

Regulatorul liniar pătratic (LQR). Probleme de urmărire

Control optimal
Master CAP / Master ICAF

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

- 1 Problema de control optimal (LQR)
- 2 Problema de urmărire
 - Problema de urmărire cu precompensare
 - LQR-servo
- 3 Estimatoare de stare de ordin complet
- 4 Estimatoare de stare. Pași de proiectare pentru problema de stabilizare
- 5 Exemplu

Problema de stabilizare. Sumar

Pentru sistemul dinamic liniar:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

cu $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$ și $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_m(t)]^T$, se caută legea de reglare optimală $\mathbf{u}^*(t)$ care minimizează funcția de cost:

$$J = \mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{S}\mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)) dt \quad (2)$$

unde:

- $\mathbf{S}$, $\mathbf{Q}$ sunt matrici pătrate, simetrice, pozitiv semi-definite, de dimensiune $n \times n$, iar
- $\mathbf{R}$ este o matrice pătrată, simetrică, pozitiv-definită, de dimensiune $m \times m$.

Problema de stabilizare. Sumar

Este necesar ca:

- 1 Toate variabilele de stare să fie măsurabile și disponibile pentru reacție, sau
- 2 Sistemul este observabil.
- 3 Sistemul este controlabil (sau $[A, B]$ este stabilizabilă).

Obs1. Un sistem este controlabil dacă matricea $Co(A, B) = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ are rangul n .

Obs2. Un sistem este stabilizabil dacă toate stările ne-controlabile au dinamică stabilă.

Problema de stabilizare. Sumar

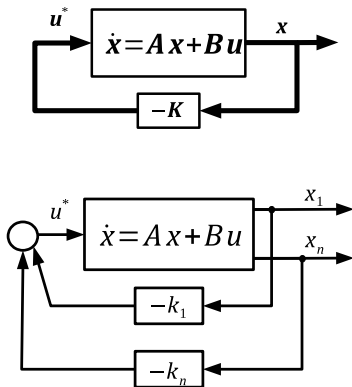
- Sistem de control cu reacție de la stare (*full state feedback* - reacție de la toate stările)
- Legea de control optimal rezultă:

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$

- Matricea de reacție de la stare $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_\infty$, unde $\mathbf{P}_\infty$ este soluția ecuației diferențiale matriciale Ricatti pt. $t_f \rightarrow \infty$.
- Dimensiuni:
 - vectorul de stare: $\mathbf{x}_{n \times 1} = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T$
 - vectorul de intrare: $\mathbf{u}_{m \times 1} = [u_1(t) \ u_2(t) \ \cdots \ u_m(t)]^T$
 - matricea de reacție de la stare: $\mathbf{K}_{m \times n}$
- de ex. pt $m = 1$ (o intrare): $\mathbf{K} = [k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_n]$, iar

$$u^*(t) = -[k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = -k_1x_1(t) - k_2x_2(t) - \cdots - k_nx_n(t)$$

Problema de stabilizare.Sumar



- Sistemul închis este descris de:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t), \quad \text{cu } \mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t)$$

Problema de urmărire

- Problema de urmărire: **ieșirea** sistemului trebuie să urmărească un semnal de **referință**: $\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{r}(t)$, pentru $t \rightarrow \infty$.
- Se consideră un sistem liniar descris de:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

- n - variabile de stare, m - variabile de intrare, p - variabile de ieșire.
- Dimensiunea matricilor: $\mathbf{A}_{n \times n}$, $\mathbf{B}_{n \times m}$, $\mathbf{C}_{n \times p}$.

