

Regulatorul liniar pătratic (LQR)

Control optimal
Master CAP / Master ICAF

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

- 1 Problema de control optimal (LQR)
- 2 LQR pentru sisteme continue. Soluția utilizând ecuația Hamilton-Jacobi-Bellman
- 3 LQR pentru sisteme discrete. Soluția utilizând programare dinamică

Problema de control optimal

Pentru sistemul dinamic liniar:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

cu $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$ și $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_m(t)]^T$, se caută legea de reglare optimală $\mathbf{u}^*(t)$ care minimizează funcția de cost:

$$J = \mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{S}\mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)) dt \quad (2)$$

unde:

- $\mathbf{S}$, $\mathbf{Q}$ sunt matrici pătrate, simetrice, pozitiv semi-definite, de dimensiune $n \times n$, iar
- $\mathbf{R}$ este o matrice pătrată, simetrică, pozitiv-definită, de dimensiune $m \times m$.

Problema de control optimal (LQR)

Este necesar ca:

- 1 Toate variabilele de stare să fie măsurabile și disponibile pentru reacție, sau
- 2 Sistemul este observabil.
- 3 Sistemul este controlabil (sau $[A, B]$ este stabilizabilă).

Obs1. *Un sistem este controlabil dacă matricea*
 $Co(A, B) = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ *are rangul* n .

Obs2. *Un sistem este stabilizabil dacă toate stările ne-controlabile au dinamică stabilă.*

Comparați următoarele sisteme liniare:

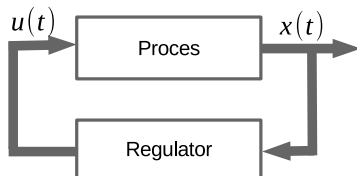
$$\underbrace{\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases}}_{\text{controlabil}}$$

$$\underbrace{\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 + u \end{cases}}_{\text{necontrolabil, nestabilizabil}}$$

$$\underbrace{\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 + u \end{cases}}_{\text{necontrolabil, stabilizabil}}$$

LQR. Schema bloc

Schema bloc LQR



- Semnalul de referință = 0.
- Obiectivul este să se obțină o lege de comandă $u^*(t)$ astfel încât stările să tindă spre 0 dintr-o stare inițială diferită de zero
- pentru sisteme instabile sau supuse perturbațiilor.

LQR. Funcția de cost

- Funcția de cost J este pătratică în stări și intrări:

$$J = \mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{S}\mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)) dt$$

- Matricile $\mathbf{Q}$, $\mathbf{S} \geq 0$ (pozitiv semidefinite) și $\mathbf{R} > 0$ (pozitiv definită) sunt simetrice.

- Dacă $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}$, $q_{11}, q_{22} \geq 0$, o formă pătratică este

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2$$

- Dacă $\mathbf{Q}$ este simetrică în forma:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix}, \quad q_{11}, q_{22}, q_{12} \geq 0$$

atunci forma pătratică este:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = q_{11}x_1^2 + 2q_{12}x_1x_2 + q_{22}x_2^2$$

LQR. Alegerea ponderilor

- Prin încercări repetate + simulare
- $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, $\mathbf{R} = \rho \mathbf{I}$.
 - Dacă ρ e mare, J poate fi scăzut cu un semnal de comandă mic $\Rightarrow$ valori mari ale stării.
 - Dacă ρ e mic, J descrește cu un semnal de comandă mare $\Rightarrow$ valori mici ale stării.
- (Bryson) Alegeți $\mathbf{Q}$ și $\mathbf{R}$ ca matrici diagonale:

$$q_{ii} = \frac{1}{\text{valoarea maximă acceptabilă pentru } x_i^2}, \quad i = \overline{1, n}$$

$$r_{jj} = \frac{1}{\text{valoarea maximă acceptabilă pentru } u_j^2}, \quad j = \overline{1, m}$$

LQR continuu. Soluția utilizând HJB

- Pentru sistemul liniar:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

se caută $\mathbf{u}^*(t)$ care minimizează:

$$J = \mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{S}\mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)) dt$$

- Ecuația HJB:

$$0 = \frac{\partial J^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} + \min_{\mathbf{u}} H$$

cu condiția finală:

$$J^*(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{S}\mathbf{x}(t_f)$$

LQR pentru sisteme continue. Soluția utilizând HJB

- Se minimizează hamiltonianul:

$$H = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + J_x^{*T} \cdot (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}) \quad (3)$$

în raport cu u . Prima derivată = 0:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 2\mathbf{R}\mathbf{u} + \left(J_x^{*T} \mathbf{B}\right)^T = 2\mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{B}^T J_x^* = 0 \quad (4)$$

- Rezultă:

$$\mathbf{u}^* = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T J_x^* \quad (5)$$

- Funcția de cost este pătratică și se alege (pentru o matrice $\mathbf{P}$ simetrică):

$$J^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x} \quad (6)$$

- Derivatele parțiale:

$$J_t^* = \frac{\partial J^*(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x}, \quad J_x^* = \frac{\partial J^*(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{P}(t) \mathbf{x} \quad (7)$$

