



Technical University of Cluj - Napoca
Computer Science Department

Procesarea Imaginilor

(An 3, Semestrul 2)

**Curs 6: Procesarea imaginilor de intensitate. Prelucrări
bazate pe histogramă**



Proprietăți statistice de bază

Media intensității unei imagini de intensitate

$$\mu = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(i, j)$$

Varianța

$$\sigma^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (f(i, j) - \mu)^2$$

Notății

Pentru un semnal unidimensional, media se definește ca:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(i) = \langle f(i) \rangle$$

Pentru cazul bidimensional (2D) avem:

$$\mu = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(i, j) = \langle f(i, j) \rangle$$

Varianța se scrie ca:

$$\sigma^2 = \langle |f(i, j) - \mu|^2 \rangle$$



Calculul mediei și a varianței

Aparent, este nevoie de două parcurgeri ale imaginii:

1. Se calculează media:

$$\mu = \langle f(i, j) \rangle$$

2. Se calculează varianța pe baza mediei:

$$\sigma^2 = \langle |f(i, j) - \mu|^2 \rangle$$

Dar dacă detaliem ecuația varianței:

$$\sigma^2 = \langle |f(i, j) - \mu|^2 \rangle = \langle |f(i, j)|^2 \rangle - 2\langle f(i, j) \rangle \mu + \mu^2 = \underbrace{\langle |f(i, j)|^2 \rangle} - \underbrace{\langle f(i, j) \rangle^2}$$

Ambii termeni se pot calcula printr-o singură parcurgere a imaginii.



Histograma

Imaginea $f(i,j)$ se poate considera o funcție aleatoare cu valori între 0 și 255.
Putem defini:

Funcția distribuție de probabilitate:

$$P(f) = \text{Prob. Pixel value} < f$$

cu condiția ca: $0 \leq P(f) \leq 1$

și: $P(f_{\max}) = 1$

Funcția densitate de probabilitate (PDF – probability density function):

$$p(f) = dP(f)/df$$

Pentru o imagine digitală, dacă avem M_0 pixeli cu valori $f_0 \rightarrow f_0 + \Delta f$ atunci PDF poate fi aproximată ca:

$$p(f_0) = M_0 / N^2 \Delta f$$

Dacă $\Delta f = 1$ atunci PDF este histograma normalizată

$$p(f) = h(f) / N^2$$

unde $h(f)$ este **histograma nivelelor de gri** a imaginii f .



Histograma

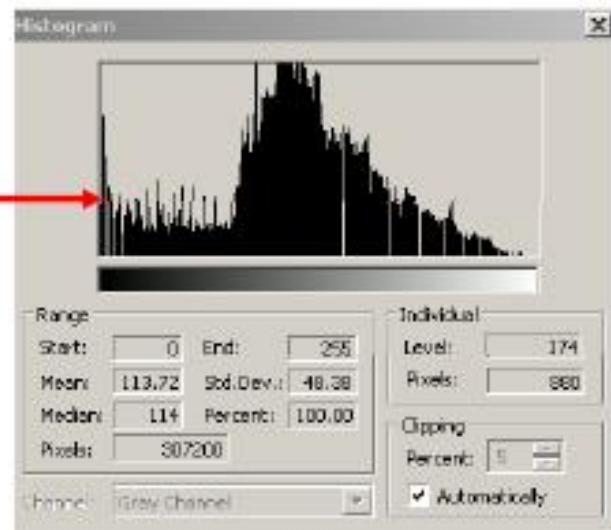
```
For g=0 to L-1  
    h(g) = 0
```

```
End for
```

```
For i=0 to N-1  
    For j=0 to N-1  
        h ( f (I,j) ) ++
```

```
    End for
```

```
End for
```





Proprietăți statistice calculate pe baza histogramei

Media și varianța se pot calcula pe baza funcției densitate de probabilitate (PDF):

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} fp(f)df$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (f - \mu)^2 p(f)df$$

Putem rescrie formulele de mai sus folosind histograma $h(f)$

$$\mu = \frac{1}{N^2} \sum_{f=0}^{f_{\max}} fh(f)$$

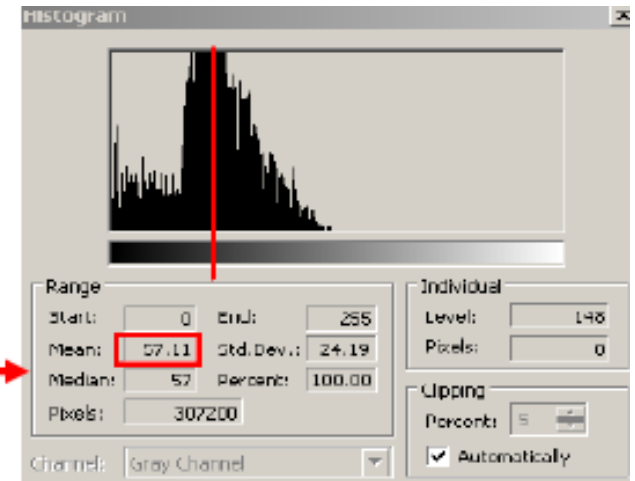
$$\sigma^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{f=0}^{f_{\max}} (f - \mu)^2 h(f)$$



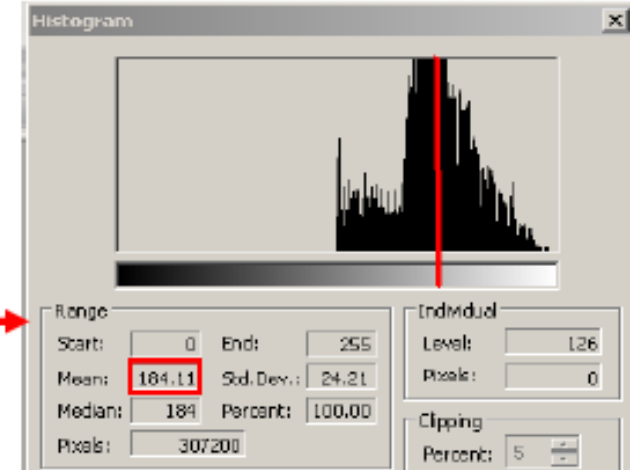
Semnificația mediei

Măsură a luminozității medii a imaginii:

Imagine
Întunecată



Imagine
luminoasă

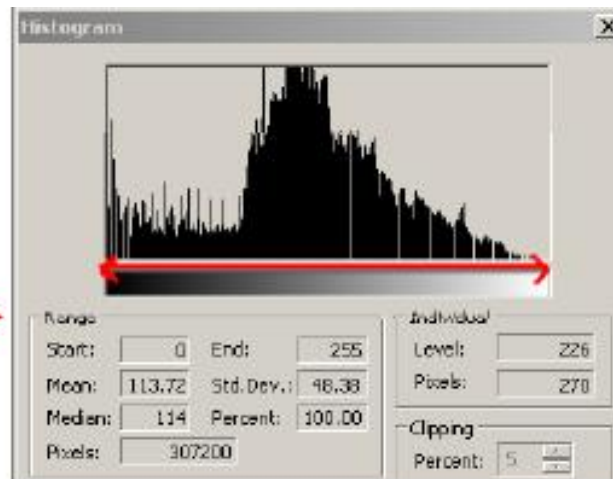




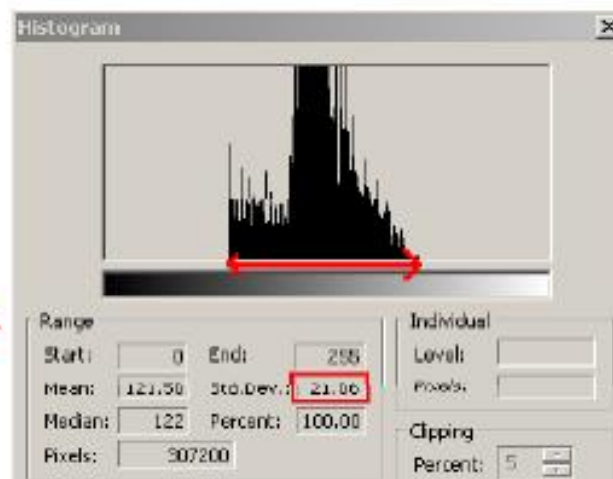
Semnificația varianței

Măsură a contrastului. Rădăcina pătrată a varianței se numește deviație standard.

Contrast mare



Contrast mic





Aplicație: binarizare automată globală

Algoritm de binarizare simplu

- Calcul automat al pragului T
- Funcționează pe imagini cu histogramă bimodală (două vârfuri, obiecte și fundal)

Descrierea algoritmului

1. Se ia o valoare inițială pentru T :

$$T_0 = \mu \quad \text{sau} \quad T_0 = (f_{MAX} + f_{MIN})/2$$

2. Se segmentează imaginea folosind T , obținându-se două mulțimi:

$$G1: f[i,j] > T \Rightarrow \mu_{G1}$$

$$G2: f[i,j] < T \Rightarrow \mu_{G2}$$

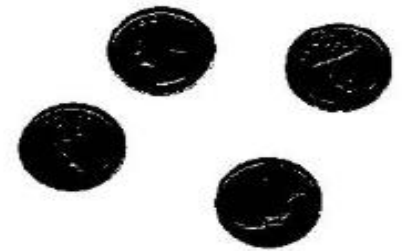
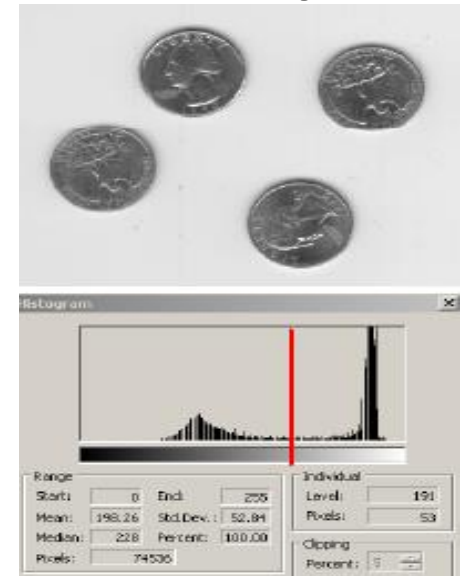
3. Se calculează noul prag:

$$T = (\mu_{G1} + \mu_{G2})/2$$

4. Se repetă pașii 2-3 până când

$$T_k - T_{k-1} < e$$

Implementarea eficientă a acestui algoritm folosește histogramele pentru calculul mediilor !!!