LQR. Problema de urmărire. Precompensare

- O modalitate de a obține un sistem de urmărire este de a modifica legea de comandă LQR din forma:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(t)$$

în

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{N} \mathbf{r}(t) - \mathbf{K} \mathbf{x}(t) \quad (3)$$

- Matricea $\mathbf{N}$ se va calcula astfel încât $\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{r}(t)$, pentru $t \rightarrow \infty$.
- Ecuația de stare este:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \underbrace{(\mathbf{N}\mathbf{r}(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t))}_{\mathbf{u}(t)} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{N}\mathbf{r}(t)$$

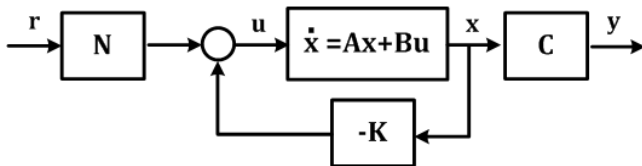
- Sistemul închis este descris de:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{N}\mathbf{r}(t) \quad (4)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (5)$$

LQR. Problema de urmărire. Precompensare

- Schema bloc de implementare pentru $\mathbf{u}(t) = \mathbf{N}\mathbf{r}(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$:



- Semnalul de referință este înmulțit cu $\mathbf{N}$ care va fi calculat astfel încât pentru o referință treaptă $\mathbf{r}(t)=\mathbf{Ref}$, ieșirea în regim staționar să fie $\mathbf{Ref}$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{Ref}$$

LQR. Problema de urmărire. Precompensare

- Se notează $\mathbf{x}_{ss}$ = vectorul de stare în regim staționar (= constant pentru o referință constantă). Ecuația de stare în regim staționar:

$$\dot{\mathbf{x}}_{ss}(t) = 0 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) \cdot \mathbf{x}_{ss} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{Ref}$$

de unde:

$$\mathbf{x}_{ss} = -(\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K})^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{Ref}$$

- Ieșirea în regim staționar:

$$\mathbf{y}_{ss}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_{ss} = -\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K})^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{Ref} = \mathbf{Ref}$$

- Matricea $\mathbf{N}$ rezultă:

$$\mathbf{N} = -(\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K})^{-1} \cdot \mathbf{B})^{-1} = -(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}_{cl}^{-1} \cdot \mathbf{B})^{-1}$$

unde $\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}$.

LQR. Problema de urmărire. Precompensare

$$\mathbf{N} = -(\underbrace{\mathbf{C}}_{p \times n} \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K})^{-1}}_{n \times n} \cdot \underbrace{\mathbf{B}}_{n \times m})^{-1} = -(\underbrace{\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}_{cl}^{-1} \cdot \mathbf{B}}_{p \times m})^{-1}$$

- Dacă numărul de ieșiri p este egal cu numărul de intrări m , matricea $\mathbf{C}\mathbf{A}_{cl}^{-1}\mathbf{B}$ este pătrată, altfel va avea dimensiunea $p \times m$ și nu poate fi inversată.
- Dacă numărul de ieșiri este mai mare decât numărul de intrări, $p > m$, relația

$$-\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K})^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{Ref} = \mathbf{Ref} \quad (6)$$

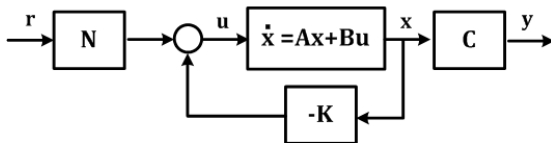
va avea soluții numai în cazuri particulare. Nu sunt suficiente grade de libertate pentru ca ieșirea să urmărească referința.

- Dacă numărul de ieșiri este mai mic decât numărul de intrări, $p < m$, vor exista mai multe soluții ale ecuației (6). Se pot alege unele dintre ele, sau se mărește vectorul de ieșiri (de exemplu se adaugă variabile de stare) astfel încât $p = m$.

LQR. Problema de urmărire. Precompensare

Algoritm:

- Se stabilesc matricile sistemului: $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$
- Se stabilește funcția de cost: matricile $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$.
- Se analizează controlabilitatea sistemului $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.
- Se calculează matricea de reacție de la stare $\mathbf{K}$.
- Se calculează matricea de precompensare $\mathbf{N} = -(\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K})^{-1} \cdot \mathbf{B})^{-1}$.
- Se implementează schema de urmărire.



