

Elemente de calculul variațiilor

Control optimal
Master CAP / Master ICAF

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

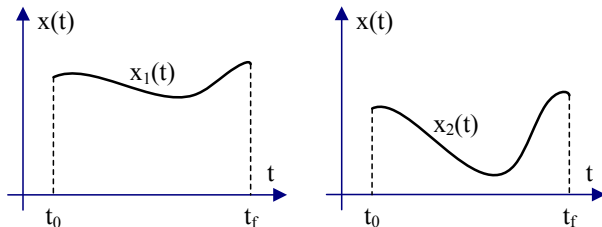
- 1 Funcționale
- 2 Ecuația Euler-Lagrange
- 3 Control optimal prin calcul variațional

Funcționale

- O "funcție de funcții", cu valori în mulțimea numerelor reale.
- *Exemplu:* Dacă $x(t)$ este o funcție continuă de t , definită pe intervalul $[t_0, t_f]$, o funcțională J este:

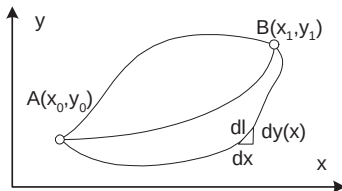
$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} x(t) dt,$$

J are o valoare reală egală cu aria de sub curba $x(t)$, pentru $t \in [t_0, t_f]$. Pentru diferite funcții $x_1(t)$ sau $x_2(t)$, J are valori reale diferite.



Exemplu:

- Lungimea l a unui arc care conectează două puncte $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ în planul $x - y$.



- Un arc poate fi calculat ca:

$$l = l(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} dl(x) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{dx^2 + dy(x)^2} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2} dx$$

unde:

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

Funcția de cost (problema de control optimal)

Exemplu:

- Se caută $\mathbf{u}^*(t)$ care minimizează:

$$J = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau$$

cu restricțiile:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

- Problemă de minimizare a unei funcționale cu restricții de tip ecuație diferențială.

Ecuția Euler-Lagrange

- **Problema:** Se consideră două puncte (t_0, x_0) și (t_f, x_f) în planul (t, x) . Se dorește determinarea unei curbe (traectorii) *extremale* care unește cele două puncte astfel încât funcționala:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} g(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

să aibă valoarea minimă (sau maximă).

- Ecuția fundamentală a calculului variațiilor stabilește că J are o valoare staționară dacă este satisfăcută **ecuația Euler-Lagrange**:

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (1)$$

- Curbele $x = x(t)$ care sunt soluții ale ecuației Euler-Lagrange se numesc *extremale* (minimizează sau maximizează J).

Ecuția Euler-Lagrange

■ Ecuția Euler-Lagrange:

$$g_x - \frac{d}{dt}g_{\dot{x}} = 0$$

pentru care se cunosc: $x(t_0) = x_0$ și $x(t_f) = x_f$.

Exemplu: Determinați extremala funcționalei:

$$J = \int_0^{\pi/2} (\dot{x}(t)^2 - x(t)^2) dt = \int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2) dt, \quad \text{cu } x(0) = 0, \quad x(\pi/2) = 1$$

■ Ecuția E-L:

$$g_x - \frac{d}{dt}g_{\dot{x}} = \frac{\partial}{\partial x}(\dot{x}^2 - x^2) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\dot{x}^2 - x^2) \right) = 0$$

$$-2x - \frac{d}{dt}(2\dot{x}) = -2x - 2\ddot{x} = 0$$

sau

$$\ddot{x} + x = 0$$

Ecuția Euler-Lagrange

- Ecuția caracteristică $s^2 + 1 = 0$ are două rădăcini complexe $s_{1,2} = \pm j$ și soluția este :

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

- Din condițiile pe frontieră:

$$x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 0$$

$$x(\pi/2) = c_1 \cos \pi/2 + c_2 \sin \pi/2 = c_2 = 1$$

se obține extremala $x(t) = \sin t$.

