

Principiul minimului lui Pontriaghin

Control optimal
Master CAP / Master ICAF

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

- 1 Principiul minimului
- 2 Probleme cu restricții
- 3 Probleme de timp minim
- 4 Metode numerice

Problema de control optimal

- Se caută o comandă admisibil $\mathbf{u}^*(t)$ pentru care sistemul:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

urmează o traiectorie admisibilă $\mathbf{x}^*(t)$ și care minimizează funcția de cost:

$$J = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

- Se consideră inițial că stările și intrările de control nu sunt mărginite, timpul inițial și condițiile inițiale sunt date.
- $\mathbf{x}(t)_{n \times 1}$ este vectorul de stare, iar $\mathbf{u}(t)_{m \times 1}$ este vectorul intrărilor de comandă.
- *Hamiltonianul* este:

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = g + \lambda^T \mathbf{f}$$

unde $\lambda(t)$ este un vector de n funcții de timp necunoscute (*co-stări*).

Principiul minimului

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = g + \lambda^T \mathbf{f}$$

Principiul minimului (Pontriagin): O condiție necesară ca $u^*(t)$ să *minimizeze* funcționala J este:

$$H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \lambda^*(t), t) \leq H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}(t), \lambda^*(t), t)$$

pentru orice $t \in [t_0, t_f]$ și pentru toate comenzile admisibile.

*O comandă optimală trebuie să minimizeze **global** hamiltonianul.*

Soluțiile candidate pentru control optimal se determină după cum urmează:

Principiul minimului

1. Se scrie Hamiltonianul:

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = g + \lambda^T \mathbf{f}$$

2. Prima derivata a hamiltonianului în raport cu $\mathbf{u}$:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = 0 \quad (1)$$

Conform principiului minimului, $\mathbf{u}(t)$ trebuie să minimizeze Hamiltonianul. Dacă nu sunt restricții, se calculează derivata a 2-a și se compară cu 0.

3. Ecuația co-stărilor:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) \quad (2)$$

4. Ecuația de stare:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (3)$$

Ecuațiile (2) și (3) sunt $2n$ ecuații diferențiale cu $2n$ necunoscute ($\mathbf{x}(t)_{n \times 1}$ și $\lambda(t)_{n \times 1}$). O soluție unică necesită $2n$ condiții inițiale/finale.

Principiul minimului

- n condiții inițiale cunoscute: $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, la care se adaugă, după caz:

Caz I. Timpul final t_f dat, starea finală $\mathbf{x}(t_f)$ dată.

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$$

Caz II. Timpul final t_f dat, starea finală $\mathbf{x}(t_f)$ necunoscută.

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_f), t_f)$$

Caz III. Timpul final t_f necunoscut, starea finală $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ dată.

$$H(\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \lambda(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0$$

Caz IV. Timpul final t_f necunoscut, starea finală $\mathbf{x}(t_f)$ necunoscută.

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_f), t_f)$$

$$H(\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \lambda(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0$$

Exemplu 1

- Se consideră problema accelerării pe patine astfel încât să maximizăm distanța totală parcursă într-un timp T dat, cu efort minim. Se notează $x_1(t)$ = distanța parcursă în timpul t . Viteza, $x_2(t)$, este prima derivată a lui x_1 , iar accelerația este $u(t)$, prima derivată a lui x_2 . Sistemul dinamic este:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t)\end{aligned}$$

unde $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$. Funcția de cost care trebuie minimizată este:

$$J = -x_1(T) + \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t) dt$$

- Hamiltonianul:

$$H(\mathbf{x}, u, \lambda) = \frac{1}{2} u^2(t) + \lambda_1(t) x_2(t) + \lambda_2(t) u(t)$$

Exemplu 1

$$H(\mathbf{x}, u, \lambda) = \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t)$$

- Comanda u^* care minimizează hamiltonianul se calculează din

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u(t) + \lambda_2(t) = 0$$

sau

$$u^*(t) = -\lambda_2(t)$$

Această funcție va minimiza H deoarece a doua derivată este pozitivă:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 1 > 0$$