LQR - servo. Adăugarea efectului integrator

- Se va proiecta o lege de control LQR astfel încât **ieșirile** ($p \times 1$) sistemului să urmărească referința $\mathbf{r}(t)$.

Ecuatiile de stare:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

- *LQR-servo*: se adaugă noi stări $\mathbf{z}(t) =$ integrala erorii de urmărire:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (7)$$

- Dinamica extinsă a sistemului este:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{r} \quad (8)$$

unde $\bar{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{x}(t) \ \mathbf{z}(t)]^T$.

- În regim staționar $\dot{\mathbf{z}} = 0$, i.e. $\mathbf{r} = \mathbf{y}$ or $\mathbf{r} = \mathbf{C}\mathbf{x}$.

- Legea de control calculată pentru funcția de cost:

$$J = \int_0^{\infty} [\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q}_x \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_u \mathbf{u}] dt \quad (9)$$

este o lege de reacție de la *toate stările* dată de:

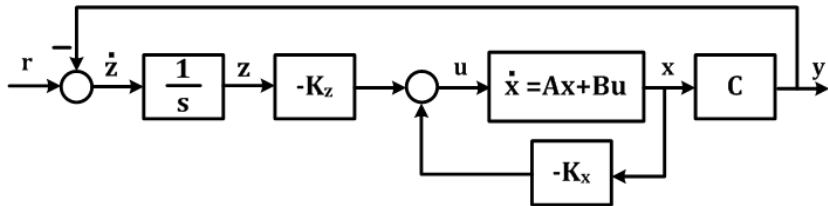
$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_e \cdot \bar{\mathbf{x}}(t) = -[\mathbf{K}_x \quad \mathbf{K}_z] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

și calculată cu procedura LQR, cu matricile sistemului extins:

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (11)$$

unde perechea $(\mathbf{A}_e, \mathbf{B}_e)$ este controlabilă.

- După obținerea matricilor $\mathbf{K}_x$ și $\mathbf{K}_z$, o implementare tipică este:.



- Ecuatiile care descriu sistemul:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{u}(t) = -[\mathbf{K}_x \quad \mathbf{K}_z] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_x\mathbf{x}(t) - \mathbf{K}_z\mathbf{z}(t)$$

LQR-servo. Implementare

- Pentru un sistem liniar cu n stări, m intrări și p ieșiri:
- Se dau matricile sistemului $\mathbf{A}_{n \times n}$, $\mathbf{B}_{n \times m}$, $\mathbf{C}_{p \times n}$.
- Se calculează matricile sistemului extins:

$$\underbrace{\mathbf{A}_e}_{(n+p) \times (n+p)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times p} \\ -\mathbf{C}_{p \times n} & \mathbf{0}_{p \times p} \end{bmatrix}, \quad \underbrace{\mathbf{B}_e}_{(n+p) \times m} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{n \times m} \\ \mathbf{0}_{p \times m} \end{bmatrix}$$

- Se analizează controlabilitatea sistemului extins ($\mathbf{A}_e$, $\mathbf{B}_e$)
- Se stabilesc matricile $\underbrace{\mathbf{Q}_x}_{(n+p) \times (n+p)}$ și $\underbrace{\mathbf{R}_u}_{m \times m}$ din funcția de cost.
- Cu procedura LQR se calculează matricea de reacție de la stare pentru sistemul extins: $\underbrace{\mathbf{K}_e}_{m \times (n+p)} = [\mathbf{K}_x \quad \mathbf{K}_z]$ și se descompune în $\underbrace{\mathbf{K}_x}_{m \times n}$ și $\underbrace{\mathbf{K}_z}_{m \times p}$
- Se implementează schema bloc a sistemului de urmărire.