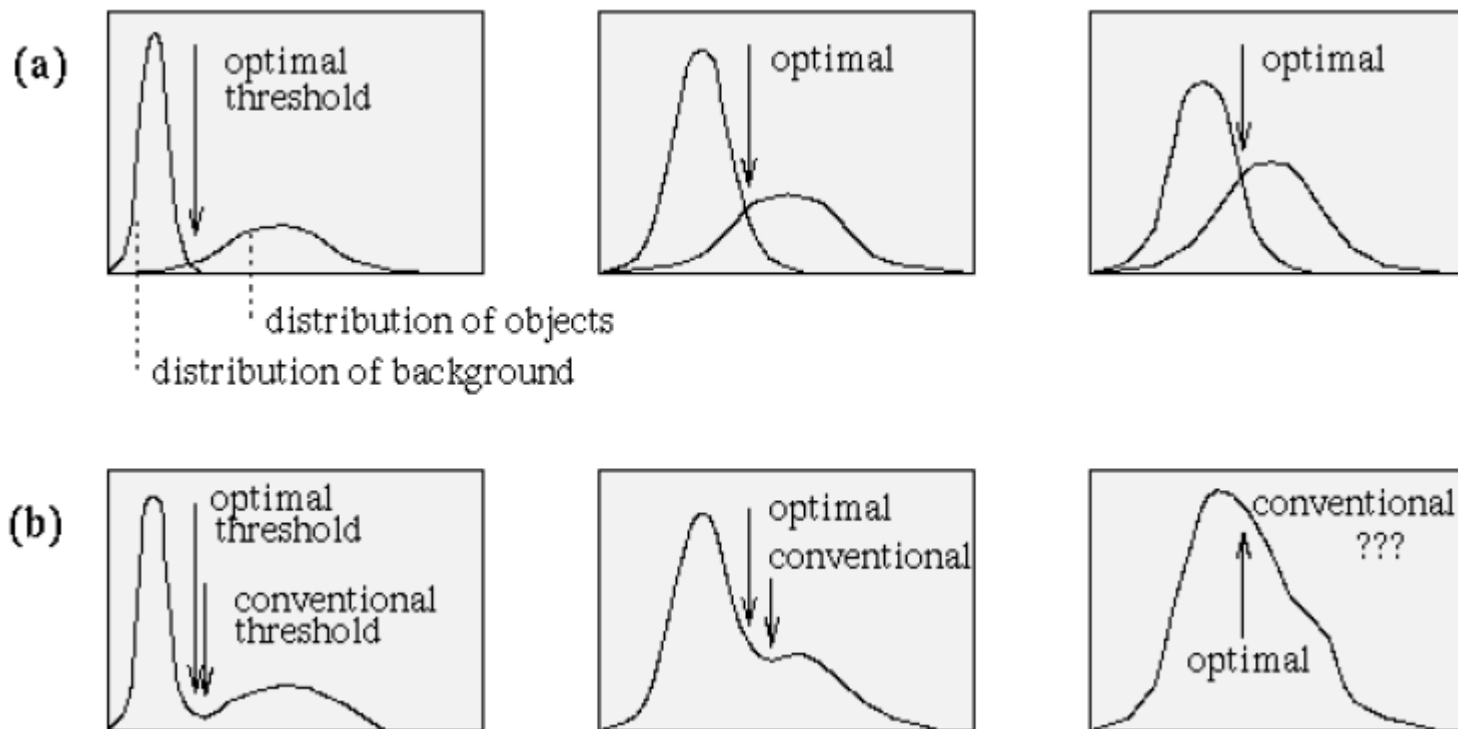
Metoda Otsu

Definirea problemei

- Avem două grupuri de pixeli, care se întind pe domenii de intensități diferite (ex: obiecte și fundal). Problema selecției unui prag este complicată de faptul că aceste domenii de intensitate uneori se suprapun parțial. Se dorește minimizarea erorilor de clasificare a unui pixel obiect ca fundal, și viceversa.
- Pentru realizarea acestui deziderat, încercăm să minimizăm aria de sub histograma unei regiuni, care pe baza pragului calculat va fi atribuită celeilalte regiuni. Vom considera aceste două regiuni ca două grupuri.
- Pragul va fi ales astfel ca cele două grupuri să fie cât mai “strânse”, minimizând astfel suprapunerea.
- O măsură a omogenității grupului este varianța. Un grup cu omogenitate mare are o varianță mică, un grup cu omogenitate mică are varianță mare.



Metoda Otsu



Histograme de nivele de gri approximate prin două distribuții normale. Pragul se alege pentru a avea probabilitatea minimă de a segmenta greșit.

a) Distribuția de probabilitate a fundalului și a obiectelor

b) Histograma rezultată, și pragurile optime



Metoda Otsu

Varianța ponderată intra-clasă este: $\sigma_w^2(t) = q_1(t)\sigma_1^2(t) + q_2(t)\sigma_2^2(t)$

Probabilitățile asociate claselor sunt estimate ca: $q_1(t) = \sum_{i=1}^t P(i)$ $q_2(t) = \sum_{i=t+1}^I P(i)$
unde $P(i) = \frac{H(i)}{N^2}$

$$q_2 = 1 - q_1$$

Mediile claselor sunt definite ca: $\mu_1(t) = \sum_{i=1}^t \frac{iP(i)}{q_1(t)}$ $\mu_2(t) = \sum_{i=t+1}^I \frac{iP(i)}{q_2(t)}$

Varianțele individuale ale claselor sunt definite ca:

$$\sigma_1^2(t) = \sum_{i=1}^t [i - \mu_1(t)]^2 \frac{P(i)}{q_1(t)} \quad \sigma_2^2(t) = \sum_{i=t+1}^I [i - \mu_2(t)]^2 \frac{P(i)}{q_2(t)}$$

În acest moment avem toate ecuațiile necesare pentru a măsura varianța ponderată intra-clasă. Am putea să verificăm fiecare posibilă valoare a pragului t , și să o alegem pe cea care minimizează această varianță.

- Totuși, relația dintre varianța intra-clasă și varianța dintre clase se poate exploata pentru a găsi o recursivitate ce permite un calcul mai rapid.



