

Ecuția Hamilton-Jacobi-Bellman

Control optimal
Master CAP / Master ICAF

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

- 1 Problema de control optimal
- 2 Obținerea ecuației HJB
- 3 Sumar al soluției analitice a ecuației HJB
- 4 Exemplu

Problema de control optimal

Pentru sistemul descris de ecuația de stare

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

se caută comanda $\mathbf{u}^*(t)$ care minimizează funcția de cost

$$J = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau \quad (2)$$

unde g și h sunt funcții scalare cunoscute, t_0 și t_f sunt fixate, iar τ este variabila de integrare.

Ecuția HJB

- Ecuția HJB va fi determinată utilizând principiul optimalității (Bellman) și rezultatele obținute pentru programarea dinamică, [1].
- Se consideră problema mai generală, cu funcția de cost:

$$J(\mathbf{x}(t), t, \mathbf{u}(\tau)_{t \leq \tau \leq t_f}) = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} g(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau \quad (3)$$

unde $t \leq t_f$ (orice valoare), iar $\mathbf{x}(t)$ poate fi orice valoare admisibilă a stării.

- Funcția de cost depinde de valorile lui $\mathbf{x}(t)$, de t și de istoricul comenzii în intervalul $[t, t_f]$.

Ecuția HJB

- Se caută comanda $\mathbf{u}^*(t)$ care minimizează (3) pentru toate stările $\mathbf{x}(t)$ admisibile și toate $t \leq t_f$. Funcția de cost minimă este:

$$J^*(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}(\tau)} \left\{ h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} g(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau \right\} \quad (4)$$

- Se împarte intervalul $[t, t_f]$ în $[t, t + \Delta t]$ și $[t + \Delta t, t_f]$ pentru $\Delta t \rightarrow 0$.
- Prin divizarea intervalului se obține:

$$J^*(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}(\tau)} \left\{ h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_t^{t+\Delta t} g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) d\tau + \int_{t+\Delta t}^{t_f} g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) d\tau \right\} \quad (5)$$



- Relația se rescrie:

$$J^*(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}(\tau)} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) d\tau + \underbrace{h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t+\Delta t}^{t_f} g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) d\tau}_{J^*(\mathbf{x}(t+\Delta t), t+\Delta t)} \right\}$$

- Din principiul optimalității rezultă:

$$J^*(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) d\tau + J^*(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) \right\} \quad (6)$$

unde $J^*(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t)$ este costul minim al transferului sistemului pentru intervalul de timp $t + \Delta t \leq \tau \leq t_f$ cu starea 'inițială' $\mathbf{x}(t + \Delta t)$.

- *Reamintire: Dezvoltare în serie Taylor a unei funcții de 2 variabile, în jurul (x_0, y_0) :*

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) + \text{hot}$$

- Se dezvoltă $J^*(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t)$ în serie Taylor în jurul punctului $(\mathbf{x}(t), t)$ (seria se trunchiază după termenii de ordinul 1) și rezultă:

$$\begin{aligned} J^*(\mathbf{x}(t), t) = & \min_{\mathbf{u}} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) d\tau + J^*(\mathbf{x}(t), t) + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial J^*}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) \right] \Delta t + \left[\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), t) \right]^T [\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)] \right\} \end{aligned}$$

- Pentru Δt foarte mic:

$$J^*(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}} \left\{ \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) d\tau}_{g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Delta t} + J^*(\mathbf{x}(t), t) + \left[\frac{\partial J^*}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) \right] \Delta t + \left[\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), t) \right]^T \underbrace{[\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)]}_{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \Delta t} \right\}$$

- Pentru că $J^*(\mathbf{x}(t), t)$ nu depinde de $\mathbf{u}$, acești termeni se reduc, iar $\dot{\mathbf{x}}$ se înlocuiește cu ecuația de stare (1):

$$0 = \min_{\mathbf{u}(\tau)} \left\{ g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Delta t + \frac{\partial J^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} \Delta t + \left[\frac{\partial J^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Delta t \right\}$$

Ecuția HJB

- Ecuția se împarte la Δt și rezultă:

$$0 = \frac{\partial J^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} + \min_{\mathbf{u}(\tau)} \left\{ g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \left[\frac{\partial J^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right\} \quad (7)$$

- Se definește Hamiltonianul:

$$H = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \left[\frac{\partial J^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (8)$$

- Ecuția se rescrie:

$$0 = \frac{\partial J^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} + \min_{\mathbf{u}} H$$

