

Regulatorul liniar pătratic pentru probleme de urmărire. Estimarea stării.

1 Problema de control optimal și LQR pentru probleme de stabilizare

Pentru un sistem continuu cu n variabile de stare și m variabile de intrare, descris de:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

cu condițiile inițiale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, se cere să se calculeze vectorul de comenzi optime $\mathbf{u}^*(t)$ care minimizează funcția de performanță:

$$J = \mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{S}\mathbf{x}(t_f) + \int_0^{t_f} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)dt$$

unde $\mathbf{S}$ și $\mathbf{Q}$ sunt matrice simetrice pozitiv semidefinite cu dimensiunea $n \times n$, iar $\mathbf{R}$ este o matrice simetrică pozitiv definită cu dimensiunea $m \times m$.

Legea de comandă rezultă de forma:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (2)$$

unde $\mathbf{K}$ este matricea de reacție de la stare, cu dimensiunea $m \times n$. Implementarea unui regulator LQR într-un sistem cu reacție de la stare este prezentată în Figura 1.

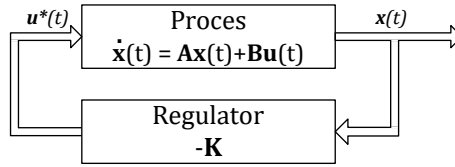


Figura 1: Schema bloc a sistemului de stabilizare

Sistemul închis va fi reprezentat de:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) \quad (3)$$

LQR este o lege de control care determină stările să tindă către 0, influențând totodată și energia consumată cu semnalele de comandă.

2 LQR pentru probleme de urmărire

În unele cazuri este de interes ca ieșirea sistemului să urmărească un semnal de referință $r(t)$, astfel încât ieșirea $y(t) = r(t)$ când $t \rightarrow \infty$. Observați că reacția din Figura 1 este de la stare, nu de la ieșire.

Se consideră sistemul descris de ecuațiile de stare:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (4)$$

unde numărul de stări este n , numărul de intrări este m , iar numărul de ieșiri este p . Ca urmare, dimensiunile matricilor sunt: $\mathbf{A}_{n \times n}$, $\mathbf{B}_{n \times m}$, $\mathbf{C}_{n \times p}$.

2.1 Metoda 1. Precompensare

Spre deosebire de alte metode de proiectare a reguletoarelor, sistemele de control cu reacție de la stare nu compară ieșirea cu referința, ci compară vectorul de stare înmulțit cu matricea de reacție $\mathbf{K}$ cu referința. Este de așteptat ca ieșirea să nu fie egală cu referința. În acest caz, referința se poate scala astfel încât ieșirea să fie egală cu referința în regim staționar (Figura 2).

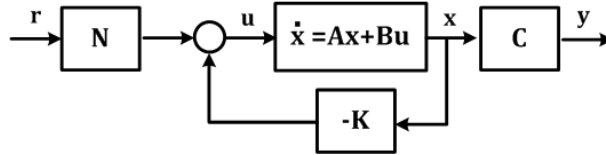


Figura 2: Schema bloc a sistemului de urmărire cu precompensare

Un mod simplu de a implementa un regulator care să urmărească o referință este modificarea legii de comandă (2) în:

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{N}r(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (5)$$

iar matricea $\mathbf{N}$ rezultă:

$$\mathbf{N} = -(\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B})^{-1} = -(\mathbf{CA}_{cl}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \quad (6)$$

unde $\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$.

Observații:

- dacă numărul de ieșiri p este egal cu numărul de intrări m , matricea $\mathbf{CA}_{cl}^{-1}\mathbf{B}$ este pătrată, altfel dimensiunea va fi $p \times m$ și nu poate fi inversată.
- dacă numărul de ieșiri este mai mare decât numărul de intrări, $p > m$, vor exista soluții pentru relația (6) doar în unele cazuri particulare. Nu sunt destule grade de libertate pentru ca variabila de comandă să determine sistemul să urmărească orice referință.
- dacă numărul de ieșiri este mai mic decât numărul de intrări $p < m$, vor exista mai multe soluții pentru relația (6). Se poate alege una dintre ele sau se pot introduce ieșiri suplimentare astfel încât $p = m$.

2.2 Metoda 2. LQR pentru procese care au integrator

Metoda va fi descrisă pentru cazul în care intrarea în proces (semnalul $u(t)$) și ieșirea $y(t)$ sunt scalare. Ca exemplu, ieșirea se consideră egală cu una din variabilele de stare $y(t) = x_1(t)$. În Figura 3 se prezintă schema bloc a sistemului de urmărire unde r este o referință treaptă.