LQR pentru sisteme continue. Soluția utilizând HJB

- Înlocuind expresia obținută pentru u^* în expresia hamiltonianului, minimul rezultă:

$$\min_u H = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

- Ecuația HJB este:

$$0 = \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

adică:

$$0 = \mathbf{x}^T \left(\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} + 2\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \right) \mathbf{x}$$

de unde se obține:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A} - \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) = 0 \quad (8)$$

Calculul detaliat este prezentat în notele de curs

- Condiția finală:

$$\mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{P}(t_f) \mathbf{x}(t_f) \text{ sau } \mathbf{P}(t_f) = \mathbf{S} \quad (9)$$

LQR pentru sisteme continue. Soluția utilizând HJB

Rezultă ecuația diferențială matricială Riccati

$$\begin{aligned}-\dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) \\ \mathbf{P}(t_f) &= \mathbf{S}\end{aligned}$$

Matricea $\mathbf{P}(t)$ este soluția ecuației matriciale diferențiale Riccati.

Din (5) și (7) legea de control optimal este dată de::

$$\mathbf{u}^*(t) = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T (2\mathbf{P}(t)\mathbf{x}) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t)\mathbf{x} = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x} \quad (10)$$

unde:

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) \quad (11)$$

iar legea de comandă este cu reacție de la stare.

LQR pentru sisteme continue

- Sumarizând, se dau matricile $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ din ecuația de stare, matricile $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ - din funcția de cost, matricea de cost terminal (dacă există) $\mathbf{S}$ și se caută : $\mathbf{P}(t)$, $\mathbf{K}(t)$.
- Practic, matricea de reacție de la stare $\mathbf{K}(t)$ este "aproape" constantă, adică s-ar putea utiliza soluția în regim staționar $\mathbf{P}_{\infty}$ și $\mathbf{K}_{\infty}$, ceea ce ar duce la simplificarea implementării.

Algoritmul pentru calculul matricii de reacție de la stare

- 1 Stabiliți matricile sistemului **A**, **B** și ponderile LQR: **S**, **Q**, **R**
- 2 Stabiliți intervalul de timp $t \in [0, t_f]$.
- 3 Setați condiția finală

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{S}$$

- 4 Integrați invers, de la $t = t_f$ la $t = 0$ (cu o metodă numerică precum Euler, Runge-Kutta, etc.) ecuația Riccati :

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P})$$

și calculați elementele matricii de reacție de la stare:

$$\mathbf{K}(t_k) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t_k)$$

(din calculul numeric pentru **K**, matricea o să rezulte cu valori de timp discrete în intervalul $t \in [0, t_f]$.)

Exemplu

Se consideră un sistem liniar și continuu descris de ecuația de stare:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad t \in [0, 10]$$

Se caută legea de control optimal $u^*(t)$, care minimizează funcția pătratică:

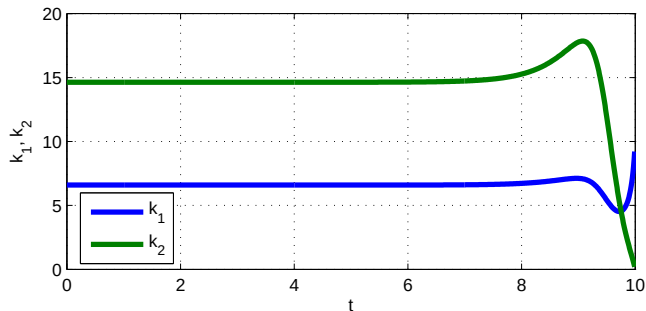
$$J = \mathbf{x}(10)^T \mathbf{S} \mathbf{x}(10) + \int_0^{10} [\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + u(t)^T \mathbf{R} u(t)]$$

unde:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

Deoarece sistemul are 2 stări, dimensiunea matricii $\mathbf{K}$ este 1×2 : $\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2]$. Algoritmul va calcula elementele k_1 , k_2 la fiecare moment de timp discret între $t_f = 10$ și $t_0 = 0$.

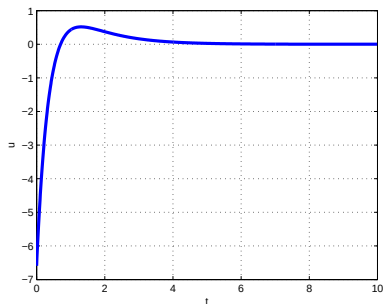
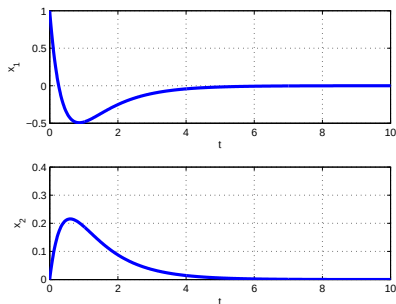
Exemplu



Matricea $\mathbf{K}(t)$ a fost calculată de la $t_f = 10$ la 0. Elementele sale converg la valori constante când $t \rightarrow 0$.