- cu condiția pe frontieră care rezultă din $t = t_f$ pentru relația inițială:

$$J^*(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}(\tau)} \left\{ \underbrace{h(\mathbf{x}(t_f), t_f)}_{\text{nu depinde de } \mathbf{u}} + \underbrace{\int_{t_f}^{t_f} g(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau}_{=0} \right\}$$

adică:

$$J^*(\mathbf{x}(t_f), t_f) = h(\mathbf{x}(t_f), t_f)$$

Ecuția HJB

- Sumarizând, ecuația Hamilton-Jacobi-Bellman este dată de:

$$0 = \frac{\partial J^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} + \min_{\mathbf{u}} H$$

- unde hamiltonianul este:

$$H = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \left[\frac{\partial J^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

- cu condiția de frontieră:

$$J^*(\mathbf{x}(t_f), t_f) = h(\mathbf{x}(t_f), t_f)$$

Ecuția HJB

- Pentru simplificarea notațiilor:

$$J_{\mathbf{x}}^* = \frac{\partial J^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{and} \quad J_t^* = \frac{\partial J^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t}$$

- Ecuția HJB se scrie:

$$0 = J_t^* + \min_{\mathbf{u}} H$$

- cu hamiltonianul:

$$H = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + [J_{\mathbf{x}}^*]^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

- **Obs.** Dacă $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, $J_{\mathbf{x}}^* = \begin{bmatrix} J_{x_1}^* \\ J_{x_2}^* \\ \dots \\ J_{x_n}^* \end{bmatrix}$ și $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \dots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix}$, atunci

$[J_{\mathbf{x}}^*]^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ este o funcție scalară și hamiltonianul se scrie:

$$H = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + J_{x_1}^* f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + J_{x_2}^* f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \dots + J_{x_n}^* f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

Sumar al soluției problemei de CO utilizând ecuația HJB

Se va considera în continuare un sistem de ordinul 1 cu o singură intrare de comanda.

A. Problema de control optimal

Pentru un sistem descris de ecuația de stare:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (9)$$

cu $x(0) = x_0$, $t \in [t_0, t_f]$, se caută legea de comandă optimală $u^*(t)$ care minimizează funcția de cost:

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (10)$$

Sumar al soluției problemei de CO utilizând ecuația HJB

B. Soluție

- 1 Scrieți hamiltonianul:

$$H(x, u, t, J_x^*) = g(x, u, t) + J_x^* \cdot f(x, u, t) \quad (11)$$

- 2 Minimizați hamiltonianul în raport cu $u(t)$. Calculați condițiile necesare și suficiente pentru minim. Din:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

se obține $u^*(t)$ ca o funcție de (x, t, J_x^*) :

$$u^*(t) = U(x, t, J_x^*) \quad (12)$$

Verificați condiția suficientă pentru minim.

- 3 Obțineți valoarea minimă a hamiltonianului prin înlocuirea lui (12) în (11):

$$\min_u H = H(x, u^*, t, J_x^*)|_{u^*=U(x,t,J_x^*)}$$

$\min_u H$ va depinde numai de x, t, J_x^* .

Sumar al soluției problemei de CO utilizând ecuația HJB

4 Scrieți ecuația HJB

$$0 = J_t^* + \min_u H$$

și condiția finală:

$$J^*(x(t_f), t_f) = h(x(t_f), t_f)$$

5 Rezolvați ecuația HJB și obțineți $J^*(x(t), t)$.

6 Din soluția de la pasul 5 evaluați J_x^* și substituiți în expresia lui $u^*(t)$ din (12) pentru a obține comanda optimală.

- Ecuația HJB rezultă sub forma unei ecuații cu derivate parțiale.
- Obținerea soluției ecuației HJB poate fi dificilă. O abordare poate fi selectarea unei forme a soluției $J^*(x(t), t)$ care să transforme ecuația cu derivate parțiale într-o ecuație diferențială ordinară.

Exemplu

- Un sistem de ordinul 1 este descris de ecuația diferențială:

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad x \in [0, T]$$

cu T cunoscut. Se caută legea de comandă optimală care minimizează funcția de cost:

$$J = \frac{1}{4}x^2(T) + \int_0^T \frac{1}{4}u^2(t)dt$$

- Funcțiile g , f și h sunt:

$$g(x(t), u(t), t) = \frac{1}{4}u^2(t)$$

$$f(x(t), u(t), t) = x(t) + u(t)$$

$$h(x(T), T) = \frac{1}{4}x^2(T)$$

Exemplu

- Hamiltonianul este:

$$H(x(t), u(t), J_x^*) = \underbrace{\frac{1}{4}u^2(t)}_g + J_x^* \cdot \underbrace{(x(t) + u(t))}_f$$

- Condiția necesară pentru minim în raport cu $u(t)$ este:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{1}{2}u(t) + J_x^* = 0$$

de unde rezultă:

$$u^*(t) = -2J_x^* \quad (13)$$

- Condiția suficientă pentru minim: $u^*(t)$ determinat în (13) minimizează hamiltonianul pentru că