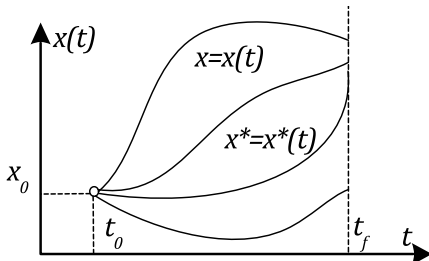
- Funcționala J poate fi minimizată sau maximizată numai de extremala $x(t) = \sin t$.
- Valoarea extremală este:

$$J^*(\sin t) = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^2 - \sin(t)^2 dt = \int_0^{\pi/2} \cos(2t) dt = \frac{1}{2}(\sin(\pi) - \sin(0)) = 0$$

Condiții de transversalitate. Prima condiție

Timpul final t_f dat, starea finală $x(t_f)$ necunoscută

- Curbele admisibile încep în același punct și se termină pe o linie verticală:



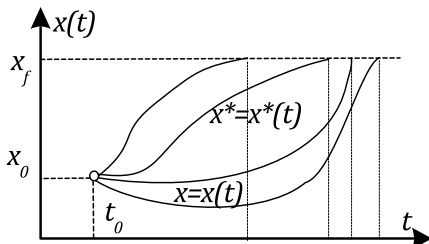
- Condiția necesară naturală sau *prima condiție de transversalitate*:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} g(x, \dot{x}, t)|_{t=t_f} = 0 \quad \text{sau} \quad g_{\dot{x}}|_{t=t_f} = 0$$

Condiții de transversalitate. A doua condiție

Timul final t_f necunoscut, starea finală $x(t_f)$ dată

- Curbele admisibile încep în același punct și se termină pe o linie verticală:



- A doua condiție de transversalitate este condiția necesară ca:

$$\left(g - \dot{x} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) \Big|_{t=t_f} = 0, \quad \text{sau} \quad (g - \dot{x} g_{\dot{x}}) \Big|_{t=t_f} = 0$$

Exemplu

Determinați extremala funcționalei:

$$J = \int_1^{t_f} (2x(t) + \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2) dt$$

cu $x(1) = 4$, $x(t_f) = 4$ și $t_f > 1$ necunoscut.

■ Ecuația Euler-Lagrange:

$$g_x - \frac{d}{dt}g_{\dot{x}} = 2 - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} (2x - \frac{1}{2}\dot{x}^2) \right) = 2 - \ddot{x} = 0$$

sau

$$\ddot{x}(t) = 2$$

de unde: $\dot{x}(t) = 2t + c_1$, și rezultă: $x(t) = t^2 + c_1 t + c_2$.

■ Timpul final t_f nu este specificat. Din a doua condiție de transversalitate rezultă:

$$(g - \dot{x}g_{\dot{x}})|_{t=t_f} = \underbrace{(2x(t) + \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2)}_{g(t,x,\dot{x})} - \underbrace{\dot{x}(t) \cdot \dot{x}(t)}_{g_{\dot{x}}} \Big|_{t=t_f} = 0$$

Exemplu

- Rezultă:

$$2x(t_f) - \frac{1}{2}\dot{x}(t_f)^2 = 0 \Rightarrow 2(t_f^2 + c_1 t_f + c_2) - \frac{1}{2}(2t_f + c_1) = 0$$

- De unde:

$$4t_f^2 + 4c_1 t_f + 4c_2 - 2t_f - c_1 = 0$$

care împreună cu condițiile pe frontieră:

$$x(1) = 1 + c_1 + c_2 = 4$$

$$x(t_f) = t_f^2 + c_1 t_f + c_2 = 4$$

formează un sistem de 3 ecuații cu 3 necunoscute, din care: $c_1 = -6$, $c_2 = 9$, $t_f = 5$.