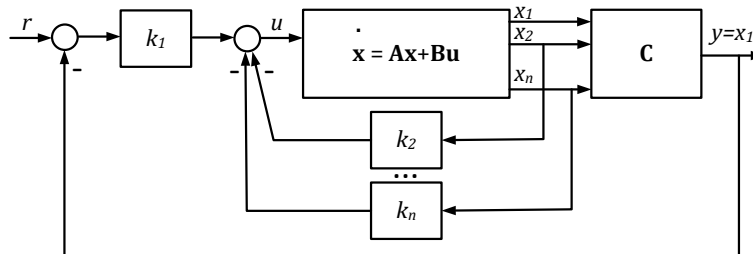


Figura 3: Schema bloc a sistemului de urmărire pentru procese cu integrator

Pentru acest caz, legea de control este dată de:

$$u^*(t) = -k_1(x_1(t) - r) - k_2x_2(t) - \dots - k_nx_n(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + k_1r \quad (7)$$

unde $\mathbf{K} = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$.

Sistemul închis este descris de:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}k_1 r \quad (8)$$

În regim staționar (variabilele notate cu indicele ss) avem:

$$\dot{\mathbf{x}}_{ss} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{B}k_1 r \quad (9)$$

Prin scăderea ecuațiilor (8) și (9) obținem:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}_{ss} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{ss})$$

Dacă se notează eroarea ca $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{ss}$, atunci dinamica erorii este:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{e}(t)$$

Ca urmare, problema este transformată în proiectarea unui regulator $\mathbf{K}$ care să aducă eroarea la zero din orice condiții inițiale. Metoda este aceeași cu cea prezentată inițial pentru sisteme de stabilizare cu reacție de la stare și referință 0 (în secțiunea 1), dar schema bloc de implementare este cea prezentată în Figura 3.

2.3 LQR-servo. Adăugarea efectului integrator

Vom proiecta o lege de control LQR astfel încât ieșirea sistemului să urmărească un semnal de referință $\mathbf{r}(t)$.

Ecuațiile de stare sunt:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (11)$$

O abordare diferită pentru ca eroarea staționară să fie zero în regim staționar este denumită LQR-servo. Se vor introduce un set de stări noi, $\mathbf{z}(t)$ pentru ca sistemul să integreze eroarea de urmărire:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (12)$$

Dinamica extinsă este dată de:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{r} \quad (13)$$

și noile variabile de stare se notează $\bar{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{x}(t) \ \mathbf{z}(t)]^T$. În regim staționar, $\dot{\mathbf{z}} = 0$, sau $\mathbf{r} = \mathbf{y}$ sau $\mathbf{r} = \mathbf{C}\mathbf{x}$.

Comanda optimă calculată pentru minimizarea funcției de performanță:

$$J = \int_0^\infty [\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q}_x \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_u \mathbf{u}] dt \quad (14)$$

este o lege de comandă după stare dată de:

$$\mathbf{u}(t) = -[\mathbf{K}_x \ \mathbf{K}_z] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

și calculată prin procedura LQR pentru un sistem cu matricile:

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Perechea $(\mathbf{A}_e, \mathbf{B}_e)$ trebuie să fie controlabilă.

După ce se calculează matricile $\mathbf{K}_x$ și $\mathbf{K}_z$, implementarea legii de control se face conform schemei bloc din Figura 4.

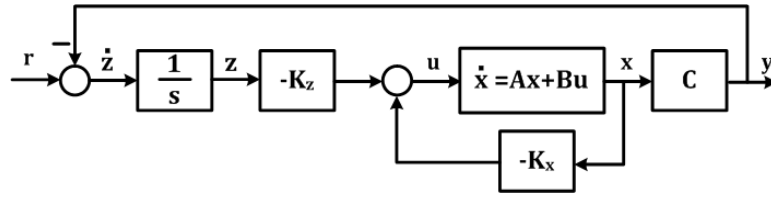


Figura 4: Schema bloc de implementare LQR servo

3 Studiu de caz

- A) Selectați un proces dintre cele propuse în fișierele atașate, sau altul la alegere, din cele studiate anterior sau în funcție de interesele dumneavoastră:
- Linear - Active Mass Damper.pdf
 - Linear - Linear Flexible Joint.pdf
 - Rotary - 2D Flexible Link.pdf
 - Rotary - Flexible Joint.pdf
- B) Alegeți ieșirea procesului ca una dintre variabilele de stare sau o combinație liniară a variabilelor de stare, potrivită pentru procesul ales și cu semnificație fizică.
- C) Implementați un regulator LQR care să determine ieșirea procesului să urmărească traiectoria de referință prezentată în Figura 5, din condiții inițiale nule, în variantele prezentate în secțiunea 2. Se dorește ca eroarea staționară să fie zero, iar răspunsul să fie rapid și cu suprareglaj minim.