Metoda Otsu

Varianța totală a imaginii este:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{i=1}^I [(i - \mu)^2 P(i)] \quad \mu = \sum_{i=1}^I i P(i) \\ \sigma^2 &= \sum_{i=1}^t [i - \underbrace{\mu_1(t) + \mu_1(t) - \mu}_{\text{red bracket}}]^2 P(i) + \sum_{i=t+1}^I [i - \underbrace{\mu_2(t) + \mu_2(t) - \mu}_{\text{red bracket}}]^2 P(i) \\ &= \sum_{i=1}^t \{ [i - \mu_1(t)]^2 + 2[i - \mu_1(t)][\mu_1(t) - \mu] + [\mu_1(t) - \mu]^2 \} P(i) \\ &\quad + \sum_{i=t+1}^I \{ [i - \mu_2(t)]^2 + 2[i - \mu_2(t)][\mu_2(t) - \mu] + [\mu_2(t) - \mu]^2 \} P(i) \end{aligned}$$

Dar: $\sum_{i=1}^t [i - \mu_1(t)][\mu_1(t) - \mu] P(i) = 0$ $\sum_{i=t+1}^I [i - \mu_2(t)][\mu_2(t) - \mu] P(i) = 0$

Astfel $\Rightarrow \sigma^2 = \sum_{i=1}^t [i - \mu_1(t)]^2 P(i) + [\mu_1(t) - \mu]^2 q_1(t) + \sum_{i=t+1}^I [i - \mu_2(t)]^2 P(i) + [\mu_2(t) - \mu]^2 q_2(t)$

$$\sigma^2 = [q_1(t)\sigma_1^2(t) + q_2(t)\sigma_2^2(t)] + \{q_1(t)[\mu_1(t) - \mu]^2 + q_2(t)[\mu_2(t) - \mu]^2\}$$

$$\mu = q_1(t)\mu_1(t) + q_2(t)\mu_2(t)$$

$$1 - q_1(t) = q_2(t)$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \sigma_w^2(t) + q_1(t)[1 - q_1(t)][\mu_1(t) - \mu_2(t)]^2$$



Metoda Otsu

Pentru orice prag, varianța totală a imaginii este suma dintre varianța intra-clasă, și varianța dintre clase.

$$\sigma^2 = \underbrace{\sigma_w^2(t)}_{\text{varianța intra-clasă}} + \underbrace{q_1(t)[1 - q_1(t)][\mu_1(t) - \mu_2(t)]^2}_{\text{varianța dintre clase}}$$

-Deoarece varianța totală este constantă, independentă de pragul t , efectul alegerii pragului este doar de a schimba ponderea celor două varianțe.

-Problema minimizării varianței intra-clasă este astfel echivalentă cu problema maximizării varianței dintre clase.

-Acest lucru se poate face recursiv.



Metoda Otsu

Inițializare: $q_1(0) = P(0)$; $\mu_1(0) = 0$

Recursivitate: $q_1(t+1) = q_1(t) + P(t+1)$

$$\mu_1(t+1) = \frac{q_1(t)\mu_1(t) + (t+1)P(t+1)}{q_1(t+1)}$$

$$\mu_2(t+1) = \frac{\mu - q_1(t+1)\mu_1(t+1)}{1 - q_1(t+1)}$$

Pentru fiecare prag potențial t :

1. Se separă histograma în două clase, pe baza pragului
2. Se calculează media celor două clase
3. Se calculează varianța dintre clase, conform ecuației de pe slide-ul anterior

Se reține pragul t care maximizează această varianță.



Binarizarea prin aproximarea cu o imagine cu două nivele de gri

Dacă se dă imaginea f_{ij} , imaginea binară este:

$$g_{ij} = \begin{cases} a & \text{if } f_{ij} < t \\ b & \text{if } f_{ij} \geq t \end{cases}$$

Unde t este pragul, iar a și b sunt constante alese să minimizeze distanța față de f pe intervalele specificate.

-Distanța Euclidiană pe intervalul $[0,t]$ este

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^D (f_{ij} - g_{ij})^2 = \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^D [(f_{ij})^2 - 2f_{ij}g_{ij} + (g_{ij})^2] = \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} k^2 H_k - 2a \sum_{k=0}^{t-1} k H_k + a^2 \sum_{k=0}^{t-1} H_k}_{F(a)} + \underbrace{\sum_{k=t}^{P-1} k^2 H_k - 2b \sum_{k=t}^{P-1} k H_k + b^2 \sum_{k=t}^{P-1} H_k}_{F(b)} \end{aligned}$$

-Minimele funcțiilor $F(a)$ și $F(b)$ sunt atinse atunci când a și b sunt valorile medii ale intervalelor:

$$a = \text{Min}(F(a)) = m_i = \frac{\sum_{k=0}^{t-1} k H_k}{\sum_{k=0}^{t-1} H_k}$$

$$b = \text{Min}(F(b)) = m_s = \frac{\sum_{k=t}^{P-1} k H_k}{\sum_{k=t}^{P-1} H_k}$$



Binarizarea prin aproximarea cu o imagine cu două nivele de gri

Distanța pe întreaga imagine este:

$$D = \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^D (f_{ij} - g_{ij})^2 = \underbrace{\sum_{k=0}^{P-1} k^2 H_k}_{\text{F maxim pentru pragul optim}} - \left[\frac{\left(\sum_{k=0}^{t-1} k H_k \right)^2}{\sum_{k=0}^{t-1} H_k} + \frac{\left(\sum_{k=t}^{P-1} k H_k \right)^2}{\sum_{k=t}^{P-1} H_k} \right]$$