- Costările rezultă din:

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1(t)$$

Exemplu 1

- Pentru că timpul final (T) este dat, iar stările finale nu sunt cunoscute, condiția finală pentru $\lambda_{1,2}$ este:

$$\begin{aligned}\lambda_1(T) &= \frac{\partial h(\mathbf{x}(T))}{\partial x_1(T)} = \frac{\partial h(-x_1(T))}{\partial x_1(T)} = -1 \\ \lambda_2(T) &= \frac{\partial h(\mathbf{x}(T))}{\partial x_2(T)} = 0\end{aligned}\tag{4}$$

unde

$$h(\mathbf{x}(T)) = -x_1(T)$$

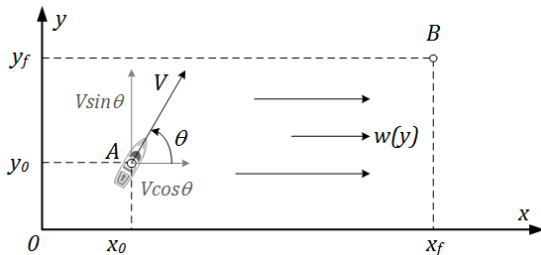
- Din $\dot{\lambda}_1(t) = 0 \Rightarrow \lambda_1(t) = c_1$ și pentru că $\lambda_1(T) = -1$, rezultă $\lambda_1(t) = -1$.
- Din integrarea lui $\dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t) = 1$, cu condiția finală $\lambda_2(T) = 0$, rezultă $\lambda_2(t) = t - T$.
- Pentru că $u^*(t) = -\lambda_2(t)$, se obține legea de reglare optimală:

$$u^*(t) = T - t$$

care descrește liniar cu timpul și ajunge la 0 la timpul final.

Exemplu. Barca lui Zermelo

- Se consideră un barcă care se deplasează din punctul A în punctul B în coordonate carteziene (x, y) .



- Barca are viteză constantă V în raport cu apa, dar orientarea (unghiul θ) se poate modifica. Viteza apei $w(y)$, este paralelă cu axa x , w poate fi constantă sau poate depinde de $y(t)$.
- Scopul este să se determine unghiul de orientare θ^* care minimizează un criteriu de performanță. Pentru variante ale problemei vezi 8- Pontriagyn.pdf

Exemplu. Barca lui Zermelo

- Modelul dinamic:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= V \cos \theta(t) + w(y(t)) \\ \dot{y}(t) &= V \sin \theta(t)\end{aligned}$$

unde $t \in [0, t_f]$, $x(0) = y(0) = 0$, iar $w(y(t)) = y(t)$.

- Se caută unghiul (comanda optimală) $\theta^*(t)$ astfel încât să se maximizeze distanța parcursă în timpul dat t_f :

$$J = -x(t_f)$$

Observați că $x(t_f)$ în J are semn negativ pentru că obiectivul este să se maximizeze $x(t_f)$, adică să se minimizeze $-x(t_f)$.

- Hamiltonianul este:

$$H = 0 + \lambda_1(V \cos \theta(t) + y(t)) + \lambda_2 V \sin \theta(t)$$

Exemplu. Barca lui Zermelo

$$H = 0 + \lambda_1(V \cos \theta(t) + y(t)) + \lambda_2 V \sin \theta(t)$$

- Derivata hamiltonianului în raport cu θ :

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\lambda_1 V \sin \theta(t) + \lambda_2 V \cos \theta(t) = 0$$

sau

$$\lambda_1 V \sin \theta(t) = \lambda_2 V \cos \theta(t)$$

și

$$\frac{\sin \theta(t)}{\cos \theta(t)} = \tan \theta(t) = \frac{\lambda_2(t)}{\lambda_1(t)}$$

- Co-stările satisfac ecuațiile:

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\lambda_1(t)$$

Exemplu. Barca lui Zermelo

- Soluția generală a ecuațiilor pentru co-stări:

$$\lambda_1 = C_1, \quad \lambda_2 = -C_1 t + C_2$$

- Condițiile finale pentru $\lambda_{1,2}$:

$$\lambda_1(t_f) = \frac{\partial(-x(t_f))}{\partial x(t_f)} = -1$$

$$\lambda_2(t_f) = \frac{\partial(0)}{\partial x(t_f)} = 0$$

și rezultă:

$$\lambda_1(t_f) = -1 = C_1, \quad \lambda_2(t_f) = -(-1)t_f + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -1, \quad C_2 = -t_f$$

sau

$$\lambda_1(t) = -1, \quad \lambda_2(t) = t - t_f$$

- Comanda optimală, unghiul $\theta(t)$ se obține din:

$$\tan \theta^*(t) = \frac{\lambda_2(t)}{\lambda_1(t)} = \frac{t - t_f}{-1} = t_f - t, \Rightarrow \theta^*(t) = \arctan(t_f - t)$$

Alte exemple

- Vezi 8- Pontryagin.pdf

Probleme cu restricții

Probleme cu restricții

- O condiția necesară pentru ca $u^*(t)$ să minimizeze funcționala J este:

$$H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \lambda^*(t), t) \leq H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}(t), \lambda^*(t), t)$$

pentru toate $t \in [t_0, t_f]$ și pentru toate intrările $u(t)$ admisibile.

- controlul optimal trebuie să minimizeze hamiltonianul = **principiul minimului (Pontriaghin).**
- Condiția este necesară dar nu e suficientă (în general) pentru optim.
- Controlul optimal trebuie să respecte principiul minimului, dar nu orice control care respectă principiul minimului e optimal.

Probleme cu restricții

- Principiul minimului a fost obținut inițial pentru probleme în care intrarea are valori mărginite într-o regiune închisă sau mărginită, dar poate fi aplicat și pentru probleme în care intrările nu sunt mărginite (sau mărginite de $\pm\infty$).
- În acest caz, pentru ca $u^*(t)$ să *minimizeze* hamiltonianul este necesar (dar nu suficient) ca:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \lambda^*(t), t) = 0 \quad (5)$$

- Dacă ecuația (5) este satisfăcută și:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \lambda^*(t), t) \text{ este pozitiv definită}$$

este o condiție suficientă pentru ca $\mathbf{u}^*(t)$ să fie un *minim local*;

- Dacă hamiltonianul se poate exprima în forma:

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda, t) + \mathbf{c}(\mathbf{x}, \lambda, t)^T \mathbf{u}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u} \quad (6)$$

unde $\mathbf{c}$ este o matrice $m \times 1$ și nu are termeni care depind de $\mathbf{u}(t)$, atunci condiția (5) și $\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2}$ să fie pozitiv definită sunt *necesare și suficiente* pentru ca $H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \lambda^*(t), t)$ să aibă un *minim global*.

- Pentru H în forma (6)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \lambda^*(t), t) = \mathbf{R}(t)$$

astfel încât, dacă $\mathbf{R}(t)$ este pozitiv definită

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{c}(\mathbf{x}^*(t), \lambda^*(t), t)$$

minimizează hamiltonianul.

- Există și alte condiții necesare adiționale (vezi 8-Pontryagin.pdf, sec.2.2)

Exemplu

Se consideră un sistem cu ecuațiile de stare:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t)\end{aligned}$$

cu condițiile inițiale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Funcția de cost care trebuie minimizată este:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} [x_1^2(t) + u^2(t)] dt$$

t_f este dat, starea finală $\mathbf{x}(t_f)$ este necunoscută.