Exemplu

Simularea sistemului în buclă închisă.



Traectoriile de stare optimale (stânga) și comanda optimală (dreapta).

LQR pentru sisteme discrete

Problema LQR pentru sisteme discrete poate fi soluționată aplicând principiul optimalității.

Problema de CO

Se consideră un sistem linear discret, cu n variabile de stare și m variabile de intrare, descris în spațiul stărilor de:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \quad k = 0, 1 \dots N-1$$

cu condițiile inițiale $\mathbf{x}_0$.

Se caută secvența de comenzi $\mathbf{u}_0^*, \mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_{N-1}^*$ care minimizează funcția de cost:

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}_N^T \mathbf{H}_N \mathbf{x}_N + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} [\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k]$$

unde

- $\mathbf{H}_N, \mathbf{Q}$ sunt matrici simetrice, pozitiv semi-definite, de dimensiune $n \times n$
- $\mathbf{R}$ este o matrice simetrică, pozitiv definită de dimensiune $m \times m$

LQR pentru sisteme discrete

- Prin aplicarea relației de recurență a programării dinamice, de la timpul (discret) final $k = N$ la timpul inițial $k = 1$, secvența de comenzi optime se obține ca o lege cu reacție de la stare:

$$\mathbf{u}_k^* = -\mathbf{K}_k \cdot \mathbf{x}_k$$

unde

$$\mathbf{K}_k = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{A}$$

iar

$$\mathbf{H}_k = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_k)^T \mathbf{H}_{k+1} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_k) + \mathbf{K}_k^T \mathbf{R} \mathbf{K}_k + \mathbf{Q}$$

Pentru demonstrație, calcul detaliat și detalii vedeți notele de curs.

Algoritmul pentru calculul matricii de reacție de la stare

- 1 Stabiliți matricile sistemului $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ și ponderile LQR: $\mathbf{H} = \mathbf{H}_N$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$
- 2 Determinați numărul de momente de timp discret N .
- 3 **for** $k = N - 1$ **to** 1
 Calculați matricea $\mathbf{K}$ la pasul k :

$$\mathbf{K}_k = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{A}$$

 Calculați noua matrice $\mathbf{H}_k$:

$$\mathbf{H}_k = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_k)^T \mathbf{H}_{k+1} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_k) + \mathbf{K}_k^T \mathbf{R} \mathbf{K}_k + \mathbf{Q}$$

endfor

Exemplu

Se consideră un sistem liniar și continuu descris de ecuația de stare:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1.01 & 0.01 \\ 0.01 & 1.02 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix} u_k, \quad k = \overline{1, N-1}$$

cu perioada de eșantionare $dt = 0.01$. Se caută secvența de comenzi u_k , $k = \overline{1, N-1}$, care minimizează funcția de cost:

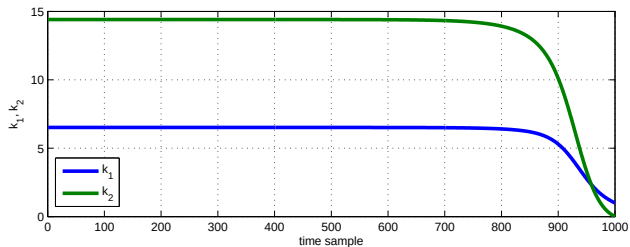
$$J = \mathbf{x}_N^T \mathbf{H}_N \mathbf{x}_N + \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k]$$

unde:

$$\mathbf{H}_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad R = 0.01$$

Deoarece sistemul are 2 stări, dimensiunea matricii $\mathbf{K}$ este 1×2 : $\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2]$. Algoritmul va calcula elementele k_1 , k_2 la fiecare moment de timp discret între $N-1$ and 1.

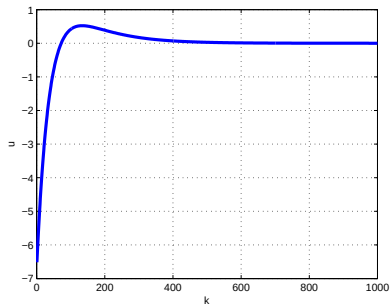
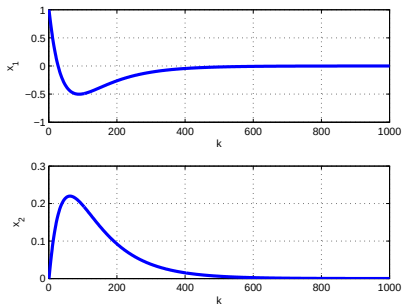
Exemplu



Elementele matricii $\mathbf{K}$ au fost calculate de la $k = N - 1$ la $k = 1$ și converg la valori constante când $k \rightarrow 1$.

Exemplu

Simularea sistemului în buclă închisă.



Trajectoriile de stare optimale (stânga) și comanda optimă (dreapta).