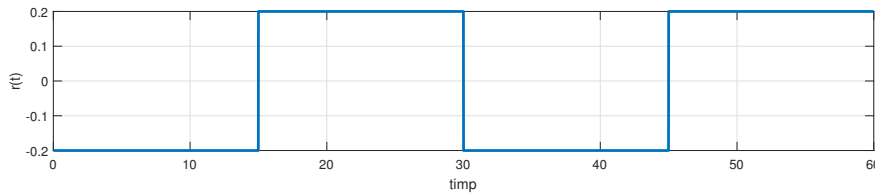


Figura 5: Referința

3.1 Etape de rezolvare și analiză

1. Alegeți matricile $\mathbf{Q}$ și $\mathbf{R}$ de dimensiuni corespunzătoare, calculați matricea $\mathbf{K}$, calculați N din relația (6) și implementați sistemul de urmărire cu precompensare din Figura 2. Afișați pe același grafic referința și ieșirea sistemului. Observați și analizați rezultatele. Modificați matricile $\mathbf{Q}$ și $\mathbf{R}$ și încercați să obțineți un răspuns mai bun.
2. Implementați sistemul de urmărire din Figura 3. Afișați pe același grafic referința și ieșirea sistemului. Observați și analizați rezultatele.
3. Implementați sistemul de urmărire din Figura 4:
 - (a) Calculați matricile sistemului extins $\mathbf{A}_e$, $\mathbf{B}_e$ conform relației (16). Ultima 'coloană' din matricea $\mathbf{A}_e$ și ultima 'linie' din $\mathbf{B}_e$ vor fi constituite din matrici de zerouri de dimensiuni corespunzătoare. Verificați controlabilitatea sistemului extins.
 - (b) Alegeți matricile $\mathbf{Q}_x$ și $\mathbf{R}_u$ de dimensiuni corespunzătoare.
 - (c) Calculați matricea $[\mathbf{K}_x \ \mathbf{K}_z]$ cu funcția Matlab *lqr*, apoi separați-o în $\mathbf{K}_x$ și $\mathbf{K}_z$.
 - (d) Implementați sistemul de urmărire din Figura 4.
 - (e) Afișați pe același grafic referința și ieșirea sistemului. Observați rezultatele.
4. Comparați rezultatele obținute cu metodele de mai sus, comparați și comentați rezultatele.

4 LQR cu estimarea stării

4.1 Estimatorul de stare

În proiectarea LQR prezentată până acum se presupune că toate stările sunt disponibile pentru reacție la orice moment de timp. Aceasta înseamnă că stările pot fi măsurate cu unul sau mai mulți senzori. Există totuși situații în care nu toate stările pot fi măsurate sau se dorește implementarea sistemului cu un număr minim de senzori.

Dacă pentru un set de semnale de ieșire sistemul este complet observabil este posibil ca stările să fie estimate din măsurătorile disponibile ale ieșirii și din intrări. În continuare se va prezenta estimarea tuturor stărilor adică proiectarea unui observator de stare care va reconstitui toate stările.

Se consideră sistemul liniar:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (17)$$

Dacă starea estimată se notează $\hat{\mathbf{x}}(t)$ și ieșirea estimată este $\hat{\mathbf{y}}(t)$, un estimator complet al sistemului (17) este dat de:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (18)$$

Termenul care implică matricea $\mathbf{L}$ - *matricea estimatorului* - este introdus pentru a corecta starea estimată $\hat{\mathbf{x}}(t)$ astfel încât aceasta să tindă spre starea reală $\mathbf{x}(t)$ când $t \rightarrow \infty$. Cu alte cuvinte, eroarea de estimare dată de:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (19)$$

trebuie să tindă la 0 când $t \rightarrow \infty$.