- Se caută condițiile necesare pentru minimul lui J .

$$H(\mathbf{x}, u, \lambda) = \frac{1}{2} [x_1^2(t) + u^2(t)] + \lambda_1 x_2(t) + \lambda_2(t) (-x_2(t) + u(t))$$

- Co-stărilor:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -x_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1(t) + \lambda_2(t)\end{aligned}$$

Exemplu

- Pentru că nu sunt restricții asupra lui $u(t)$, este necesar ca:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u^*(t) + \lambda_2(t) = 0 \Rightarrow u^*(t) = -\lambda_2^*(t)$$

- Hamiltonianul este în forma (6) și

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 1 > 0$$

deci $u^*(t)$ minimizează global hamiltonianul.

- Condițiile finale pentru co-stări:

$$\lambda_1(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x_1}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0$$

$$\lambda_2(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x_2}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0$$

(h nu apare în J)

Exemplu cu restricții

- Pentru problema anterioară se caută controlul optimal dacă:

$$-1 \leq u(t) \leq 1, \text{ for all } t \in [t_0, t_f] \quad (7)$$

- Ecuațiile de stare și ecuațiile diferențiale pentru co-stări sunt aceleași
- Condițiile finale pentru $\lambda(t_f)$ sunt aceleași
- u trebuie să minimizeze:

$$H(\mathbf{x}^*, u, \lambda^*) = \frac{1}{2}x_1^{2*} + \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1^*x_2^* + \lambda_2^*(-x_2^* + u)$$

cu restricțiile (7).

- Se separă termenii din H care îl conțin pe $u(t)$:

$$\frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_2^*(t)u(t) \quad (8)$$

- Pt. intervalele de timp în care $u(t)$ nu este saturat:

$$u^*(t) = -\lambda_2^*(t)$$

ca în problema anterioară; aceasta se întâmplă pentru $|\lambda_2^*(t)| \leq 1$.

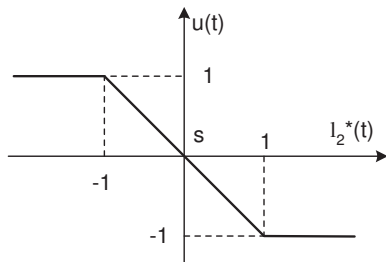
Exemplu cu restricții

- Pentru $|\lambda_2^*(t)| > 1$ din (8), u care minimizează pe H este:

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 & \text{for } \lambda_2^*(t) > 1 \\ 1 & \text{for } \lambda_2^*(t) < -1 \end{cases}$$

- Astfel $u^*(t)$ este o funcție de $\lambda_2^*(t)$, ca în figură
- Rezultă:

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 & \text{for } \lambda_2^*(t) > 1 \\ -\lambda_2^*(t) & \text{for } -1 \leq \lambda_2^*(t) \leq 1 \\ 1 & \text{for } \lambda_2^*(t) < -1 \end{cases}$$



- Pentru a determina pe $u^*(t)$ explicit, trebuie rezolvate ecuațiile de stare și cele pentru co-stări.

Exemplu 2 - cu restricții

- Se caută intrarea de control optimală care minimizează funcționala:

$$\min_u J = -x(4) + \int_0^4 u^2(t) dt$$

cu $\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$, $x(0) = 0$ și $u(t) \leq 5$.

- Hamiltonianul este:

$$H = u(t)^2 + \lambda(t)(x(t) + u(t))$$

- Co-starea:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda(t) \Rightarrow \lambda(t) = Ce^{-t}$$

- și utilizând condiția finală pentru λ :

$$\lambda(4) = \frac{\partial(-x(4))}{\partial x(4)} = -1 = Ce^{-4} \Rightarrow C = -e^4 \Rightarrow \lambda(t) = -e^{4-t}$$

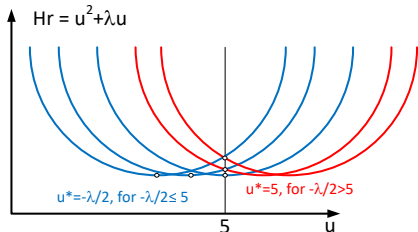
- Se minimizează H în raport cu u :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda = 0 \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 2 > 0 \Rightarrow u = -\frac{\lambda(t)}{2}$$