Regulatorul liniar pătratic (LQR). Estimarea stării

Control optimal
Master CAP / Master ICAF

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Estimatoare de stare de ordin complet

- Proiectarea LQR se bazează pe disponibilitatea *tuturor* stărilor pentru reacție, la orice moment de timp.
- Dacă se cunosc condițiile inițiale pentru toate stările, atunci stările $\mathbf{x}(t)$ pot fi obținute din ecuația de stare $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$.
- Dacă unele stări nu pot fi măsurate, nu se cunosc nici condițiile inițiale ale acestora.
- Este posibil ca numai o parte din stări să fie disponibile, sau se dorește utilizarea unui număr mai mic de senzori.
- Dacă sistemul este complet *observabil*, este posibilă estimarea stărilor din măsurători ale ieșirii și intrării.
- Se vor prezenta numai estimatoare de ordin complet, care estimează *toate* stările sistemului. Este posibilă proiectarea estimatoarelor de ordin redus care estimează numai stările care nu pot fi măsurate direct [? ?].

Estimatoare de stare

- Se consideră sistemul liniar:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (12)$$

- Se notează cu $\hat{\mathbf{x}}(t)$ - starea estimată, și cu $\hat{\mathbf{y}}(t)$ - ieșirea estimată.
- Un estimator de stare de ordin complet al sistemului (12) este dat de:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (13)$$

- Matricea de corecție $\mathbf{L}$ se introduce pentru a corecta starea estimată $\hat{\mathbf{x}}(t)$ astfel încât aceasta să tindă la starea reală $\mathbf{x}(t)$ când $t \rightarrow \infty$.
- Eroarea de estimare

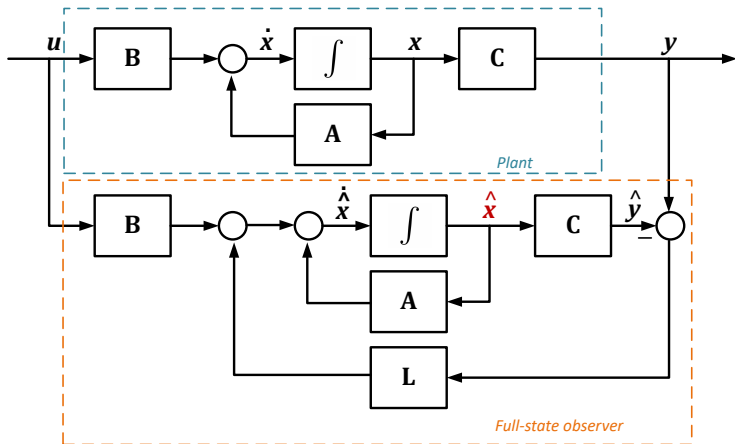
$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (14)$$

tinde la 0 când $t \rightarrow \infty$.

- Dacă sistemul este complet observabil, matricea $\mathbf{L}$ poate fi determinată astfel încât eroarea de estimare să fie asimptotic stabilă [?].

Estimatoare de stare. Schema bloc

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$



Estimatoare de stare

- Prin derivarea erorii de estimare (14) împreună cu (12) și (13) rezultă:

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{Bu} - \mathbf{L}(\mathbf{Cx} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{LC}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$$

- Eroarea de estimare este dată de:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e}(t) \quad (15)$$

- Rezultă că eroarea de estimare $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0$ pt. $t \rightarrow \infty$, din orice condiții inițiale $\mathbf{e}(t_0)$ dacă sistemul (15) este asimptotic stabil = toate valorile proprii ale matricii $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ sunt localizate în semiplanul stâng al planului complex.
- Matricea $\mathbf{L}$ poate fi determinată, de exemplu prin alocarea polilor. Se aleg polii estimatorului $[ep_1 \quad ep_2 \quad \cdots \quad ep_n]$ egali cu valorile proprii ale matricii sistemului erorii și se rezolvă:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})) = (\lambda_1 - ep_1)(\lambda_2 - ep_2) \cdots (\lambda_n - ep_n)$$

- Viteza cu care eroarea de estimare scade este dată de polii estimatorului. Aceștia se plasează în semiplanul stâng și, în general, trebuie să fie mult mai rapizi decât polii procesului.
- O modalitate de a alege polii estimatorului: de aprox. 5 – 10 ori în stânga polilor dominanți ai procesului.