- Rezultă extremala:

$$x(t) = t^2 - 6t + 9, \text{ si } t_f = 5$$

Ecuția E-L pentru funcții de mai multe variabile

- Pentru o funcțională care depinde de $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} g(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt = \int_{t_0}^{t_f} g(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) dt$$

extremalele satisfac n ecuații Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0, \text{ sau } g_{x_i} - \frac{d}{dt} g_{\dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

- În formă matricială:

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) = 0$$

unde:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \dots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{bmatrix}$$

Ecuția E-L pentru funcții de mai multe variabile

Condițiile de transversalitate

- Prima condiție de transversalitate (timpul final t_f dat, starea finală $\mathbf{x}(t_f)$ necunoscută):

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \Big|_{t=t_f} = 0$$

Explicit:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}_1} \Big|_{t=t_f} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial \dot{x}_n} \Big|_{t=t_f} \end{bmatrix} = 0$$

- A doua condiție de transversalitate (t_f necunoscut, starea finală $\mathbf{x}(t_f)$ dată)

$$\left(g - \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right]^T \dot{\mathbf{x}} \right)_{t=t_f} = 0$$

explicit:

$$\left(g(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) - \frac{\partial g}{\partial \dot{x}_1} \cdot \dot{x}_1 - \dots - \frac{\partial g}{\partial \dot{x}_n} \cdot \dot{x}_n \right)_{t=t_f} = 0$$

Ecuția E-L cu restricții de tip egalitate

- Se determină un set de condiții necesare pentru ca un vector de funcții $\mathbf{x}^*(t)_{n \times 1}$ să fie extremalele unei funcționale:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) dt$$

cu restricțiile

$$f_i(\mathbf{x}(t), t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m < n$$

- Un mod de soluționare - substituție: se rezolvă sistemul de m restricții (dacă este posibil) și de determină m variabile x_i în funcție de celelalte $n - m$ variabile. Se înlocuiesc în funcția g și rezultă o problemă de minimizare fără restricții a unei funcționale care depinde de $n - m$ variabile.

Ecuția E-L cu restricții de tip egalitate

- *Multiplicatori Lagrange*. Se formează o funcțională extinsă (*augmentată*):

$$\begin{aligned} J_a(\mathbf{x}, \lambda) &= \int_{t_0}^{t_f} [g(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) + \lambda_1(t)f_1(\mathbf{x}(t), t) + \dots + \lambda_m(t)f_m(\mathbf{x}(t), t)] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [g(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) + \lambda^T(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)] dt \end{aligned}$$

- Multiplicatorii Lagrange $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sunt funcții de timp.
- Se definește *integrandul augmentat*:

$$g_a(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \lambda(t), t) = g(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) + \lambda^T(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$$

- Ecuția Euler-Lagrange pentru g_a :

$$\frac{\partial g_a}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \lambda, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \lambda, t) \right) = 0$$

este un set de n ecuații diferențiale de ordinul 2.

- Se adaugă sistemul de m restricții de tip egalitate:

$$f_i(\mathbf{x}(t), t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m < n$$

- Rezultă $n + m$ condiții necesare pentru ca $\mathbf{x}(t)$ să fie extremale.
- Necunoscute: n variabile $x_i(t)$ și m multiplicatori $\lambda_i(t)$.

Exemplu

- Se caută condițiile necesare care trebuie satisfăcute de o curbă de lungime minimă, de pe sfera $x_1^2(t) + x_2^2(t) + t^2 = R^2$, pentru $t \in [t_0, t_f]$, care unește două puncte date: $\mathbf{x}_0, t_0$ și $\mathbf{x}_f, t_f$.
- În spațiul 3D (t, x_1, x_2) , lungimea unei curbe se poate scrie:

$$J(\mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{1 + \dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)} dt$$

- Se caută condițiile necesare pentru minim a funcționalei J cu restricția de tip egalitate: $x_1^2(t) + x_2^2(t) + t^2 = R^2$ (ecuația sferei).
- Funcția augmentată:

$$g_a(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \lambda, t) = \sqrt{1 + \dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)} + \lambda(t)(x_1^2(t) + x_2^2(t) + t^2 - R^2)$$

- Din ecuația E-L rezultă 2 ecuații diferențiale:

$$\frac{\partial g_a}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}_1} \right) = 2x_1\lambda - \frac{d}{dt} [\dot{x}_1(1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{-1/2}] = 0$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}_2} \right) = 2x_2\lambda - \frac{d}{dt} [\dot{x}_2(1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{-1/2}] = 0$$

- Se adaugă restricția, ca a treia ecuație (algebrică).