Exemplu 2 - cu restricții

- Se ia în considerare restricția și avem:

$$u^* = \begin{cases} -\frac{\lambda}{2}, & \text{pt. } -\frac{\lambda}{2} \leq 5 \\ 5, & \text{pt. } -\frac{\lambda}{2} > 5 \end{cases}$$



- Pentru $-\lambda/2 \leq 5$, hamiltonianul are un minim global dacă prima derivată e zero, iar a doua este pozitivă.
- Pentru $-\lambda/2 > 5$, minimum global al hamiltonianului este pe frontiera $u = 5$ (pentru că minimumul funcției $H_r = u^2 + \lambda u$ este în dreapta valorii 5).

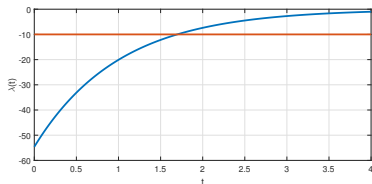
$$-\frac{\lambda}{2} \leq 5 \quad \Rightarrow \quad -\lambda \leq 10 \quad \Rightarrow \quad \lambda \geq -10$$

- Atunci:

$$u^* = \begin{cases} -\frac{\lambda}{2}, & \text{pt. } \lambda \geq -10 \\ 5, & \text{pt. } \lambda < -10 \end{cases}$$

Exemplu 2 - cu restricții

- Se reprezintă $\lambda(t) = -e^{4-t}$:

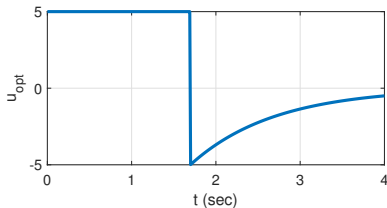


și se determină timpul de comutare de la un control la celălalt.

$$\lambda(t_s) = -e^{4-t_s} = -10 \Rightarrow 4 - t_s = \ln(10) \\ \Rightarrow t_s = 4 - \ln(10)$$

- Deoarece $\lambda(t) < -10$ pentru $t < t_s$ și $\lambda(t) \geq -10$ pentru $t \geq t_s$, comanda în buclă deschisă este:

$$u^* = \begin{cases} 5, & \text{pt. } t < 4 - \ln(10) \\ -\frac{1}{2}e^{4-t}, & \text{pt. } t \geq 4 - \ln(10) \end{cases}$$



Probleme de timp minim. Control bang-bang

Problema de timp minim

- Se consideră o problemă simplificată de mișcare. Obiectivul este de a transfera un sistem dintr-un punct inițial dat într-un punct final dat, în timp minim.
- Dacă $x_1(t)$ = distanța parcursă la timpul t , $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ = viteza și $\dot{x}_2(t) = u(t)$ = accelerația, modelul dinamic este:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t); \quad \dot{x}_2(t) = u(t)$$

cu starea inițială $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ și starea finală dată:
 $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

- Se caută accelerația optimă care transferă sistemul din $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ în $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$ în timp minim, adică minimizează:

$$J = \int_0^T 1 dt$$

- Se consideră că intrarea u este supusă restricțiilor: $-1 \leq u(t) \leq 1$.

Problema de timp minim

- Hamiltonianul este:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) = 1 + \lambda_1(t)x_2(t) + \underbrace{\lambda_2(t)u(t)}$$

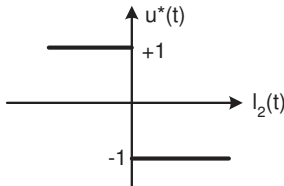
- Din forma lui H se observă că numai termenul $\lambda_2(t)u(t)$ depinde de $u(t)$, deci acesta va decide valoarea minimă în raport cu u .
- Ecuațiile pentru co-stări:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1(t) = C_1 \\ \lambda_2(t) = -C_1 t + C_2 \end{cases}$$

