

Programare dinamică

Control optimal
Master CAP / Master ICAF

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

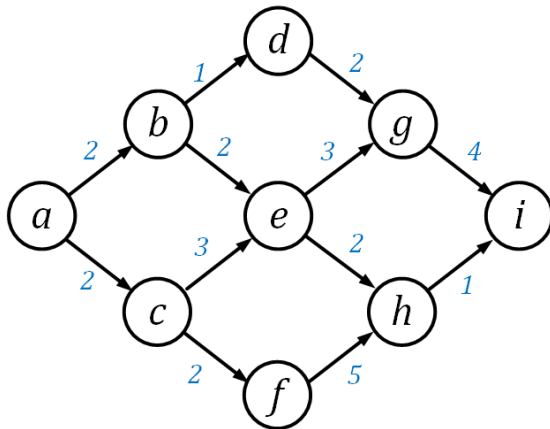
- 1 Principiul optimalității
- 2 Relația de recurență a programării dinamice
- 3 Procedura de calcul analitic
- 4 Implementare pe calculator
 - Interpolare

Principiul optimalității

- Metoda programării dinamice pentru rezolvarea problemelor de optimizare sau control optimal se bazează pe *principiul optimalității* (Richard Bellman, 1957).
- *O strategie optimă (o secvență de comenzi sau decizii optime) are proprietatea că oricare ar fi starea inițială și decizia inițială, restul deciziilor trebuie să constituie o strategie optimă în raport cu starea rezultată din prima decizie.*
- sau: *o strategie optimă are sub-strategii optime*

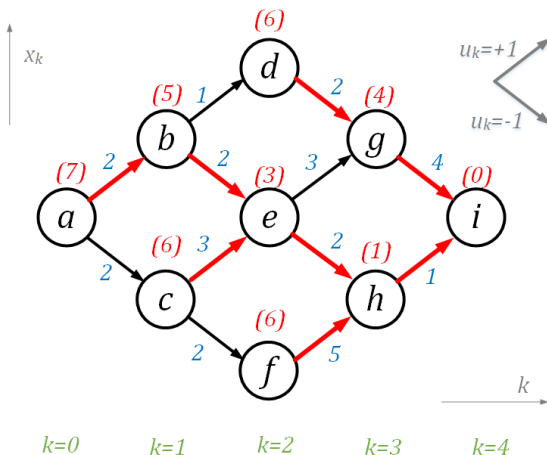
Exemplu. Drum minim în graf

- Se caută drumul cu cost minim în graful orientat din figură.

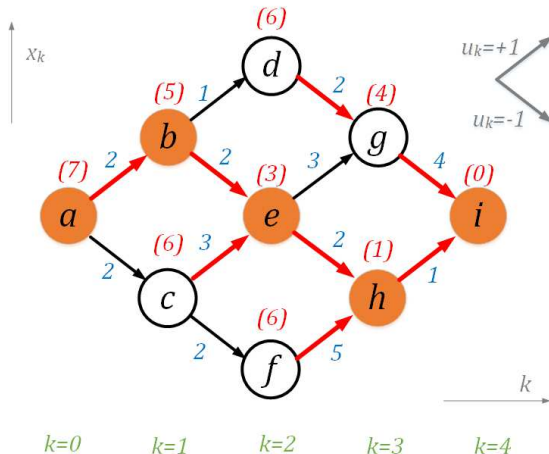


Exemplu. Drum minim în graf

- Explicația detaliată: *DynamicProgramming.pdf*



Exemplu. Drum minim în graf



- Traectoria optimă: $a - b - e - h - i$.
- Succesiunea de comenzi optime: $u_0^* = +1, u_1^* = -1, u_2^* = -1, u_3^* = +1$.