Ecuția E-L cu restricții de tip ecuație diferențială

- Se caută condițiile necesare pentru ca funcțiile $\mathbf{x}(t)$ să fie extremale ale funcționalei:

$$J(\mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) dt$$

unde $\mathbf{x}$ este un vector de $(n + m) \times 1$ funcții care satisfac n ecuații diferențiale:

$$f_i(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Problema este una de control optimal dacă cele n ecuații diferențiale reprezintă un model în spațiul stărilor. Variabilele $\mathbf{x}$ corespund unui vector de $n + m$ funcții $\underbrace{[\mathbf{x}]_n}_{n} \mid \underbrace{[\mathbf{u}]_m}_{m} \Big]^T$.

- Funcția augmentată:

$$g_a(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \lambda(t), t) = g(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) + \lambda(t)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)$$

unde $\lambda(t)$ este un vector de n funcții de timp (multiplicatori Lagrange).

Ecuția E-L cu restricții de tip ecuație diferențială

- Ecuția Euler - Lagrange:

$$\frac{\partial g_a}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \right] = 0$$

- Restricțiile în formă matricială:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) = 0$$

- Rezultă $n + m$ ecuații E-L (ecuații diferențiale) și n restricții de tip ecuație diferențială.
- Variabile: $n + m$ variabile $x_i(t)$ (n stări și m intrări) + n multiplicatori Lagrange $\lambda_i(t)$.

Exemplu

Sistemul:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t)$$

trebuie controlat astfel încât să se minimizeze funcția de cost:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} [x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)] dt$$

Se caută un set de condiții necesare pentru control optimal.

- Restricțiile de tip ecuație diferențială sunt:

$$f_1(\mathbf{x}, u) = x_2(t) - x_1(t) - \dot{x}_1(t)$$

$$f_2(\mathbf{x}, u) = -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t) - \dot{x}_2(t)$$

- Funcția augmentată g_a este:

$$g_a(\mathbf{x}, u, \lambda) = \frac{1}{2} [x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)] + \lambda_1(t)(x_2(t) - x_1(t) - \dot{x}_1(t)) + \\ + \lambda_2(t)(-2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t) - \dot{x}_2(t))$$

Exemplu

- Ecuațiile Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial g_a}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}_1} \right] = x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 + \dot{\lambda}_1 = 0$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}_2} \right] = x_2 + \lambda_1 - 3\lambda_2 + \dot{\lambda}_2 = 0$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{u}} \right] = u + \lambda_2 = 0$$

- Se obțin ecuațiile diferențiale:

$$\dot{\lambda}_1 = -x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2$$

$$\dot{\lambda}_2 = -x_2 - \lambda_1 + 3\lambda_2$$

și ecuația algebrică (deoarece $\dot{u}$ nu apare în g_a)

$$u + \lambda_2 = 0$$

- Celelalte două ecuații care trebuie satisfăcute de extreme sunt restricțiile:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u$$

Control optimal prin calcul variațional

- Se consideră problema minimizării unei funcții de cost

$$J = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

cu restricțiile:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

- Problema este de a determina un control admisibil $\mathbf{u}^*(t)$ care face ca sistemul dinamic să urmeze o traiectorie $\mathbf{x}^*(t)$ astfel încât să minimizeze funcția de cost.
- Se consideră inițial că:
 - stările $\mathbf{x}^*(t)$ și intrările $\mathbf{u}^*(t)$ nu sunt mărginite
 - condițiile inițiale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ și timpul inițial t_0 sunt date.
 - $\mathbf{x}(t)$ este un vector de stare de dimensiune $n \times 1$ și $\mathbf{u}(t)$ este un vector de intrări de dimensiune $m \times 1$.