Dualitatea controlabilitate-observabilitate

- Se consideră sistemele:

$$(S1): \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (S2): \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}^T\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}^T u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{B}^T\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- Matricile de controlabilitate (Co) și observabilitate (Ob):

$$Co_1 = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}], \quad Ob_1 = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \quad \dots \quad \mathbf{A}^{T^{n-1}}\mathbf{C}^T]$$
$$Co_2 = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \quad \dots \quad \mathbf{A}^{T^{n-1}}\mathbf{C}^T], \quad Ob_2 = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

- Sistemele S_1 și S_2 sunt controlabile/observabile dacă matricile Co/Ob au rang complet.
- S_1 este controlabil dacă S_2 este observabil. S_2 este controlabil dacă S_1 este observabil.
- Problema de proiectare a estimatorului = problema de proiectare a regulatorului pentru sistemul dual.

Estimatoare de stare

- Matricea de corecție a estimatorului $\mathbf{L}^T$ se poate obține cu o procedură similară calculului unui regulator cu reacție de la stare, cu matricea sistemului închis $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ și înlocuirile: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^T$, $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}^T$ și $\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}^T$.

Reglare după stare

- Pentru un sistem
 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$
- cu legea de reglare: $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$
- Sistemul închis este:
 $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t)$
- Se aleg polii $\mathbf{p}$ ai lui $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$
- Se calculează $\mathbf{K}$ din $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{p}$
- de ex. Matlab: $\mathbf{K} = \text{place}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{p})$
- sau se calculează $\mathbf{K}$ prin LQR

Estimator de stare

-
-
- Dinamica erorii de estimare:
 $\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e}(t)$
- Se aleg polii estimatorului $\mathbf{ep}$
- Se calculează $\mathbf{L}^T$ din $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{C}^T$, $\mathbf{ep}$
- de ex. Matlab: $\mathbf{L} = \text{place}(\mathbf{A}', \mathbf{C}', \mathbf{ep})'$
- sau se calculează $\mathbf{L}^T$ prin LQR

Estimatoare de stare. Principiul separării

- Se consideră sistemul complet controlabil și observabil

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (16)$$

- Legea de reglare pe baza stării estimate $\hat{\mathbf{x}}(t)$ este:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (17)$$

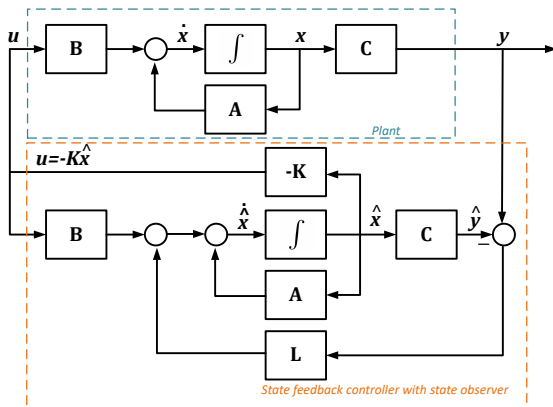
unde matricea de reacție de la stare $\mathbf{K}$ se calculează cu orice metodă, inclusiv LQR.