Relația de recurență a programării dinamice

- Metoda programării dinamice: pentru determinarea secvenței de comenzi optime, pentru un sistem dinamic discret, care minimizează o funcție de cost "discretă".
- Problema:
Pentru un sistem discret descris de ecuația de stare:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), k = 0, 1, \dots, N-1$$

se caută succesiunea de comenzi optime $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_k, k)$, $k = \overline{0, N-1}$ care minimizează funcția de cost:

$$J = h(\mathbf{x}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$

Problema

- Problema de CO pentru sisteme continue:
Un sistem de ordinul n descris de ecuația de stare:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

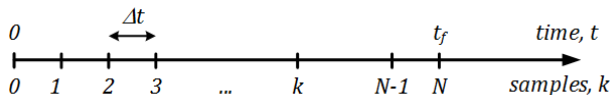
se caută $\mathbf{u}^*(t)$ care minimizează:

$$J = h(\mathbf{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt$$

cu t_f fixat.

- Se va discretiza problema.

Aproximarea ecuației de stare



- Aproximarea derivatei:

$$\frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} \approx \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

sau

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \Delta t \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

- Notăție: $\mathbf{x}(k\Delta t) = \mathbf{x}_k$:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta t \mathbf{a}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$

- Ecuația de stare discretizată:

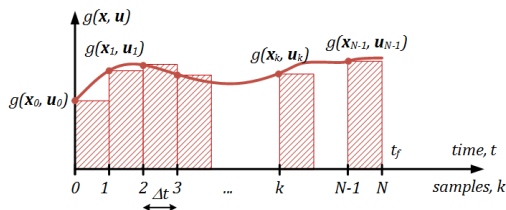
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$

Aproximarea funcției de cost

- Funcția scalară $h(\mathbf{x}(t_f)) \rightarrow h(\mathbf{x}_N)$.
- Integrala se poate aproxima prin metoda dreptunghiurilor:

$$\int_0^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \approx \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} g(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$

unde $\mathbf{x}_k$ și $\mathbf{u}_k$ sunt valorile stărilor și intrărilor la timpul discret k .



- Funcția de cost:

$$J = h(\mathbf{x}_N) + \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} g(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = h(\mathbf{x}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$

Relația de recurență a PD

- Se caută succesiunea de comenzi optime::

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0), \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_{N-1})$$

pentru sistemul:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$

care minimizează:

$$J = h(\mathbf{x}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$

- Se notează costul stării finale:

$$J_{NN}(\mathbf{x}_N) = h(\mathbf{x}_N)$$

- La pasul $k - 1$, din J rezultă:

$$J_{N-1,N}(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}) = L(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}) + h(\mathbf{x}_N) = L(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}) + J_{NN}(\mathbf{x}_N)$$

(costul transferului sistemului în intervalul $(N-1)\Delta t \leq t \leq N\Delta t$)

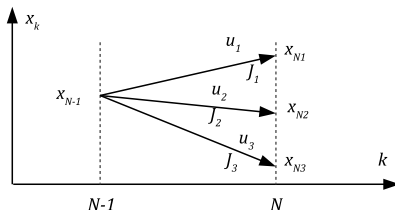
- Observați că $J_{N-1,N}$ este costul unei etape cu starea "inițială" $\mathbf{x}_{N-1}$.
- Valoarea $J_{N-1,N}$ depinde numai de $\mathbf{x}_{N-1}$ și $\mathbf{u}_{N-1}$ deoarece $\mathbf{x}_N$ este dat de $\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}$ prin ecuația de stare.

Relația de recurență a PD

- Costul optim este:

$$J_{N-1,N}^*(\mathbf{x}_{N-1}) = \min_{\mathbf{u}_{N-1}} (L(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}) + J_{NN}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1})))$$

- Comanda optimă în acest interval $\mathbf{u}_{N-1}^*$ va depinde de $\mathbf{x}_{N-1} \Rightarrow \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_{N-1})$.
- *De exemplu:* x_{N-1} este transferat în:
 - x_{N1} de o comandă u_1 , iar costul operației este J_1 .
 - x_{N2} sau x_{N3} cu comanda u_2 sau respectiv u_3 , cu costul J_2 sau J_3 .
- $J_{N-1,N}^*$ este costul minim al transferului din x_{N-1} în x_N (care este unul dintre valorile x_{N1}, x_{N2}, x_{N3}), date de $\mathbf{u}_{N-1}^*$ (unul dintre u_1, u_2, u_3).