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = \frac{1}{2} > 0$$

- Minimul hamiltonianului în raport cu u :

$$\min_u H = \frac{1}{4}(-2J_x^*)^2 + J_x^* \cdot (x - 2J_x^*) = (J_x^*)^2 + J_x^* \cdot x - 2(J_x^*)^2 = J_x^* \cdot x - (J_x^*)^2$$

Exemplu

- Ecuația HJB:

$$0 = J_t^* + \min_u H$$

devine:

$$0 = J_t^* + J_x^* \cdot x - (J_x^*)^2 \quad (14)$$

- Condiția finală pentru J^* este:

$$J^*(x(T), T) = \frac{1}{4}x^2(T) \quad (15)$$

- O metodă de a rezolva ec. HJB este de a selecta o formă a soluției astfel încât ecuația cu derivate parțiale să se transforme într-o ecuație diferențială ordinară. Pentru că $J^*(x(T), T)$ este pătratic în $x(T)$ se alege:

$$J^*(x(t), t) = \frac{1}{2}p(t)x^2(t)$$

unde $p(t)$ este o funcție scalară de variabila t , necunoscută, care trebuie determinată.

Exemplu

- Derivatele parțiale ale $J^*(x, t) = \frac{1}{2}p(t)x^2(t)$ în raport cu x și t sunt:

$$J_x^* = \frac{\partial J^*(x, t)}{\partial x} = p(t)x(t)$$

$$J_t^* = \frac{\partial J^*(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\dot{p}(t)x^2(t)$$

- iar $u^*(t) = -2J_x^* = -2p(t)x(t) \Rightarrow$ lege de comandă cu reacție de la stare
- Ecuția HJB:

$$0 = \underbrace{\frac{1}{2}\dot{p}(t)x^2(t)}_{J_t^*} + \underbrace{p(t)x^2(t)}_{J_x^* \cdot x} - \underbrace{p^2(t)x^2(t)}_{(J_x^*)^2} \quad | : x^2(t)$$

- Deoarece această ecuație trebuie satisfăcută pentru orice $x(t)$, $p(t)$ poate fi determinată din:

$$\frac{1}{2}\dot{p}(t) - p^2(t) + p(t) = 0 \quad (16)$$

Exemplu

- Din condiția finală pentru $J^*(x(T), T)$ rezultă condiția finală pentru ecuația diferențială în $p(t)$.

$$J^*(x(T), T) = \frac{1}{2}p(T)x^2(T) = \frac{1}{4}x^2(T), \Rightarrow p(T) = \frac{1}{2}$$

- Soluția ecuației diferențiale ordinare:

$$\frac{1}{2}\dot{p}(t) - p^2(t) + p(t) = 0 \text{ cu condiția finală: } p(T) = \frac{1}{2}$$

este:

$$p(t) = \frac{1}{e^{2(t-T)} + 1}$$

pentru calculul detaliat vedeți notele de curs.

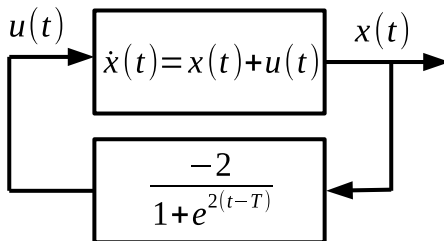
- Legea de comandă optimală rezultă:

$$u^*(t) = -2p(t)x(t) = -\frac{2}{1 + e^{2(t-T)}}x(t)$$

și este variabilă în timp.

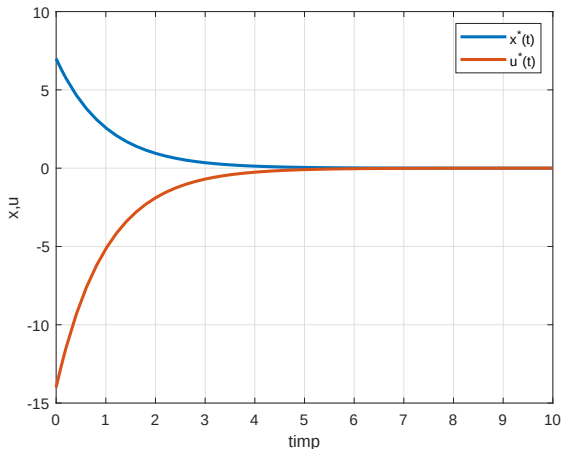
Exemplu

- Schema bloc a sistemului de control



Exemplu

- Sistemul dinamic: $\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$
- Funcția de cost: $J = \frac{1}{4}x^2(T) + \int_0^T \frac{1}{4}u^2(t)dt$
- Soluția problemei pentru $x(0) = 7$ și $T = 10$ sec.



- [1] Donald E. Kirk. *Optimal Control Theory. An Introduction*. Dover Publications, Inc., 2004.