Un rezultat important al teoriei sistemelor este că dacă sistemul este complet observabil, matricea $\mathbf{L}$ poate fi întotdeauna determinată astfel încât să facă eroarea de estimare asimptotic stabilă (Dorf and Bishop, 2011).

Schema bloc a estimatorului de stare este prezentată în Figura 6.

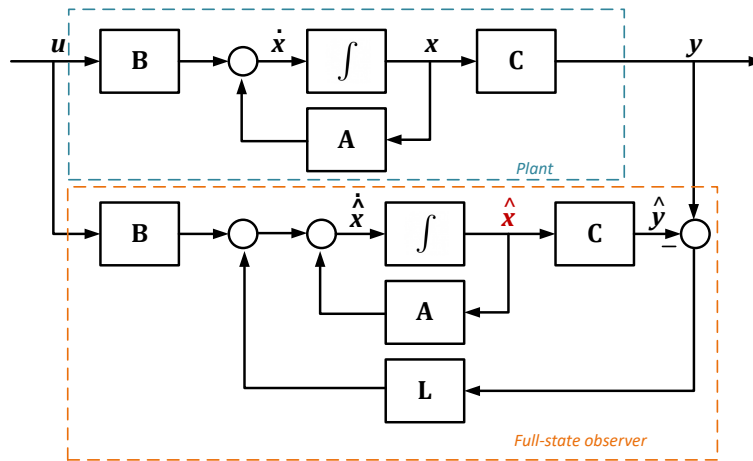


Figura 6: System and full-state observer, (Ogata, 2002)

Calculând derivata erorii de estimare (19) și utilizând relațiile (17) și (18), obținem:

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}u - \mathbf{L}(\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$$

sau, dinamica erorii este descrisă de:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(t) \quad (20)$$

Analizând ecuația diferențială (20), se observă că eroarea $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0$ când $t \rightarrow \infty$, pentru orice condiții inițiale $\mathbf{e}(t_0)$ dacă toate valorile proprii ale matricii sistemului $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$ sunt localizate în semiplanul stâng al planului complex, sau sistemul (20) este asimptotic stabil.

Matricea $\mathbf{L}$ poate fi calculată de exemplu, prin alocarea polilor. Polii doriți ai estimatorului se aleg $[ep_1 \ ep_2 \ \dots \ ep_n]$ egali cu valorile proprii ale matricii sistemului care descrie dinamica erorii și rezolvând:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})) = (\lambda_1 - ep_1)(\lambda_2 - ep_2) \cdots (\lambda_n - ep_n)$$

Viteza cu care descrește eroarea de estimare este desigur determinată de polii estimatorului ($ep_1, \dots, ep_n$). De aceea, aceștia trebuie plasați în semiplanul stâng și în general, trebuie să fie mai 'rapizi' decât polii sistemului. Deși există diferite abordări pentru alocarea polilor estimatorului, o indicație ar putea fi: polii estimatorului se aleg aproximativ de 5 ori mai mici (sunt negativi) decât polii dominanți ai sistemului închis (cu reacție de la stare și regulatorul K).

Datorită principiului separării, estimatorul de stare și regulatorul după stare se pot proiecta separat (vezi notele de curs).

Observați similaritatea între relația (20) care descrie dinamica erorii de estimare și ecuația de stare a sistemului închis (3) pentru problema de stabilizare din secțiunea 1.

Datorită dualității controlabilitate/observabilitate (vezi notele de curs) matricea $\mathbf{L}^T$ poate fi obținută prin alocarea polilor printr-o procedură similară cu o problemă de stabilizare pentru un sistem închis cu matricea sistemului $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ și înlocuirile: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^T$, $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}^T$ and $\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}^T$.

4.2 Implementarea estimatorului de stare

Schema bloc a unui sistem de stabilizare cu estimarea stării este prezentat în Figura 7, (Ogata, 2002). Observați că legea de control $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$ utilizează starea estimată pentru reacție și nu starea reală a procesului. Modelul în