F maxim pentru pragul optim

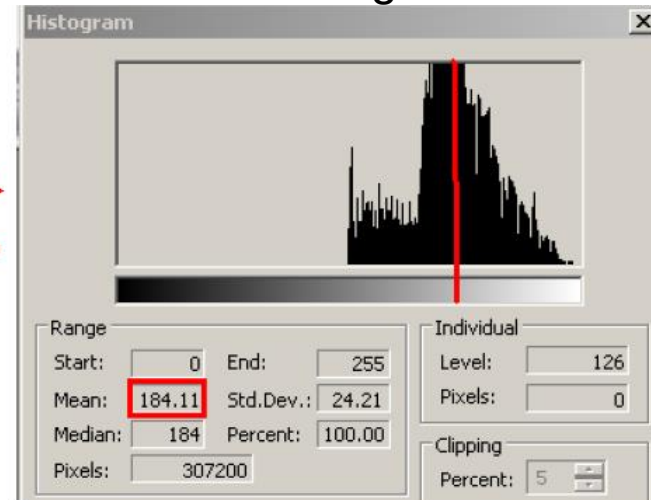
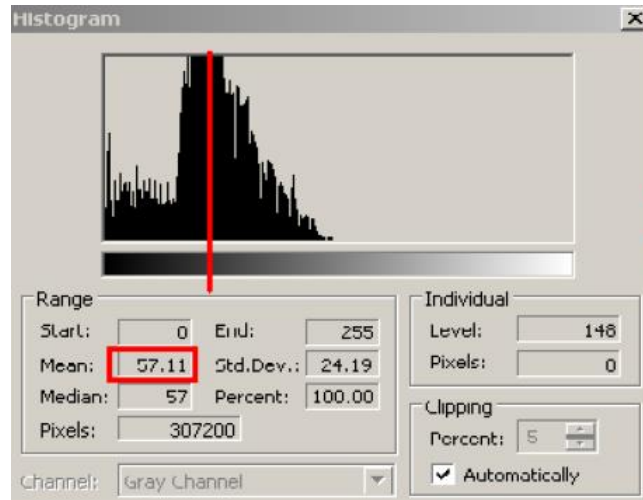
- F se poate scrie ca $F = m_i^2 A_i + m_s^2 A_s$ unde A_i și A_s sunt numărul de pixeli cu valori sub și peste pragul t .
- F trebuie evaluat pentru fiecare t , și pragul t care duce la F maxim este ales.
- Algoritmul se poate aplica pentru mai multe nivele de segmentare $t_1, t_2, \dots, t_n$, prin împărțirea intervalelor. Primul pas ne dă $t_{n/2}$, apoi algoritmul se aplică pe intervalele $[0, t_{n/2}]$ și $[t_{n/2}, P-1]$, etc.



Îmbunătățirea imaginilor: deplasamentul histogrammei

$$\text{Slide}(f[i, j]) = f[i, j] + \text{offset}$$

Offset > 0 -> imagine mai luminoasă
Offset < 0 -> imagine mai întunecată

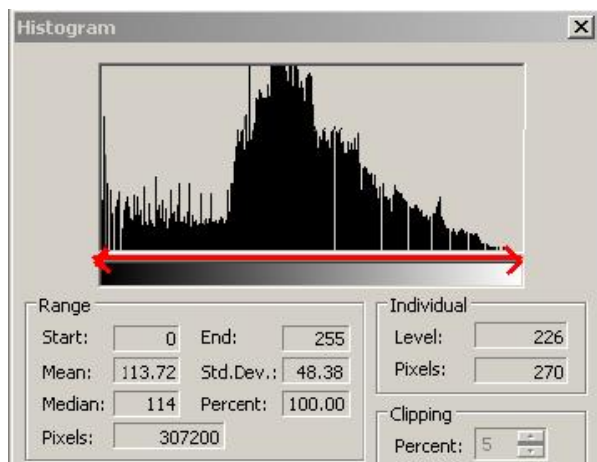




Întinderea/îngustarea histogramei

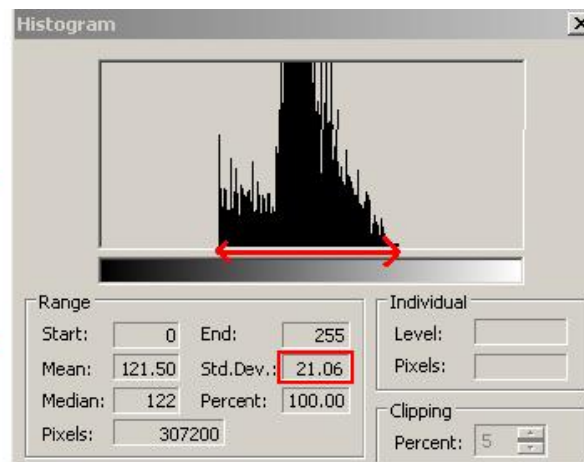
Alterarea contrastului:

$$\text{Stretch/Shrink}(f[i,j]) = \text{Final}_{\text{MIN}} + (\text{Final}_{\text{MAX}} - \text{Final}_{\text{MIN}}) * (f[i,j] - f_{\text{MIN}}) / (f_{\text{MAX}} - f_{\text{MIN}})$$