Relația de recurență a PD

- pentru $k = N - 2$:

$$\begin{aligned} J_{N-2,N}(\mathbf{x}_{N-2}, \mathbf{u}_{N-2}, \mathbf{u}_{N-1}) &= L(\mathbf{x}_{N-2}, \mathbf{u}_{N-2}) + \underbrace{L(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}) + h(\mathbf{x}_N)}_{J_{N-1,N}(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1})} = \\ &= L(\mathbf{x}_{N-2}, \mathbf{u}_{N-2}) + J_{N-1,N}(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}) \end{aligned}$$

- $J_{N-2,N}$ este costul unui proces în două etape cu starea inițială $\mathbf{x}_{N-2}$.
- Succesiunea de comenzi optime pe ultimele două intervale de timp:

$$J_{N-2,N}^*(\mathbf{x}_{N-2}) = \min_{\mathbf{u}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-2}} (L(\mathbf{x}_{N-2}, \mathbf{u}_{N-2}) + J_{N-1,N}(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}))$$

- Principiul optimalității stabilește că pentru acest proces în două etape, oricare ar fi starea inițială $\mathbf{x}_{N-2}$ și decizia inițială $\mathbf{u}_{N-2}$, restul deciziilor trebuie să fie o strategie optimă în raport cu valoarea $\mathbf{x}_{N-1}$ care rezultă din aplicarea $\mathbf{u}_{N-1}$.
- De aceea:

$$J_{N-2,N}^*(\mathbf{x}_{N-2}) = \min_{\mathbf{u}_{N-2}} (L(\mathbf{x}_{N-2}, \mathbf{u}_{N-2}) + J_{N-1,N}^*(\mathbf{x}_{N-1}))$$

Relația de recurență a PD

- Se presupune că pentru o stare $\mathbf{x}_{k+1}$, sunt calculate:
 - costul optim $J_{k+1,N}^*(\mathbf{x}_{k+1})$ (care transferă sistemul de la etapa $k+1$ la N)
 - succesiunea de comenzi $\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_{N-1}$.
- Din principiul optimalității rezultă că trebuie minimizat doar:
 $L(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + J_{k+1,N}^*(\mathbf{x}_{k+1})$, adică $\mathbf{u}_k$ se poate determina din:

$$J_{k,N}^*(\mathbf{x}_k) = \min_{\mathbf{u}_k} (L(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + J_{k+1,N}^*(\mathbf{x}_{k+1})) \quad (1)$$

sau

$$J_{k,N}^*(\mathbf{x}_k) = \min_{\mathbf{u}_k} (L(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + J_{k+1,N}^*(\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k))) \quad (2)$$

- Metoda este iterativă, începând cu $k = N$ și $k \rightarrow 0$.

- Problema Se consideră un sistem discret cu ecuația de stare:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), k = 0, 1, \dots, N-1$$

pentru care se caută $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_k, k)$, $k = \overline{0, N-1}$ care minimizează funcția de cost:

$$J = h(\mathbf{x}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$

- $\mathbf{u}_k^*$ se determină din:

$$J_{k,N}^*(\mathbf{x}_k) = \min_{\mathbf{u}_k} \{L(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + J_{k+1,N}^*(\mathbf{x}_{k+1})\} = \min_{\mathbf{u}_k} \{L(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + J_{k+1,N}^*(\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k))\}$$

(recursiv începând cu $J_{N,N}^*(\mathbf{x}_N) = h(\mathbf{x}_N)$)