- Principiul separării arată că regulatorul ($\mathbf{K}$) și estimatorul ($\mathbf{L}$) pot fi proiectate independent pentru că nu depind unul de celălalt. *Pentru calculul detaliat vezi notele de curs, secțiunea 5.2*

LQR cu estimator de stare. Schema bloc

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

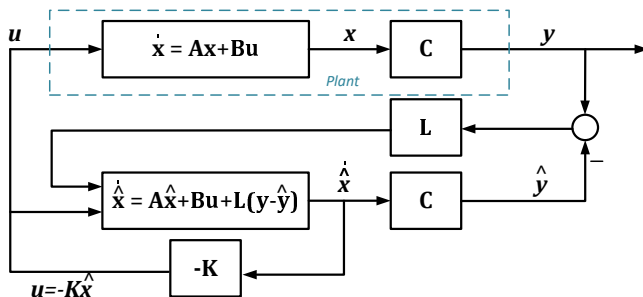
$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$$



LQR cu estimator de stare. Schema bloc simplificată

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$$



LQR cu estimator de stare. Modelul sistemului

- Ecuațiile de stare pentru proces și estimator:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))\end{aligned}$$

- cu legea de reglare: $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)$, devin:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) = \\ &= \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(t)\end{aligned}$$

- Ecuațiile de ieșire pentru proces și estimator:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)\end{aligned}$$

- Modelul în formă matricială este:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{L}\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad (19)$$

LQR cu estimator de stare. Pași de proiectare

- Se consideră sistemul în buclă deschisă cu matricile: $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ și $\mathbf{D} = \mathbf{0}$. (Cazul $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$ poate fi tratat similar cu ce s-a prezentat anterior).
- Se analizează controlabilitatea și observabilitatea sistemului.
- Se proiectează matricea de reacție de la stare $\mathbf{K}$. Dacă metoda este LQR, se aleg $\mathbf{Q}$ și $\mathbf{R}$ și se calculează $\mathbf{K}$.
- Se aleg polii estimatorului ep_i , $i = \overline{1, n}$, de exemplu de 5 – 10 ori în stânga polilor dominanți ai sistemului închis $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$.
- Se calculează matricea de corecție a estimatorului $\mathbf{L}$, de exemplu, prin alocarea polilor. Dacă se calculează cu procedura LQR, nu este necesară alegerea polilor, ci a unui set de matrici $\mathbf{Q}_e$, $\mathbf{R}_e$.
 $\mathbf{L}$ poate fi determinată similar cu calculul unei matrici de reacție de la stare pentru un sistem cu matricile $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$.
De exemplu, în Matlab: $L = place(\mathbf{A}', \mathbf{C}', [ep1 \ ep2 \dots])'$. Observați că rezultatul se transpune.

LQR cu estimator de stare. Pași de proiectare

- **Condiții inițiale.** Dacă stările nu pot fi măsurate, în general nu se cunosc condițiile inițiale pentru acestea. Valorile inițiale pentru stările estimate se aleg $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$.
Estimatorul ar trebui să poată face ca stările estimate să tindă la stările reale din orice condiții inițiale. În general, pentru simulare condițiile inițiale $\mathbf{x}_0$, $\hat{\mathbf{x}}_0$ se aleg diferite.
- Se implementează sistemul de reglare cu reacție de la starea estimată.
 - Se poate implementa o schemă bloc pentru simulare în Simulink.
 - Se poate simula sistemul dat de ecuațiile (18), (19) din condițiile inițiale $\mathbf{x}_0$, $\hat{\mathbf{x}}_0$.

Exemplu

- Se consideră un sistem liniar:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}_0 = [-10 \ 10]^T \\ y &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

- Se proiectează un regulator LQR cu estimator pentru stabilizarea sistemului.

1. Sistemului cu matricile

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

este complet controlabil și observabil. Rangul matricilor $Co = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB}]$ și $Ob = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}$ este 2.