- Funcția $\lambda_2(t)$ este o linie și poate schimba semnul **cel mult odată** $\Rightarrow$

$$u^*(t) = \begin{cases} +1, & \lambda_2(t) < 0 \\ -1, & \lambda_2(t) > 0 \end{cases}$$

bang-bang control



Problema de timp minim

- Se caută u ca funcție de starea $\mathbf{x}(t)$: în buclă închisă.
- Se rezolvă ecuațiile de stare:

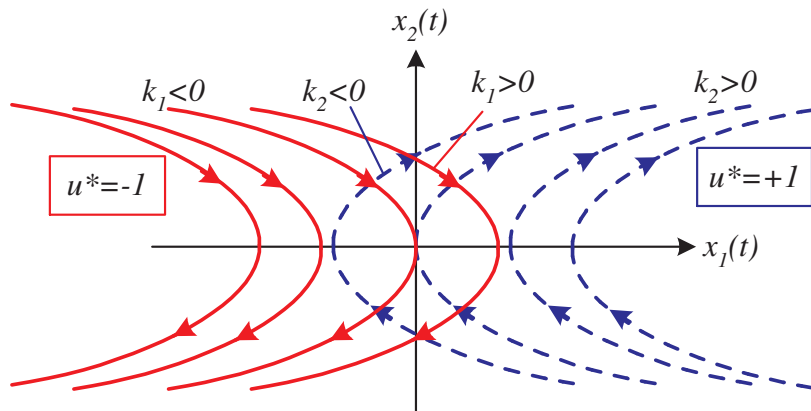
$$u^*(t) = -1 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -1 \\ x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = -\frac{t^2}{2} + x_{20}t + x_{10} \\ x_2(t) = -t + x_{20} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1(t) = -\frac{1}{2}(x_{20} - t)^2 + x_{10} + \frac{x_{20}^2}{2} = -\frac{1}{2}(x_{20} - t)^2 + k_1 = -\frac{x_2^2(t)}{2} + k_1$$

$$u^*(t) = +1 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = +1 \\ x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{t^2}{2} + x_{20}t + x_{10} \\ x_2(t) = t + x_{20} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1(t) = \frac{1}{2}(t + x_{20})^2 + x_{10} - \frac{x_{20}^2}{2} = \frac{1}{2}(x_{20} + t)^2 + k_2 = \frac{x_2^2(t)}{2} + k_2$$

Problema de timp minim



Problema de timp minim

- Parabolele trec prin origine pt. $k_1 = k_2 = 0$, sau:

$$x_{10} = -\frac{x_{20}^2}{2}, \text{ for } u^* = -1, \text{ or } x_{10} = \frac{x_{20}^2}{2}, \text{ for } u^* = +1$$

- Ecuația curbei care transferă sistemul în origine se obține:

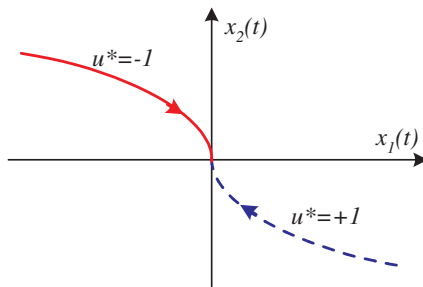
$$u^*(t) = -1 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -1 \\ x_1(T) = x_2(T) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = -\frac{(T-t)^2}{2} \\ x_2(t) = T-t \end{cases}$$
$$\Rightarrow x_1(t) = -\frac{x_2^2(t)}{2}$$

$$u^*(t) = +1 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = +1 \\ x_1(T) = x_2(T) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{(t-T)^2}{2} \\ x_2(t) = t-T \end{cases}$$
$$\Rightarrow x_1(t) = \frac{x_2^2(t)}{2}$$