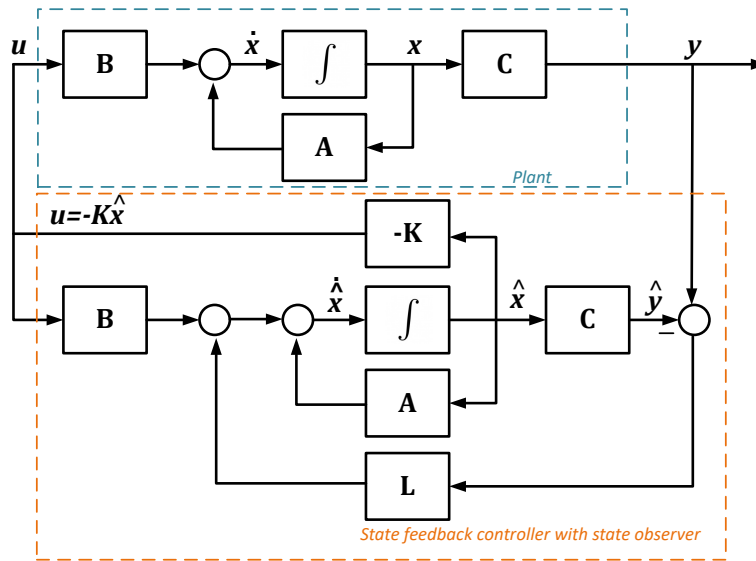


Figura 7: Sistem de stabilizare cu estimarea stării

spațiul stărilor pentru întregul sistem de control se obține după cum urmează. Ecuațiile de stare ale procesului și estimatorului sunt:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))\end{aligned}$$

și dacă se include legea de control $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)$, acestea devin:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(t)\end{aligned}$$

Ecuațiile de ieșire pentru proces și estimator sunt:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)\end{aligned}$$

Ecuatiile de stare și ieșire se pot scrie în forma matricială:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{LC} & \mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad (22)$$

4.3 Studiu de caz

Pentru sistemul descris în secțiunea 3 se propune implementarea unui sistem de stabilizare cu estimarea stării. Ieșirea sistemului este cea aleasă în secțiunea 3. Sistemul are condiții inițiale ne-nule și trebuie adus la echilibru (stările să ajungă la 0 în regim staționar).

- Definiți sistemul în buclă deschisă cu matricile: $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ și $\mathbf{D} = \mathbf{0}$.
- Calculați matricile de controlabilitate și observabilitate și verificați că sistemul este controlabil și observabil.
- Proiectați matricea de reacție de la stare $\mathbf{K}$. Pentru metoda de proiectare LQR, alegeți matricile $\mathbf{Q}$ și $\mathbf{R}$ și calculați $\mathbf{K}$, de exemplu cu funcția Matlab *lqr*.
- Alegeți polii estimatorului ep_i , $i = \overline{1, n}$. Este important ca estimatorul să nu facă sistemul închis mai lent. Polii estimatorului trebuie să fie mai 'rapizi' decât polii sistemului închis. Alegeți de exemplu polii estimatorului aproximativ de 5 - 10 ori mai mici (reali negativi) decât polii sistemului închis. Dacă matricea $\mathbf{K}$ este calculată, polii sistemului închis sunt valorile proprii ale $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$.
- Calculați matricea $\mathbf{L}$ a estimatorului prin alocarea polilor sau LQR. Aceasta se poate determina similar cu calculul unei matrici de reacție după stare pentru un sistem cu matricile $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$.
*De exemplu în Matlab se poate scrie: $\mathbf{L} = \text{place}(\mathbf{A}', \mathbf{C}', [\text{ep1 ep2...}])'$. Observați că rezultatul funcției *place* trebuie transpus.*
- Condițiile inițiale. În general, dacă stările nu pot fi măsurate, condițiile inițiale pentru stări nu sunt cunoscute. Dacă nici o altă informație nu este disponibilă, valorile inițiale pentru stările estimate se pot alege zero $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$. Condițiile inițiale pentru stările reale ale procesului nu sunt în general egale cu $\hat{\mathbf{x}}_0$. Estimatorul trebuie să fie capabil să aducă stările estimate să tindă spre stările procesului când timpul crește spre infinit, înpecând din orice condiții inițiale.
- Implementați sistemul cu reacție după stare și estimator după schema bloc din Figura 7, în Simulink. Ca alternativă, pentru a simula sistemul cu estimator puteți utiliza modelul în spațiul stărilor pentru sistemul închis (21), (22) și condițiile inițiale $\mathbf{x}_0$, $\hat{\mathbf{x}}_0$.
- Comparați evoluția stărilor și comenzii pentru sistemul cu estimator și pentru un sistem de stabilizare fără estimator.

Bibliografie

- Dorf, R. C. and Bishop, R. H. (2011). *Modern Control Systems*. Prentice Hall, 12th edition.
- Ogata, K. (2002). *Modern Control Engineering*. Pearson Education International, 4th edition.