shrink

stretch



shrink

stretch



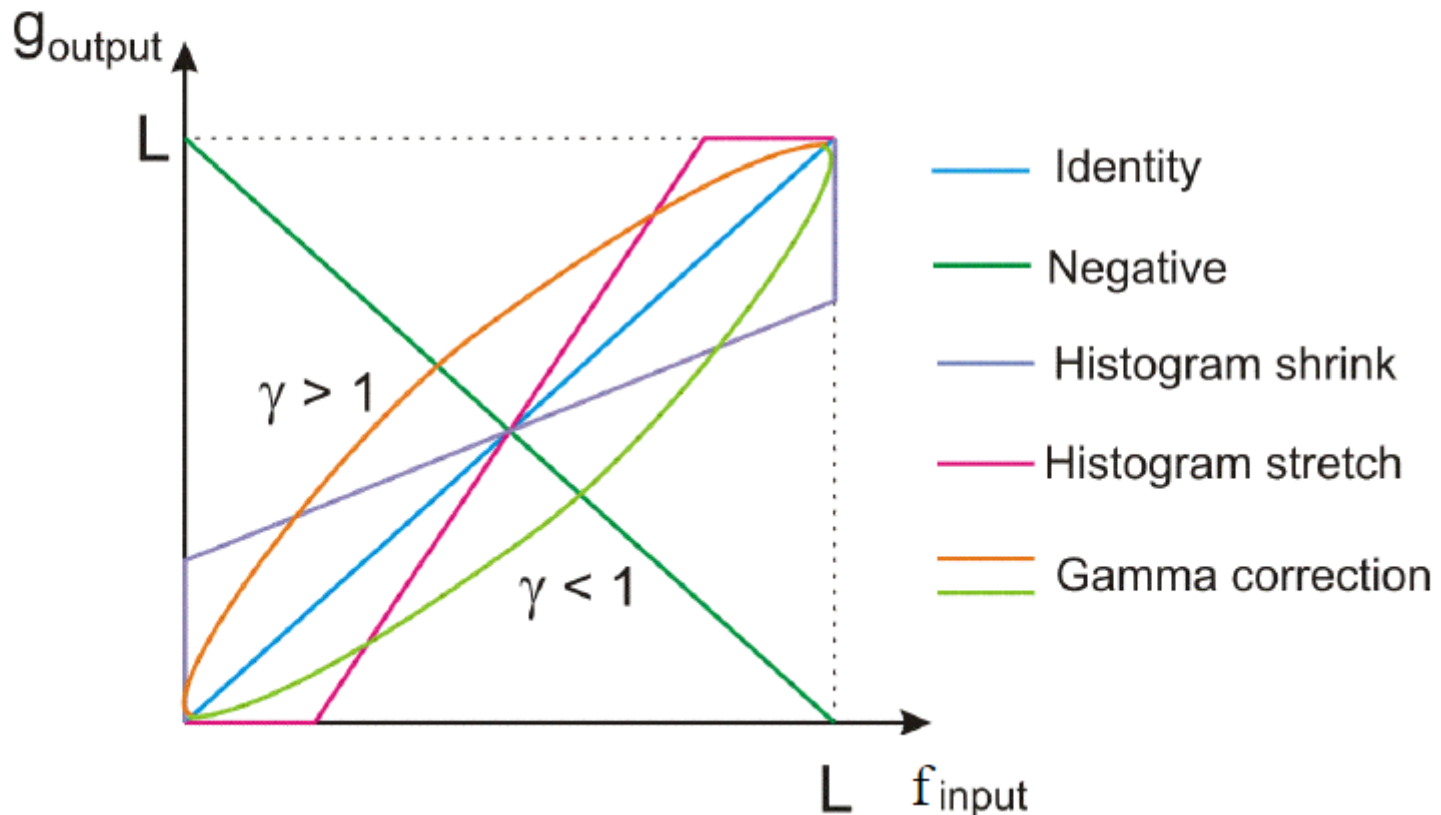


Folosirea unei funcții de transformare

$$g_{output} = T(f_{input})$$

Ex. - gamma correction:

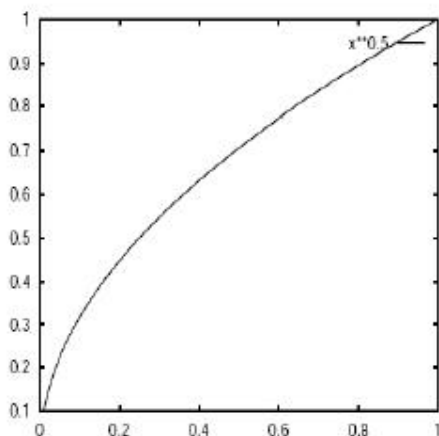
$$g_{out} = c \cdot f_{in}^{\gamma}$$



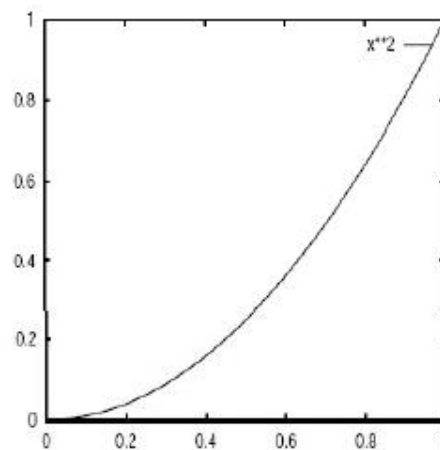


Corecția gamma

- Procesul fotografic conține neliniarități de forma $g(x,y) = f(x,y)^\gamma$ unde f este intensitatea percepută, g este intensitatea reală iar γ este o constantă.
- Pentru a corecta imaginea, avem nevoie de o transformare $T(g) = g^{1/\gamma}$, sau mai precis $T(g) = g_{max} (g/g_{max})^{1/\gamma}$



Correction of $\gamma = 2$

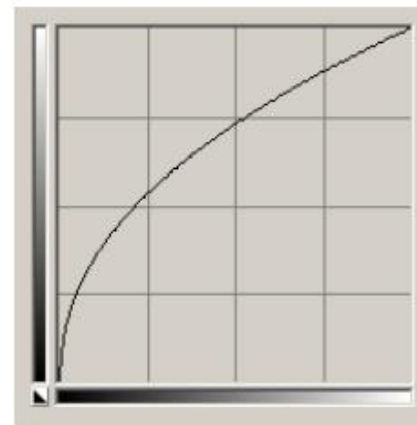


Correction of $\gamma = 0.5$





Corecția gamma





Alte proprietăți statistice

Cantitatea de informație asociată cu un nivel de gri f

$$I_g = -\log_2 p(f) \quad [bits]$$

-cantitatea de informație este mare atunci când se generează un nivel de gri “rar”.

Entropia – cantitatea de informație medie în imagine

$$H = -\sum_{g=0}^L p(f) \cdot \log_2 p(f) \quad [bits]$$

-câți biți sunt necesari pentru a codifica imaginea.

-H mare, pixelii sunt distribuiți pe multe nivele de gri. $H_{\max} = \log_2 L$ [bits] (PDF uniform)

Energia – cum sunt distribuite nivelele de gri

$$E = \sum_{g=0}^L [p(f)]^2$$

E mic – numărul de nivele de gri în imagine este mare

E max = 1, există un singur nivel de gri în imagine.



Procesarea histogramei: egalizarea

Scopul: distribuirea uniformă a pixelilor în plaja de nivele de gri.