Problema de timp minim

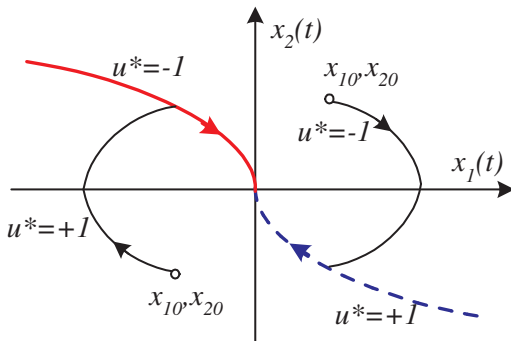
- Pentru $t < T$, pentru $u^* = -1 \Rightarrow x_2(t) > 0$ și pentru $u^* = +1 \Rightarrow x_2(t) < 0$.
- Ecuația *curbei de comutație* se scrie:

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2(t)|x_2(t)|$$



Problema de timp minim

- Dacă starea inițială se află pe curba de comutație, atunci $u = \pm 1$ după cum $x_1 < > 0$.
- Dacă starea inițială nu se află pe curba de comutație, atunci $u = \pm 1$ trebuie să determine sistemul să ajungă pe aceasta.
- Dacă $\mathbf{x}_0$ este deasupra curbei $\Rightarrow u = -1$, iar dacă $\mathbf{x}_0$ e sub curbă $\Rightarrow u = +1$.



Problema de timp minim

- Legea de control optimal se aplică astfel:

- Dacă $x(0)$ este la stânga cubei de comutație se aplică $u^* = +1$ până când se atinge curba, apoi se aplică $u^* = -1$ până se atinge originea.
- Dacă $x(0)$ este la dreapta curbet de comutație se aplică $u^* = -1$ până când se atinge curba, apoi $u^* = +1$ până la origine.
- Dacă $x(0)$ este pe curba de comutație se aplică $u = -\text{sign}(x_2(0))$ până în origine.

- Funcția de comutație:

$$s(x(t)) = x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t)|x_2(t)|$$

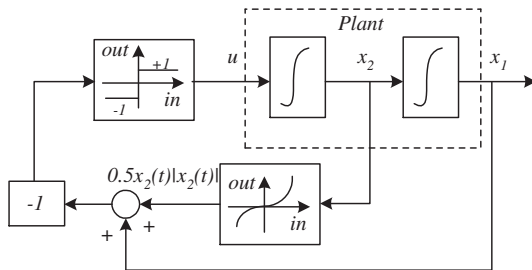
- Se observă că:

- $s(x(t)) > 0$ implică $x(t)$ este în dreapta curbei de comutație
- $s(x(t)) < 0$ implică $x(t)$ este în stânga curbei de comutație
- $s(x(t)) = 0$ implică $x(t)$ este pe curbei de comutație

Problema de timp minim

În termenii funcției de comutație, legea de control optimal este:

- $u^* = -1$ pentru $\mathbf{x}(t)$ astfel încât $s(\mathbf{x}(t)) > 0$
- $u^* = +1$ pentru $\mathbf{x}(t)$ astfel încât $s(\mathbf{x}(t)) < 0$
- $u^* = -1$ pentru $\mathbf{x}(t)$ astfel încât $s(\mathbf{x}(t)) = 0$ și $x_2(t) > 0$
- $u^* = +1$ pentru $\mathbf{x}(t)$ astfel încât $s(\mathbf{x}(t)) = 0$ și $x_2(t) < 0$
- $u^* = 0$ pentru $\mathbf{x}(t) = 0$



Metode numerice pentru rezolvarea problemelor utilizând principiul minimului

Problema cu valori pe frontieră în două puncte

Problema cu valori pe frontieră în două puncte = TPBVP (Two Point Boundary Value Problem)

- Se consideră problema de minimizare a funcției de cost

$$J = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

pentru sistemul dinamic:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

- Problema este de a determina un control admisibil $\mathbf{u}^*(t)$ care face ca sistemul să urmeze o traiectorie optimală $\mathbf{x}^*(t)$ care minimizează J
- *Hamiltonianul*:

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

Problema cu valori pe frontieră în două puncte

- Dacă nu există alte restricții asupra stării și intrării u , timpul final t_f este fixat și starea finală nu este cunoscută, problema TPBVP care rezultă este:

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, t) \quad (9)$$

$$\dot{\lambda}^* = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (10)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \quad (11)$$

$$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (12)$$

$$\lambda^*(t_f) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f)) \quad (13)$$

- Se caută relații explicite pentru $\mathbf{x}^*(t)$ și $\mathbf{u}^*(t)$, $t \in [t_0, t_f]$.
- Rezolvarea ecuațiilor diferențiale (9) și (10) nu este posibilă cu metode clasice deoarece există n condiții inițiale pentru $\mathbf{x}$: relațiile (12) și n condiții finale pentru λ : relațiile (13)

Problema cu valori pe frontieră în două puncte

Algoritmul se bazează pe observația că $u^*(t)$ care minimizează hamiltonianul va minimiza pe J . Astfel se vor determina numeric valorile funcției u^* care fac derivata lui H egală cu zero.

- Se scrie hamiltonianul: $H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t))$.

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

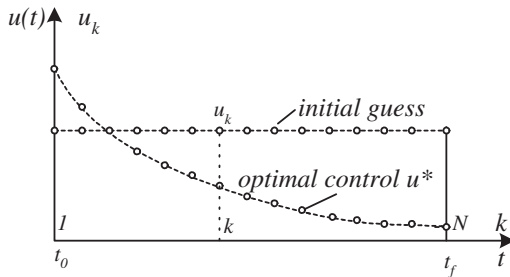
- Se calculează prima derivată în raport cu u : $\partial H / \partial u$.
- Se scriu ecuațiile pentru co-stări:

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

- Se determină condițiile finale pentru $\lambda(t_f)$
- Se începe cu o aproximare discretă pentru $u(t)$, $t \in [0, t_f]$. De exemplu se împarte intervalul $[t_0, t_f]$ în N subintervale și se consideră u constant pe subintervale.

$$u(t) = u(t_k), \quad k = 1..N$$

Problema cu valori pe frontieră în două puncte



- Se minimizează $H(\mathbf{u})$ cu o funcție Matlab sau un algoritm numeric care determină minimul (de exemplu metode de gradient)

Problema cu valori pe frontieră în două puncte

Funcția care se minimizează trebuie să rezolve la fiecare pas:

- Cu vectorul u care e dat ca argument al funcției se intergrează ecuațiile de stare, cu condițiile inițiale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.
- Se calculează $\lambda(t_f)$.
- Se rezolvă sistemul de ecuații diferențiale pentru co-stări, invers, de la t_f la t_0 .
- Din u , x și λ se calculează prima derivată a hamiltonianului.
- Funcția returnează norma hamiltonianului sau norma primei derivate a hamiltonianului.

Problema cu valori pe frontieră în două puncte

Dacă se utilizează o metodă de gradient:

- Se stabilește o aproximare discretă pentru $\mathbf{u}(t)$, $t = [t_0, t_f]$, prin divizarea intervalului $[t_0, t_f]$ în N subintervale.
- Cu cele N valori ale lui u , se integrează ecuațiile de stare (9) de la t_0 la t_f , cu condițiile inițiale (12)
- Se calculează $\lambda(t_f)$ substituind $\mathbf{x}(t_f)$ în (13).
- Se integrează ecuațiile pentru co-stări (10) de la t_f la t_0 , cu condițiile finale (13)
- Dacă

$$\left\| \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right\| \leq \varepsilon$$

unde ε este o constantă mică pozitivă, se termină procedura și se returnează valorile controlului optimal și a traiectoriei de stare optimale.

- Dacă condiția de oprire nu este îndeplinită, se calculează un nou control::

$$\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u} - \tau \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}$$

unde τ este pasul metodei de gradient.