Condiții necesare pentru control optimal

- Avem o problema cu $n + m$ funcții $(\mathbf{x}(t)_{n \times 1}, \mathbf{u}(t)_{m \times 1})$ care trebuie să satisfacă sistemul de n restricții de tip ecuație diferențială.
- Diferența față de secțiunea anterioară este prezența termenului $h(\mathbf{x}(t_f), t_f)$ în funcția de cost.
- Dacă h este o funcție derivabilă, se poate scrie:

$$h(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}[h(\mathbf{x}(t), t)]dt + h(\mathbf{x}(t_0), t_0)$$

iar funcția de cost devine:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \frac{d}{dt}(h(\mathbf{x}(t), t)) \right] dt + h(\mathbf{x}(t_0), t_0)$$

- Deoarece $\mathbf{x}_0$ și t_0 sunt fixate, termenul $h(\mathbf{x}(t_0), t_0)$ nu afectează minimul, deci se poate considera numai funcționala:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_f} \left[g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \frac{d}{dt}(h(\mathbf{x}(t), t)) \right] dt$$

Condiții necesare pentru control optimal

- Derivata în raport cu timpul pentru $h(\mathbf{x}(t), t)$ se calculează (*chain rule*):

$$\frac{d}{dt}h(\mathbf{x}(t), t) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial h}{\partial t}$$

- iar funcționala devine:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), t) \right]^T \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) \right\} dt$$

- Se scrie funcția extinsă g_a și se includ multiplicatorii

$$\lambda^T(t) = [\lambda_1(t) \ \dots \ \lambda_n(t)]^T:$$

$$g_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t) = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \right]^T \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \lambda^T(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}})$$

Condiții necesare pentru control optimal

Ecuațiile Euler-Lagrange:

■ n ecuații în raport cu $\mathbf{x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_a}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[g + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial h}{\partial t} + \lambda^T (f - \dot{\mathbf{x}}) \right] - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} - \lambda \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (g + \lambda^T f) + \dot{\lambda} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (g + \lambda^T f) + \dot{\lambda} + \frac{\partial^2 h}{\partial \mathbf{x}^2} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial^2 h}{\partial \mathbf{x} \partial t} - \frac{\partial^2 h}{\partial \mathbf{x}^2} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} - \frac{\partial^2 h}{\partial \mathbf{x} \partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \underbrace{(g + \lambda^T f)}_H + \dot{\lambda} = 0\end{aligned}\quad (2)$$

■ m ecuații în raport cu $\mathbf{u}$:

$$\frac{\partial g_a}{\partial \mathbf{u}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) = \frac{\partial g_a}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \underbrace{(g + \lambda^T f)}_H = 0\quad (3)$$

Condiții necesare pentru control optimal

- Se introduce *hamiltonianul* H definit ca:

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda^T(t)f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = g + \lambda^T f$$

- Cu această notație, ecuațiile (2) și (3) devin condițiile necesare căutate:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) \quad (4)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) \quad (5)$$

împreună cu ecuațiile de stare ale sistemului dinamic (restricții pentru problema de control optimal):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (6)$$

- Ecuația diferențială (4) = *ecuația co-stărilor* iar $\lambda(t)$ = *vectorul co-stărilor*.
- Rezultă n ecuații diferențiale din (6), n ecuații diferențiale din (4) și m ecuații algebrice din (5).
- Necunoscute: $\mathbf{x}(t)_{n \times 1}$, $\lambda(t)_{n \times 1}$ și $\mathbf{u}(t)_{m \times 1}$.