Exemplu

2. Se selectează matricile $\mathbf{Q}$ și $\mathbf{R}$ și se calculează $\mathbf{K}$, de exemplu:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \quad \mathbf{K} = \text{lqr}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}) \Rightarrow \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4.7359 & 0.4142 \end{bmatrix}$$

3. Legea de reglare este $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ și sistemul închis este descris de :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} \quad (\text{și}) \quad y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

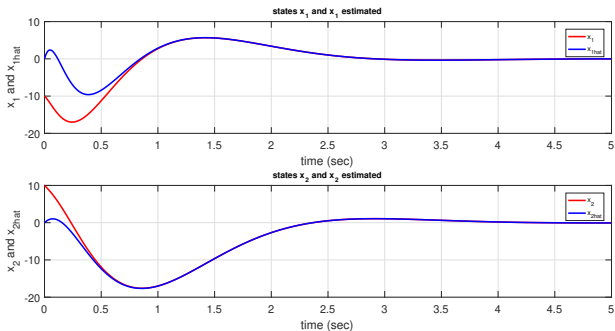
4. Se proiectează estimatorul.

1 Matricea sistemului închis fără estimator $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ are valorile proprii $\lambda_{1,2} = -1.37 \pm 1.54i$. Polii estimatorului se aleg, de exemplu de 5 – 6 ori mai în stânga părții reale a lui $\lambda_{1,2}$: $ep_1 = 5 \cdot \text{real}(\lambda_1)$, $ep_2 = 6 \cdot \text{real}(\lambda_2)$.

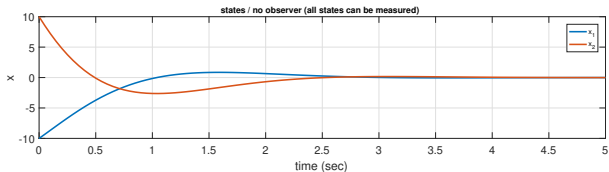
2 Se calculează $\mathbf{L}^T$ prin alocarea polilor, utilizând matricile $\mathbf{A}^T$ și $\mathbf{C}^T$: $\mathbf{L} = \text{place}(\mathbf{A}', \mathbf{C}', [ep_1 \ ep_2])'$.

5. Se stabilesc condițiile inițiale pentru proces $\mathbf{x}_0 = [-10 \ 10]^T$ și pentru estimator: $\hat{\mathbf{x}}_0 = [0 \ 0]^T$.
6. Se implementează schema bloc de simulare sau se simulează modelul de stare din condițiile inițiale date.

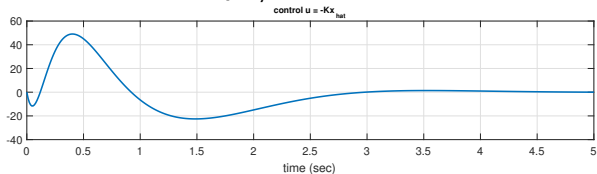
■ Stările sistemului cu LQR și estimator



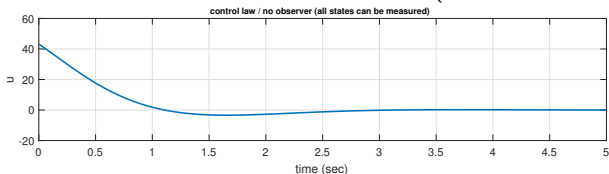
■ Stările sistemului cu LQR *fără* estimator (dacă ar putea fi măsurate)



■ Comanda sistemului cu LQR și estimator

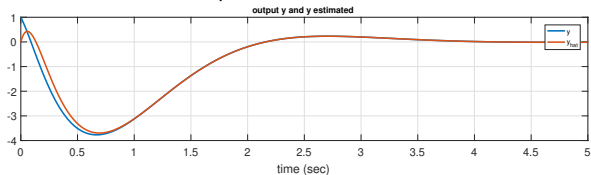


■ Comanda sistemului cu LQR *fără* estimator (stările sunt măsurate)



Exemplu

■ leșirea sistemului cu LQR și estimator



■ leșirea sistemului cu LQR *fără* estimator (stările sunt măsurate)