Nivele de gri normalizate:

$$f \in [0 \dots L-1] \Rightarrow r \in [0 \dots 1]$$

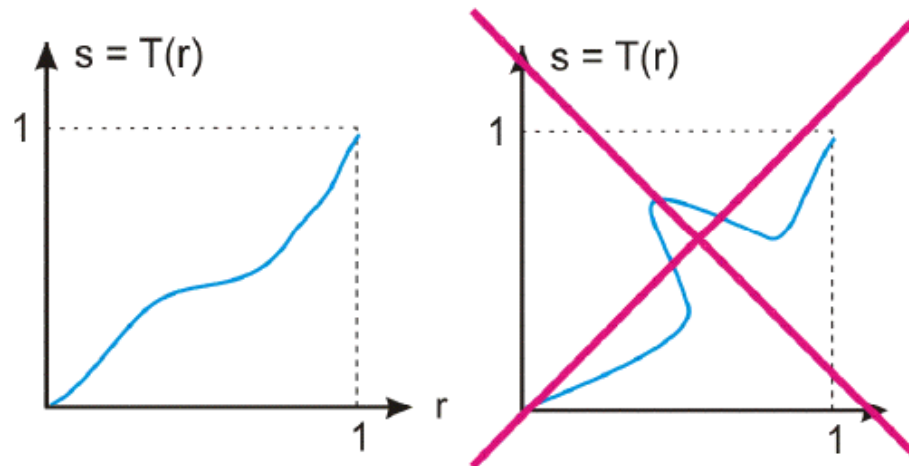
Funcția de transformare:

$$s = T(r) \in [0 \dots 1] \Rightarrow g \in [0 \dots L-1]$$

Proprietățile funcției T :

a) Bijectivă și monoton crescătoare $\Rightarrow \exists r = T^{-1}(s)$

b) $0 \leq T(r) \leq 1$





Procesarea histogramei: egalizarea

- $p_r(r)$, $p_s(s)$ – PDF ale imaginii sursă și destinație.
- $p_r(r)$ și $s=T(r)$ sunt cunoscute, și T^{-1} satisface condiția a), deci $r=T^{-1}(s)$

$$P(s) = \text{Prob}(\text{pixel value} \leq s) = \int_{-\infty}^s p_s(s) ds$$

$$P(s) = \text{Prob}(T(r) \leq s)$$

$$T(r) \leq s \mid T^{-1} \quad T^{-1}(T(r)) \leq_P T^{-1}(s) \quad r \leq T^{-1}(s)$$

$$P(s) = \text{Prob}(r \leq T^{-1}(s)) = \int_{-\infty}^{T^{-1}(s)} p_r(r) dr$$

$$p(s) = \frac{dP(s)}{ds} = \frac{d(T^{-1}(s))}{ds} p_r(T^{-1}(s)) = \frac{dr}{ds} p_r(r)$$

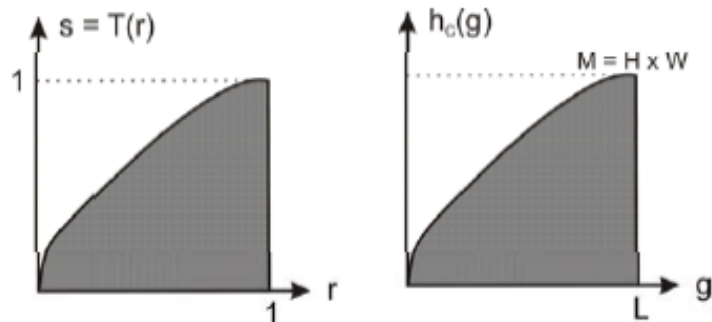
$$p_s(s) = \frac{dP(s)}{ds} = p_r(r) \frac{dr}{ds} \quad (1)$$



Procesarea histogramei: egalizarea

Histograma cumulativă / densitatea cumulativă de probabilitate (CDF)

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(w)dw \quad (2)$$



T satisface condițiile a și b.

Regula lui Leibniz: derivata unei integrale definite față de limita superioară este funcția integrată evaluată în acel punct:

$$\frac{ds}{dr} = \frac{dT(r)}{dr} = \frac{d}{dr} \left[\int_0^r p_r(w)dw \right] = p_r(r) \quad (3)$$



Procesarea histogramei: egalizarea

Din ecuațiile 1 și 3 rezultă

$$p_s(s) = p_r(r) \frac{dr}{ds} = p_r(r) \frac{1}{p_r(r)} = 1 \quad , \quad 0 \leq s \leq 1$$

Astfel, $p_s(s)$ este o funcție densitate de probabilitate uniformă.

Algoritmul de egalizare a histogramei:

$$p_r(r_k) = \frac{n_k}{n} \quad , \quad k = 0 \dots L$$

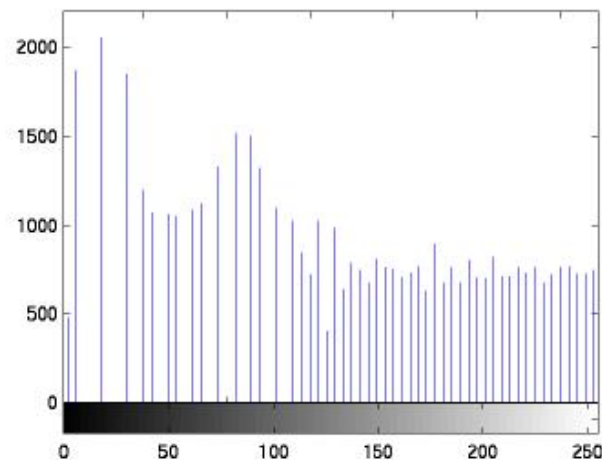
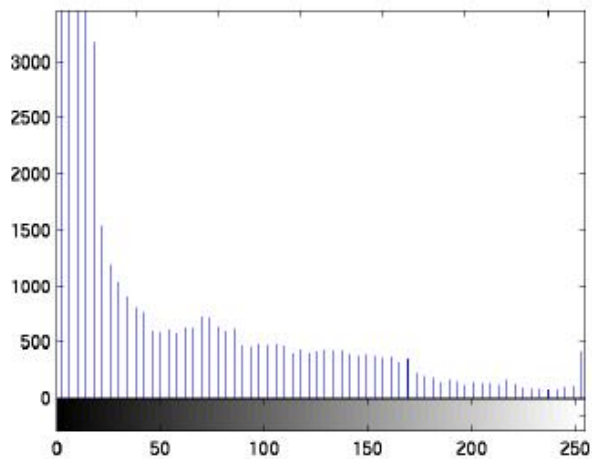
$$s_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^k p_r(r_j) = \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n} \quad , \quad k = 0 \dots L-1$$

