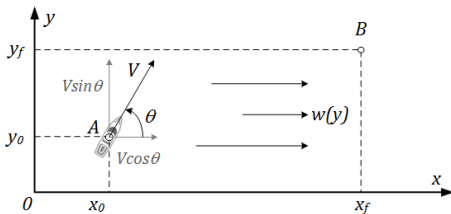
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \mathbf{u}(t), t)$$

urmărește o traiectorie de stare admisibilă $\mathbf{x}^*$ care minimizează funcția de cost:

$$J = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

$\mathbf{u}^*$ este o lege de comandă optimală iar $\mathbf{x}^*$ o traiectorie de stare optimală.

Exemplu 1. Barca lui Zermelo



Obiectivul este să se ghideze barca (se caută orientarea $\theta^*(t)$) astfel încât să ajungă din punctul inițial dat $A(0,0)$ în punctul final $B(1,1)$ dat, în timp minim. Se consideră că viteza curenților de apă este zero $w = 0$.

■ Modelul matematic:

$$\dot{x}(t) = V \cos \theta(t)$$

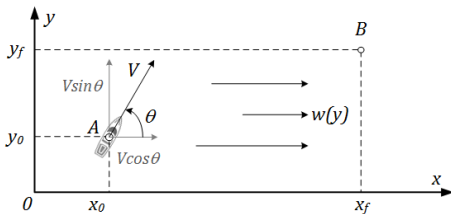
$$\dot{y}(t) = V \sin \theta(t)$$

■ Restricții: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $x(t_f) = 1$, $y(t_f) = 1$

■ Funcția de cost (care se va minimiza):

$$J = \int_0^{t_f} dt$$

Exemplu 2. Barca lui Zermelo



Obiectivul este să se determine orientarea $\theta^*(t)$ astfel încât să se maximizeze distanța parcursă în direcția axei x , într-un timp dat t_f . Se consideră că viteza curentului de apă este $w = w(y)$, iar barca se află inițial în poziția $x(0) = y(0) = 0$.

■ Modelul matematic:

$$\dot{x}(t) = V \cos \theta(t) + w(y(t))$$

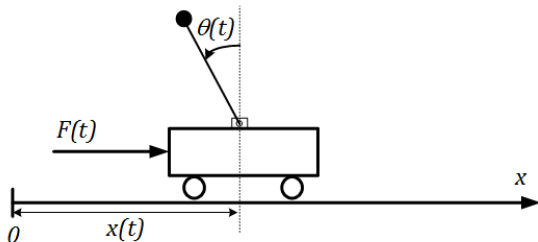
$$\dot{y}(t) = V \sin \theta(t)$$

■ Restricții: $x(0) = 0, y(0) = 0$

■ Funcția de cost (care se va minimiza):

$$J = -x(t_f)$$

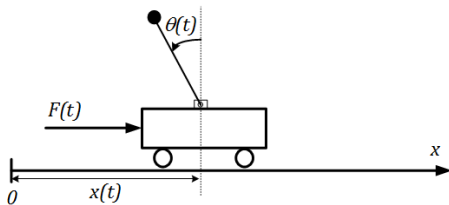
Exemplu 3. Pendul inversat



- Intrarea: forța aplicată cartului $u(t) = F(t)$
- Stările:
 - $x_1(t) = x(t)$ - deplasarea cartului pe orizontală
 - $x_2(t) = \dot{x}(t)$ - viteza liniară a cartului
 - $x_3(t) = \theta(t)$ - poziția unghiulară a pendulului față de verticală
 - $x_4(t) = \dot{\theta}(t)$ - viteza unghiulară a pendulului

Obiectivul este să se mențină pendulul în poziție verticală și să, iar cartul să ajungă la timpul final în poziția verticală, cu energie minimă consumată cu comanda. Timpul final $T = 10$ sec este dat.

Exemplu 3. Pendul inversat



- Modelul matematic în spațiul stărilor:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_3(t) + 0.2u(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = 10x_3(t) - 0.2u(t)$$

- Condiții inițiale: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = \pi/4$, $x_4(0) = 0$
- Funcția de cost (de minimizat):

$$J = \int_0^{10} \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt$$

Exemplu 4. O problemă de energie minimă

Se consideră problema accelerării pe un skateboard, astfel încât să se maximizeze distanța parcursă într-un timp dat T , cu efort minim.

- $x_1(t)$ = distanța parcursă în timpul t
- $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ = viteza
- $u(t) = \dot{x}_2(t)$ = accelerația (intrarea)
- Modelul în spațiul stărilor:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

- Condiții inițiale: $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$
- Funcția de cost (care va fi minimizată):

$$J = -x_1(T) + \int_0^T u^2(t)dt$$