PD prin calcul analitic

Pas 0 $J_{NN}^*(\mathbf{x}_N) = h(\mathbf{x}_N)$

Pas 1 $J_{N-1,N}^*(\mathbf{x}_{N-1}) = \min_{\mathbf{u}_{N-1}} \overbrace{\{L(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}) + J_{NN}^*(f(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}))\}}^{J_{N-1,N}(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1})}$

Valoarea optimă a semnalului de comandă este $\mathbf{u}_{N-1}^*$. Este o funcție de $\mathbf{x}_{N-1}$ și se determină din :

$$\frac{\partial J_{N-1,N}(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1})}{\partial \mathbf{u}_{N-1}} = 0$$

Pas i $J_{N-i,N}^*(\mathbf{x}_{N-i}) = \min_{\mathbf{u}_{N-i}} \{L(\mathbf{x}_{N-i}, \mathbf{u}_{N-i}) + J_{N-i+1}^*(f(\mathbf{x}_{N-i}, \mathbf{u}_{N-i}))\}$

Valoarea optimă a semnalului de comandă est $\mathbf{u}_{N-i}^*$ și depinde de $\mathbf{x}_{N-i}$.

Pas N $J_{0N}^*(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}_0} \{L(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + J_{1N}^*(f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0))\}$

Exemplu

- Se consideră un sistem discret dat de:

$$x_{k+1} = 2x_k - 3u_k, \quad x_0 = 4, \quad k = 0, 1, 2 \dots N-1$$

Se caută succesiunea de comenzi care minimizează

$$J = (x_N - 10)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^2 + u_k^2)$$

- Pentru $N = 2$, funcția de cost este:

$$J = (x_2 - 10)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 (x_k^2 + u_k^2)$$

- Se vor calcula: u_0^* , u_1^* . Nu există restricții pentru u_k .
- pentru $k = N = 2$:

$$J_{22}^* = (x_2 - 10)^2$$

- pentru $k = N - 1 = 1$:

$$J_{12}^*(x_1) = \min_{u_1} J_{12}(x_1, u_1) = \min_{u_1} \left\{ \frac{1}{2}(x_1^2 + u_1^2) + J_{22}^*(x_2) \right\} =$$

Exemplu

- pentru $k = 1$ (cont):

$$\begin{aligned} J_{12}^*(x_1) &= \min_{u_1} \left\{ \frac{1}{2}(x_1^2 + u_1^2) + (x_2 - 10)^2 \right\} \\ &= \min_{u_1} \left\{ \underbrace{\frac{1}{2}(x_1^2 + u_1^2) + (2x_1 - 3u_1 - 10)^2}_{J_{12}(x_1, u_1)} \right\} \end{aligned}$$

- u_1^* se determină din: $\frac{\partial J_{12}(x_1, u_1)}{\partial u_1} = 0$

$$\frac{\partial J_{12}(x_1, u_1)}{\partial u_1} = u_1 - 6(2x_1 - 3u_1 - 10) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1^* = \frac{12x_1 - 60}{19}$$

- costul optim $J_{12}^*(x_1)$ rezultă:

$$\begin{aligned} J_{12}^*(x_1) &= \frac{1}{2} \left[x_1^2 + \left(\frac{12x_1 - 60}{19} \right)^2 \right] + \left[2x_1 - 3 \left(\frac{12x_1 - 60}{19} \right) - 10 \right]^2 \\ &= \frac{27}{38} x_1^2 - \frac{40}{19} x_1 + \frac{100}{19} \end{aligned}$$

Exemplu

- pentru $k = 0$

$$\begin{aligned} J_{02}^*(x_0) &= \min_{u_0} J_{02}(x_0, u_0) = \min_{u_0} \left\{ \frac{1}{2}(x_0^2 + u_0^2) + J_{12}^*(x_1) \right\} = \\ &= \min_{u_0} \left\{ \underbrace{\frac{1}{2}(x_0^2 + u_0^2) + J_{12}^*(2x_0 - 3u_0)}_{J_{02}(x_0, u_0)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{02}(x_0, u_0)}{\partial u_0} &= \frac{\partial}{\partial u_0} \left\{ \frac{1}{2}(x_0^2 + u_0^2) + \frac{27}{38}(2x_0 - 3u_0)^2 - \frac{40}{19}(2x_0 - 3u_0) + \frac{100}{19} \right\} \\ &= 2u_0 - \frac{6 \cdot 27}{38}u_0(2x_0 - 3u_0) + \frac{120}{19} = 0 \end{aligned}$$