- Ultimul pas este re-scalarea rezultatului pentru intervalul 0..L-1.

$$g_k = \text{round}(s_k(L-1))$$

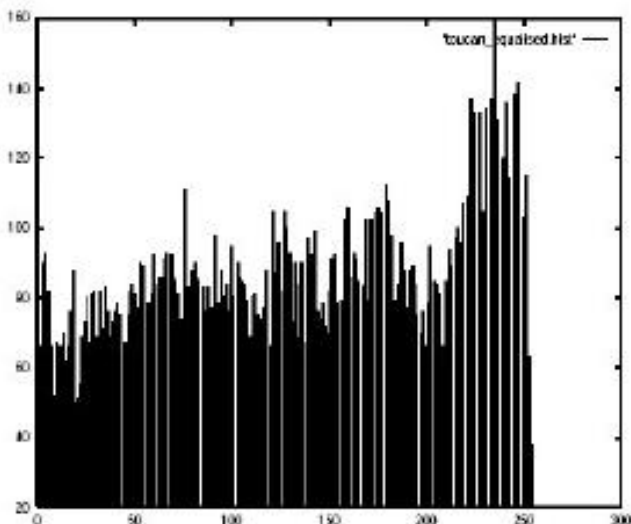
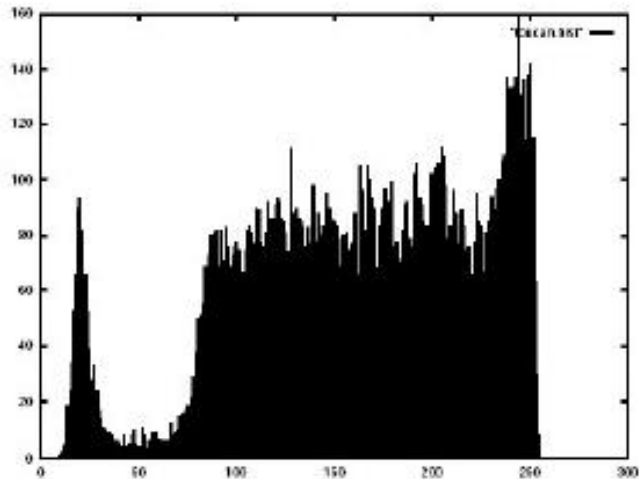


Procesarea histogramei: egalizarea



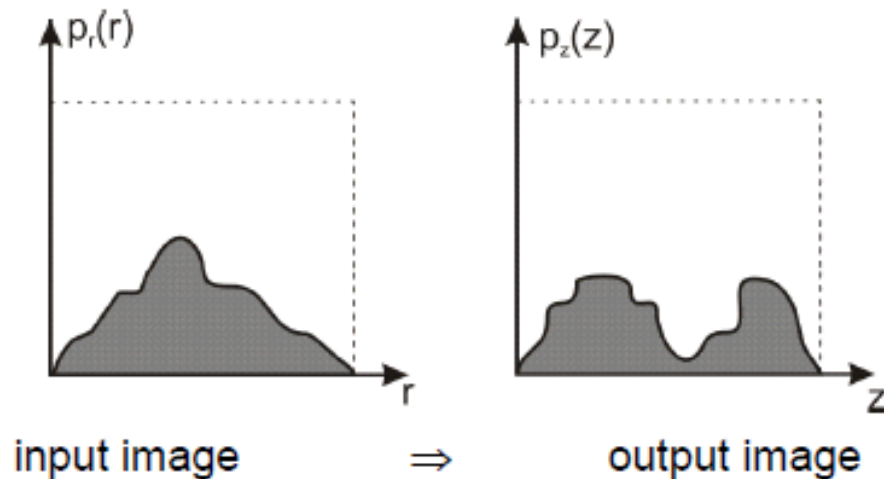


Procesarea histogramei: egalizarea





Specificarea histogramei



Pentru imaginea intrare avem: $s = T(r) = \int_0^r p_r(w)dw$ (1)

Se definește variabila aleatoare z cu proprietatea: $G(z) = \int_0^z p_z(t)dt = s$ (2)

Din (1) și (2) rezultă: $G(z) = T(r)$

$$z = G^{-1}(s) = G^{-1}[T(r)]$$



Specificarea histogramei

$$s_k \leftrightarrow z_k$$

Nu există expresii analitice pentru $T(r)$ și G^{-1} !?:

Algoritm:

1. $r_k \leftrightarrow s_k$:

$$s_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^k p_r(r_j) = \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n}, \quad k = 0 \dots L$$

1. $s_k \leftrightarrow v_k$:

$$v_k = G(z_k) = \sum_{j=0}^k p_z(z_j) = s_k, \quad k = 0 \dots L$$

1. $s_k \leftrightarrow z_k$:

$$\text{Let } z' = z_k, \quad k = 0, \dots, L$$

z_k va fi cel mai mic z' ce satisface condiția:

$$(G(z') - s_k) \geq 0$$