Condiții necesare pentru control optimal. Sumar

- Pentru sistemul dinamic:

$$\dot{\mathbf{x}}_{n \times 1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

se caută vectorul $\mathbf{u}^*(t)_{m \times 1}$ care minimizează funcția de cost:

$$J = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

- Se scrie hamiltonianul:

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda^T(t) f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = g + \lambda^T f$$

- Se calculează derivata sa în raport cu $\mathbf{u}$:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = 0$$

și se explicită $\mathbf{u}$ în funcție de $\mathbf{x}$ și λ .

- Se calculează ecuațiile diferențiale pentru co-stări:

$$\dot{\lambda}_{n \times 1} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t)$$

- Se rezolvă cele $2n$ ecuații diferențiale rezultate.

Condiții inițiale/finale

Probleme cu timp final fixat, t_f - dat.

Caz I Timp final t_f dat, starea finală $\mathbf{x}(t_f)$ dată

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$$

sunt n relații = condiții pe frontieră pentru ecuațiile diferențiale determinate. Împreună cu cele n condiții inițiale, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ asigură soluție unică sistemului de $2n$ ecuații diferențiale.

Caz II Timp final t_f dat, starea finală $\mathbf{x}(t_f)$ necunoscută.
Condiția finală se poate determina din prima condiție de transversalitate:

$$\left(\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) \right)_{t=t_f} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_f), t_f) - \lambda(t_f) = 0$$

și rezultă:

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_f), t_f)$$

Condiții inițiale/finale

Probleme cu timp final t_f necunoscut.

Caz III Timp final t_f necunoscut, starea finală $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ dată
Din a doua condiție de transversalitate pentru g_a , rezultă:

$$\left(g_a - \dot{\mathbf{x}} \frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)_{t=t_f} = 0$$

$$\begin{aligned} & \left[g + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial h}{\partial t} + \lambda^T (f - \dot{\mathbf{x}}) - \dot{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \lambda \right) \right]_{t=t_f} = \\ & = \left(g + \lambda^T f + \frac{\partial h}{\partial t} \right)_{t=t_f} = 0 \end{aligned}$$

$$H(\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \lambda(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0$$

Probleme cu timp final t_f necunoscut.

Caz IV Timp final t_f necunoscut, starea finală $\mathbf{x}(t_f)$ necunoscută.
Condițiile finale se determină din cele două condiții de transversalitate:

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_f), t_f)$$
$$H(\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \lambda(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0$$

Exemplu

Pentru sistemul dinamic:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t)\end{aligned}$$

se caută condițiile necesare pentru un control optimal $u^*(t)$ care minimizează funcția de cost:

$$J(u) = \frac{1}{2}[x_1(2) - 5]^2 + \frac{1}{2}[x_2(2) - 2]^2 + \frac{1}{2} \int_0^2 u^2(t) dt$$

Condițiile inițiale sunt $\mathbf{x}(0) = 0$, iar $\mathbf{x}(2)$ nu se cunosc.

■ Hamiltonianul este:

$$H(\mathbf{x}, u, \lambda) = \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)(-x_2(t) + u(t))$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda_2 = 0 \Rightarrow u^*(t) = -\lambda_2(t)$$

$$H(\mathbf{x}, u, \lambda) = \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)(-x_2(t) + u(t))$$

- Ecuațiile co-stărilor:

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1(t) + \lambda_2(t)$$

- au condițiile finale care rezultă din derivatele funcției

$$h(\mathbf{x}(t_f)) = \frac{1}{2}[x_1(2) - 5]^2 + \frac{1}{2}[x_2(2) - 2]^2 \text{ în raport cu } \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}(2):$$

$$\lambda_1(t_f) = \left. \frac{\partial h}{\partial x_1(2)} \right|_{t=t_f=2} = x_1(2) - 5 = \lambda_1(2)$$

$$\lambda_2(t_f) = \left. \frac{\partial h}{\partial x_2(2)} \right|_{t=t_f=2} = x_2(2) - 2 = \lambda_2(2)$$