$$u_0^* = \frac{81}{131}x_0 - \frac{60}{131} = 0.618x_0 - 0.458$$

Exemplu

- Pentru condiția inițială $x_0 = 4$, comanda optimă la $k = 0$ este:

$$u_0^* = 0.618 \cdot 4 - 0.458 = 2.015$$

iar starea la $k = 1$ rezultă din:

$$u_0^* = 2.015 \Rightarrow x_1^* = 2x_0 - 3u_0^* = 1.9541$$

- La $k = 1$, comanda optimă u_1^* și starea următoare x_2^* sunt:

$$u_1^* = \frac{12x_1^* - 60}{19} \Rightarrow u_1^* = -1.923 \Rightarrow x_2^* = 2x_1 - 3u_1^* = 9.679$$

- Sucesiunea de comenzi optime este:

$$u_0^* = 2.015 \quad u_1^* = -1.923$$

iar traiectoria de stare optimală:

$$x_0^* = 4, \quad x_1^* = 1.9541, \quad x_2^* = 9.679$$

- Valoarea minimă a costului pentru transferul sistemului din starea inițială $x_0 = 4$ în starea finală x_2 se obține:

$$J^* = J_{02}^* = 13.97$$

Exemplu

Sucesiunea de comenzi se pot aplica:

- în buclă deschisă: dacă se cunoaște starea inițială, se calculează valorile:

$$u_0^*, \quad u_1^*, \quad \dots \quad u_{N-1}^*$$

și se aplică sistemului.

- în buclă închisă: se utilizează dependența variabilelor de comandă u_k^* de valoarea stării la fiecare pas de timp discret $\Rightarrow$ sistem cu reacție de la stare, cu "regulator" variabil în timp.

Implementare. Exemplu

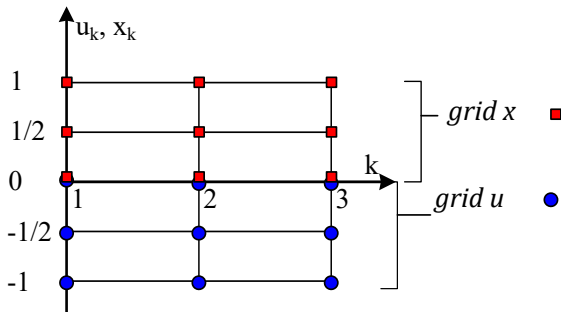
Se consideră un sistem de ordinul 1 cu ecuația de stare:

$$x_{k+1} = x_k + u_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

Determinați secvența de comenzi optime $u_1^*, u_2^*, \dots, u_{N-1}^*$ care minimizează funcția de cost:

$$J = x_N^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} u_k^2$$

Se consideră: $N = 3$, $u_k \in \{-1, -1/2, 0\}$, $x_k \in \{0, 1/2, 1\}$



Exemplu

- Pentru $N = 3$ funcția de cost este: $J = x_3^2 + \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} u_k^2$

- $k = 3, J_{3,3}^*(x_3) = x_3^2$:

x_3	$J_{3,3}^*(x_3) = x_3^2$
0	0
1/2	1/4
1	1

- $k = 2, J_{2,3}^*(x_2) = \min_{u_2} (J_{3,3}^*(x_3) + \frac{1}{2} u_2^2)$:

x_2	u_2	$x_3 = x_2 + u_2$	$J_{3,3}^*(x_3)$	$J_{2,3}(x_2) = J_{3,3}^*(x_3) + \frac{1}{2} u_2^2$	$J_{2,3}^*(x_2)$
0	-1 -1/2 0	-1 -1/2 0	neadmisibil neadmisibil 0	- - $0 + 1/2 \cdot 0^2 = 0$	$u_2^* = 0$ $J_{2,3}^*(0) = 0$
1/2	-1 -1/2 0	-1/2 0 1/2	neadmisibil 0 1/4	- $0 + 1/2 \cdot 1/4 = 1/8$ $1/4 + 1/2 \cdot 0^2 = 1/4$	$u_2^* = -1/2$ $J_{2,3}^*(1/2) = 1/8$
1	-1 -1/2 0	0 1/2 1	0 1/4 1	$0 + 1/2 \cdot 1 = 1/2$ $1/4 + 1/2 \cdot 1/4 = 3/8$ $1 + 1/2 \cdot 0^2 = 1$	$u_2^* = -1/2$ $J_{2,3}^*(1) = 3/8$

Exemplu

x_2	$J_{2,3}^*(x_2)$
0	0
1/2	1/8
1	3/8

u_k^*	$k = 1$	$k = 2$
$x_k=0$	-	0
$x_k=1/2$	-	-1/2
$x_k=1$	-	-1/2

■ $k = 1$, $J_{1,3}^*(x_1) = \min_{u_1} (J_{2,3}^*(x_2) + \frac{1}{2}u_1^2)$:

x_1	u_1	$x_2 = x_1 + u_1$	$J_{2,3}^*(x_2)$	$J_{1,3}(x_1) = J_{2,3}^*(x_2) + \frac{1}{2}u_1^2$	$J_{1,3}^*(x_1)$
0	-1	-1	neadmisibil	-	$u_1^* = 0$ $J_{1,3}^*(0) = 0$
	-1/2	-1/2	neadmisibil	-	
	0	0	0	$0 + 1/2 \cdot 0^2 = 0$	
1/2	-1	-1/2	neadmisibil	-	$u_1^* = -1/2$ sau $u_1^* = 0$ $J_{1,3}^*(1/2) = 1/8$
	-1/2	0	0	$0 + 1/2 \cdot 1/4 = 1/8$	
	0	1/2	1/8	$1/8 + 1/2 \cdot 0^2 = 1/8$	
1	-1	0	0	$0 + 1/2 \cdot 1 = 1/2$	$u_1^* = -1/2$ $J_{1,3}^*(1) = 1/4$
	-1/2	1/2	1/8	$1/8 + 1/2 \cdot 1/4 = 1/4$	
	0	1	3/8	$3/8 + 1/2 \cdot 0^2 = 3/8$	

Exemplu

x_1	$J_{1,3}^*(x_1)$
0	0
1/2	1/8
1	1/4

u_k^*	$k = 1$	$k = 2$
$x_k=0$	0	0
$x_k=1/2$	-1/2	-1/2
$x_k=1$	-1/2	-1/2

- Dacă starea inițială este $x_1 = 1$, costul optim până la starea finală x_3 este:
 $J_{1,3}^*(1) = \frac{1}{4}$
- Din ultimul tabel, valoarea optimă a comenzii la $k = 1$: $u_1^* = -1/2$ transferă sistemul din starea inițială $x_1 = 1$ în starea $x_2^* = x_1 + u_1^* = 1/2$.
- La $k = 2$, comanda optimă este $u_2^* = -1/2$ și transferă sistemul de la $x_2^* = 1/2$ la $x_3^* = x_2^* + u_2^* = 1 + (-1/2) = 0$.
- Secvența de comenzi optime este:

$$u^* : -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

- Traectoria de stare optimă, din starea inițială 1:

$$x^* : 1, \frac{1}{2}, 0$$

Interpolare

- În exemplul anterior toate valorile stării următoare calculate au rezultat în nodurile rețelei de puncte alese ca valori posibile ale stării sau în afara intervalului.
- Dacă valoarea stării următoare este între punctele alese, pentru calculul $J_{k,N}^*(x_k)$ este necesară interpolare:

