



Technical University of Cluj - Napoca
Computer Science Department

Procesarea Imaginilor

(An 3, Semestrul 2)

Curs 7: Convoluția. Transformata Fourier



Notatii și definiții

O imagine continuă este reprezentată ca o funcție de două variabile independente, $f(x,y)$, $u(x,y)$, $v(x,y)$, etc.

O imagine discretă este reprezentată ca un tablou bidimensional de numere reale, $f(i,j)$, $u(k,l)$, $v(m,n)$, etc.

Simbolurile i, j, k, l, m, n sunt indici întregi ai tablourilor sau ai vectorilor

Simbolul j va nota $\sqrt{-1}$

Două funcții binecunoscute, folosite frecvent, sunt funcția **Dirac** și funcția **Kronecker**. Variantele lor bi-dimensionale sunt funcții cu formă separabilă $f(x,y)=f_1(x)*f_2(y)$:

-Funcția bi-dimensională continuă Dirac delta este definită ca $\delta(x,y) = \delta(x) \delta(y)$

-Funcția bi-dimensională discretă Kroenecker delta este definită ca

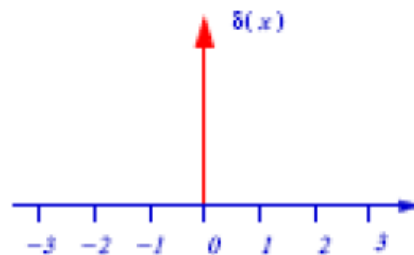
$$\delta(m,n) = \delta(m) \delta(n)$$



Funcția Dirac

Funcția Dirac delta este o funcție definită pe mulțimea numerelor reale, ce are valoarea zero în orice punct mai puțin în origine, și care satisface condițiile:

$$\delta(x) = 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$



Funcția poate fi imaginată ca un vârf foarte înalt și foarte îngust localizat în origine. Funcția Dirac nu trebuie considerată un vârf de înălțime infinită și lățime zero, deoarece satisface următoarea proprietate:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a \delta(x) dx = a \quad \text{pentru orice } a \text{ constant.}$$

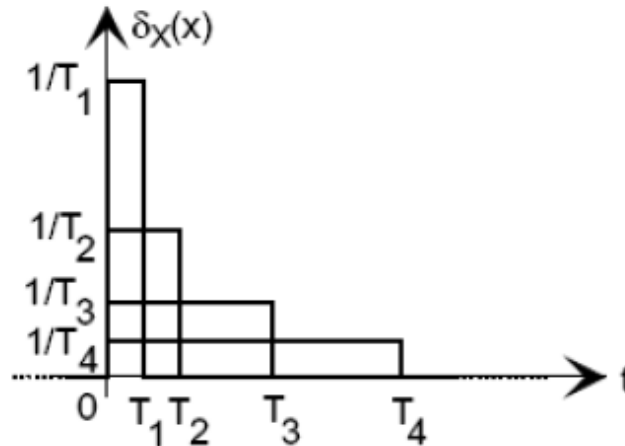
Proprietatea fundamentală: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$ și $\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x) \delta(x) dx = f(0)$ pt. $a=0, \varepsilon>0$

Proprietatea de deplasare:

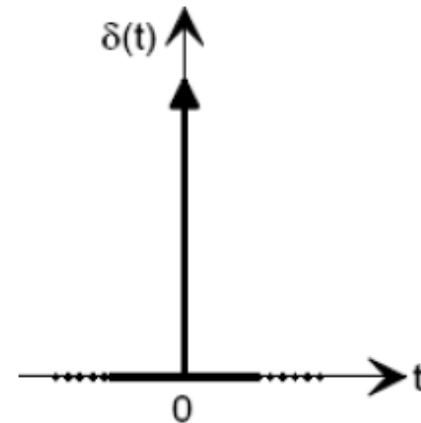
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \quad \text{și} \quad \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \quad \text{pt } \varepsilon>0$$



Funcția Impuls Unitar



Pulsuri de diferite lățimi



Funcția impuls

Figura prezintă o funcție puls unitar $\delta_T(t)$ care este o funcție rectangulară de durată T , având o amplitudine $1/T$ pe durata ei, astfel încât aria dreptunghiului să fie 1.

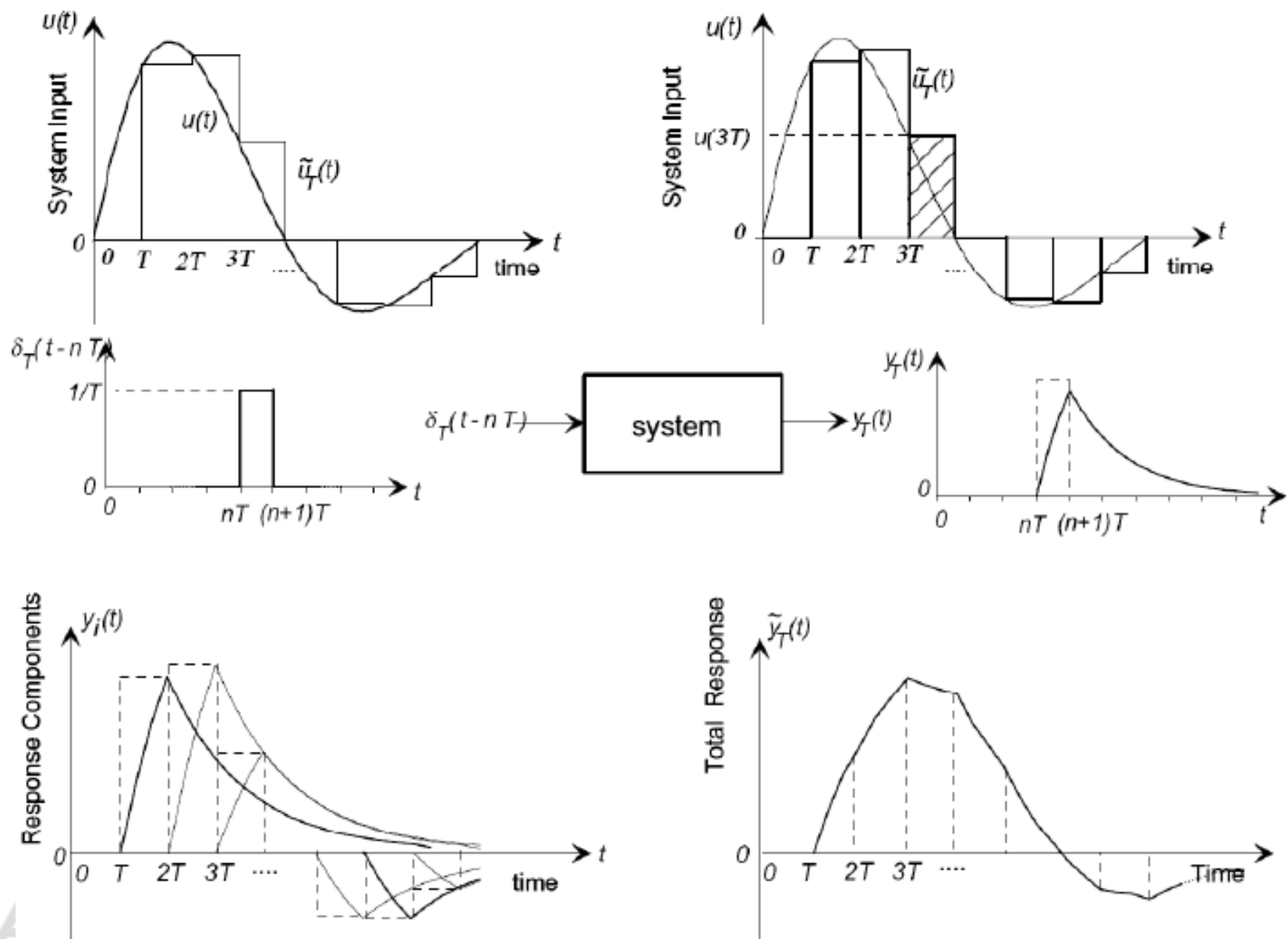
$$\delta_T(t) = \begin{cases} 0, & \text{for } t \leq 0 \\ 1/T, & 0 < t \leq T \\ 0, & \text{for } t > T \end{cases}$$

Funcția Dirac poate fi definită ca limita funcției puls atunci când durata T se apropie de zero.

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \delta_T(t)$$



Răspunsul sistemelor la pulsuri individuale





Sisteme liniare și invarianța la deplasare

- Fie $f(m,n)$ o secvență de intrare, și $g(m,n)$ o secvență de ieșire a unui sistem bi-dimensional
 $g(m,n) = H[f(m,n)]$
- Sistemul este **liniar** dacă și numai dacă pentru două constante arbitrare a_1 și a_2 este adevărată ecuația:

$$H[a_1 f_1(m,n) + a_2 f_2(m,n)] = a_1 H[f_1(m,n)] + a_2 H[f_2(m,n)] = a_1 g_1(m,n) + a_2 g_2(m,n)$$

- Proprietatea superpoziției liniare



Sisteme liniare și invarianța la deplasare

- Ieșirea $g(m,n)$ a unui sistem liniar poate fi obținută astfel:

$$\begin{aligned} g(m,n) &= H[f(m,n)] = H \left[\sum_{m'} \sum_{n'} f(m',n') \delta(m-m', n-n') \right] \\ &= \sum_{m'} \sum_{n'} f(m',n') H[\delta(m-m', n-n')] \\ \Rightarrow g(m,n) &= \sum_{m'} \sum_{n'} f(m',n') h(m,n;m',n') \end{aligned}$$

unde $h(m,n,m',n')$ este răspunsul sistemului la impuls.

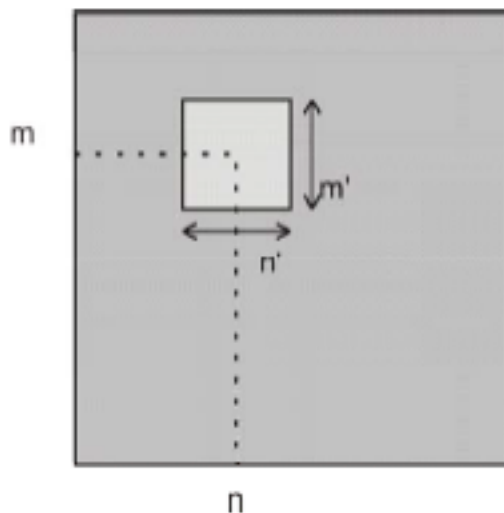
-Răspunsul la impuls $h(m,n,m',n')$ este ieșirea sistemului H pentru locația (m,n) , unde intrarea este o funcție bi-dimensională Kroenecker delta centrată în (m',n') .

- Răspunsul la impuls se numește **funcția de dispersie punctiformă (Point Spread Function, PSF)**, unde intrarea și ieșirea sunt valori pozitive, precum intensitatea în imagine.



Sisteme liniare și invarianța la deplasare

- Regiunea suport a unui răspuns la impuls este cea mai mică regiune închisă în planul (m,n) în afara căreia răspunsul este zero.
- Un sistem poate fi:
 - Cu răspuns finit la impuls (FIR), dacă răspunsul are o regiune suport finită
 - Cu răspuns infinit la impuls (IIR) dacă răspunsul are o regiune suport infinită.





Sisteme liniare și invarianța la deplasare

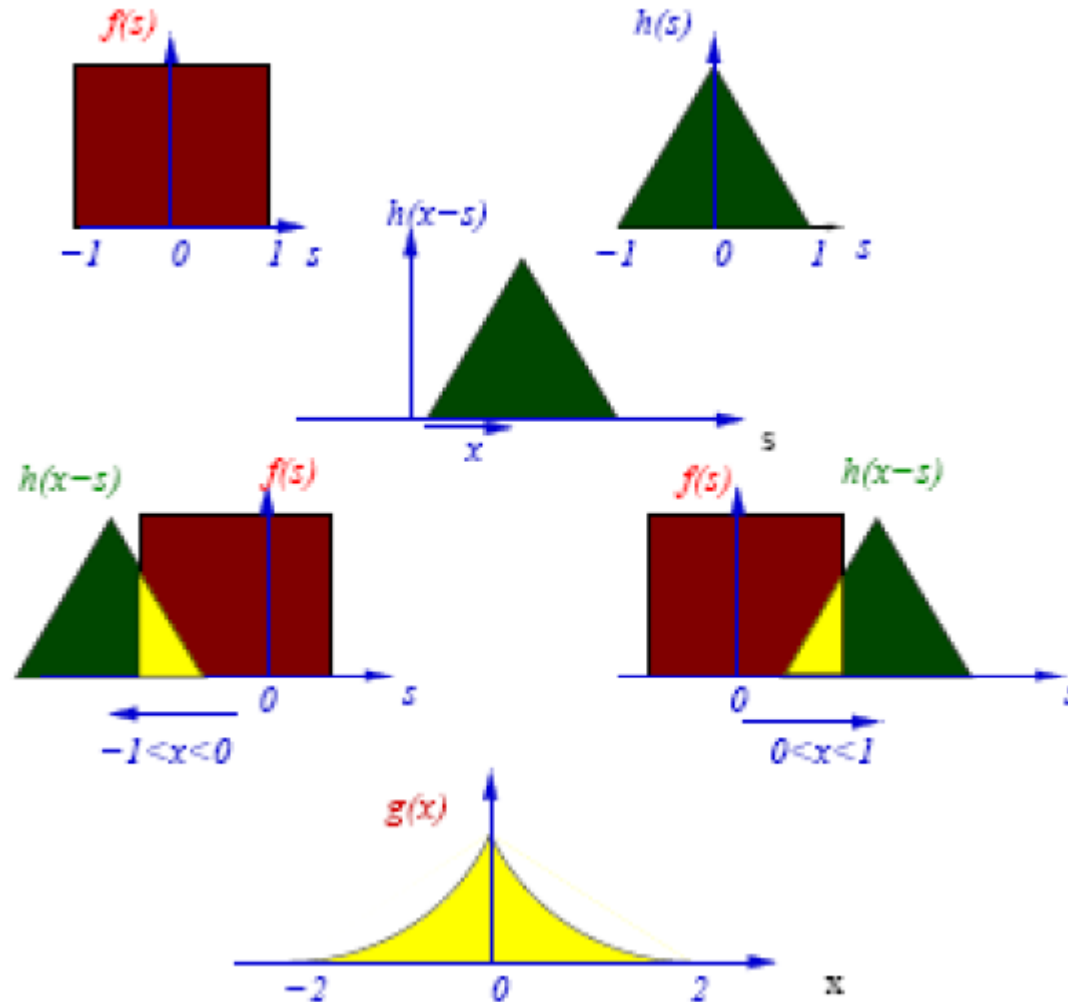
- Un sistem se numește **invariant spațial** sau **invariant la deplasare** dacă o translație a intrării cauzează o deplasare corespunzătoare a ieșirii.
- Pentru sisteme invariante la deplasare, $h(m,n,m', n')=h(m-m', n-n')$
- Forma răspunsului depinde doar de două variabile, ce descriu deplasarea.
- Forma răspunsului nu se modifică pe măsură ce impulsul se deplasează în planul (m,n).
- Pentru sisteme invariante la deplasare, ieșirea este

$$g(m,n) = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} h(m-m', n-n') f(m', n')$$

Procesul se numește convoluție a intrării cu răspunsul la impuls.



Convoluția





Convoluția

- Operația de convoluție este notată cu simbolul *

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x - x', y - y') f(x', y') dx' dy'$$

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x', y') f(x - x', y - y') dx' dy'$$

$$g(m, n) = h(m, n) * f(m, n) = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} h(m - m', n - n') f(m', n')$$

$$g(m, n) = h(m, n) * f(m, n) = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} h(m', n') f(m - m', n - n')$$



Convoluția

- Proprietățile convoluției

- Comutativitate

$$f * g = g * f$$

- Asociativitate

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

- Distributivitate

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

- Element neutru (identitate)

$$f * \delta = \delta * f = f$$

- Asociativitate la înmulțirea cu un scalar

$$a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$$

- Regula de derivare

$$D(f * g) = Df * g = f * Dg$$

- Teorema convoluției

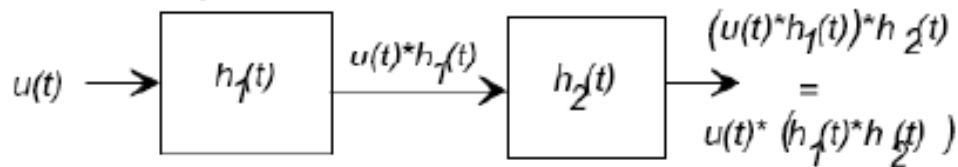
$$F(f * g) = kF(f)F(g)$$



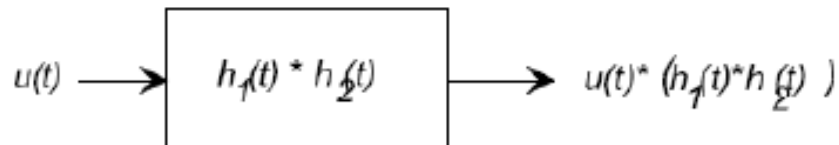
Convoluția

- Răspunsuri la impuls pentru sisteme conectate în serie și paralel

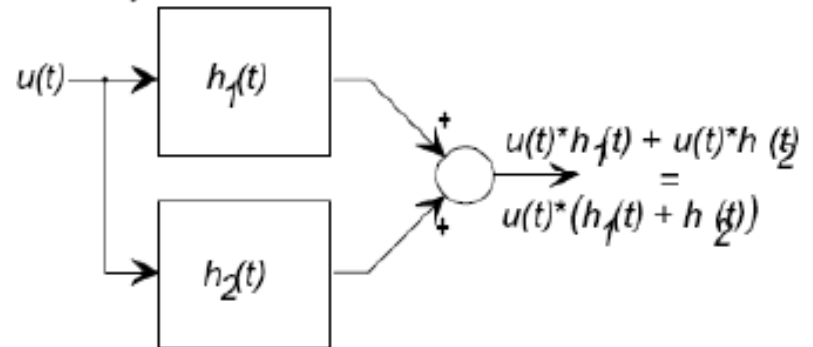
Cascade systems:



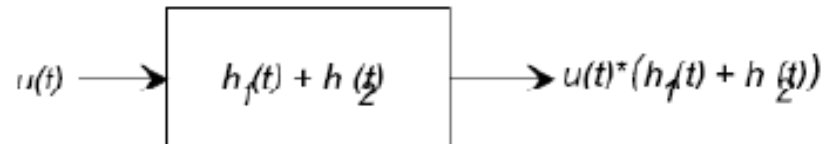
Equivalent system:



Parallel systems:



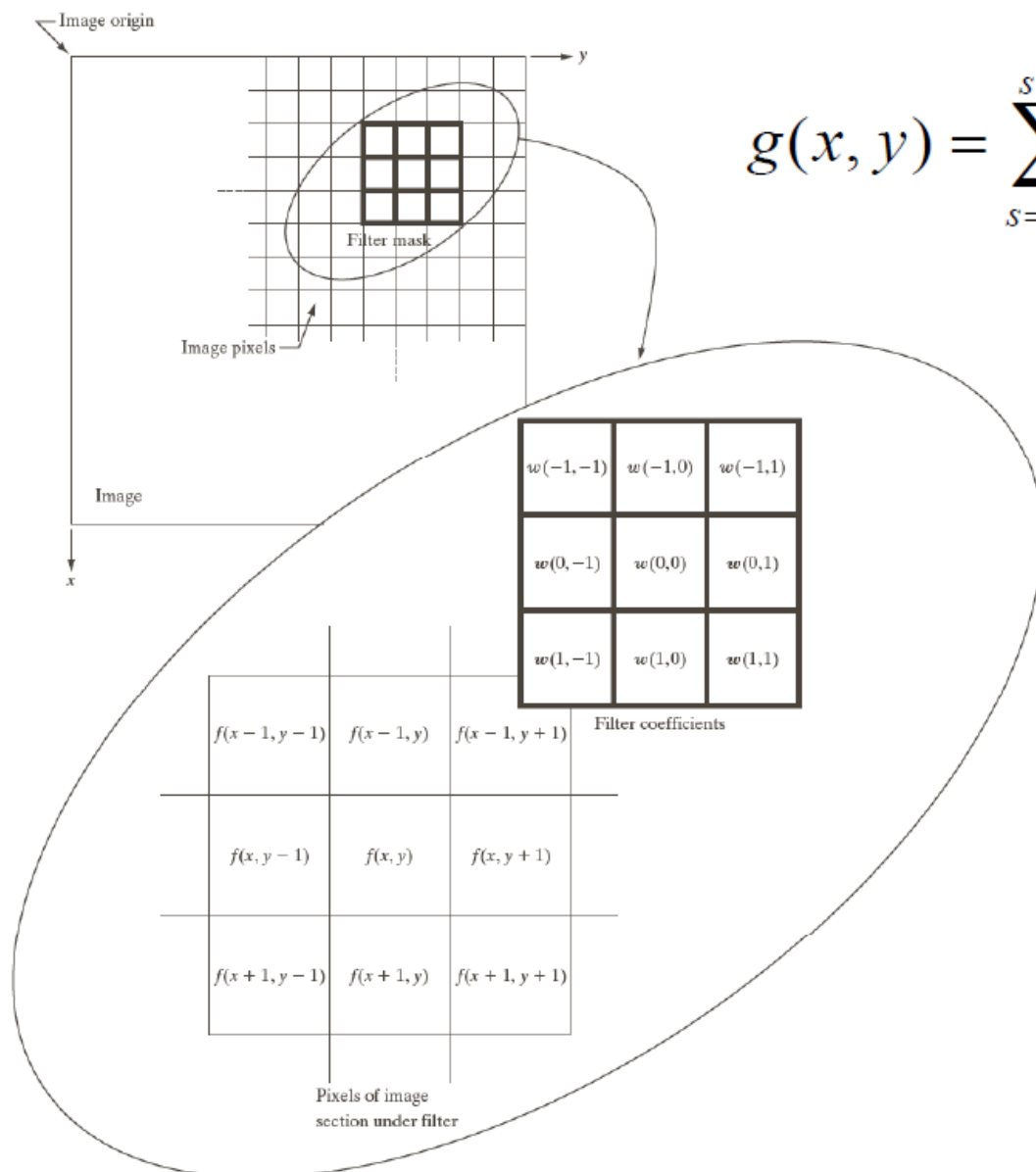
Equivalent system:





Convoluția

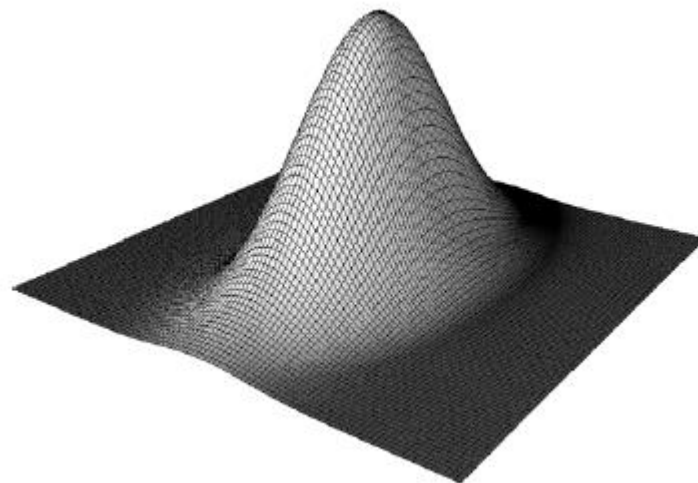
$$g(x, y) = \sum_{s=-1}^{s=1} \sum_{t=-1}^{t=1} w(s, t) f(x + s, y + t)$$





Convoluția

$$G_{2D}(x, y; \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$



$\frac{1}{273}$

1	4	7	4	1
4	16	26	16	4
7	26	41	26	7
4	16	26	16	4
1	4	7	4	1

Aproximare discretă a unui nucleu 2D Gaussian, cu $\sigma=1.0$



Transformata Fourier

Transformata Fourier convertește datele imagine aranjate spațial $f(x,y)$ într-o reprezentare în spațiul de frecvențe $F(u,v)$. Ambele reprezentări conțin aceeași informație, dar fiecare reprezentare are propriile avantaje și dezavantaje.

Domeniu spațial

- + Reprezentare intuitivă a datelor imagine
- + Filtrarea se aplică direct pe datele spațiale
- Filtrarea cu nuclee mari ia mult timp.

Domeniul frecvențial

- Reprezentare non-intuitivă a imaginii
- +Filtrarea cu nuclee mari poate fi făcută mai rapid
- Imaginea și nucleul de convoluție trebuie convertite în spațiul de frecvențe, și rezultatul filtrării trebuie apoi re-convertit în domeniul spațial
- + Proiectarea nucleelor de convoluție este mai ușoară.



Transformata Fourier

Imaginea

- un aranjament spațial al nivelelor de gri
- se poate considera o funcție de coordonate discrete în plan

Funcția imagine poate fi descompusă în funcții ortogonale numite funcții bază

- Când funcțiile bază sunt combinate liniar, funcția originală poate fi reconstruită
- Funcțiile bază pentru transformata Fourier sunt sinusoidale
- Se poate scrie

$$f(x,y) = \sum \textit{Weighted basis functions}$$



Transformata Fourier

Transformata Fourier a unei funcții complexe $f(x)$:

$$F(u) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j2\pi ux) dx$$

$$F(u) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos 2\pi ux - j \sin 2\pi ux) dx$$

Transformata inversă a lui $F(u)$:

$$f(x) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{F}^{-1}[F(u)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp(j2\pi ux) du$$

$$f(x) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{F}^{-1}[F(u)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) (\cos 2\pi ux + j \sin 2\pi ux) du$$

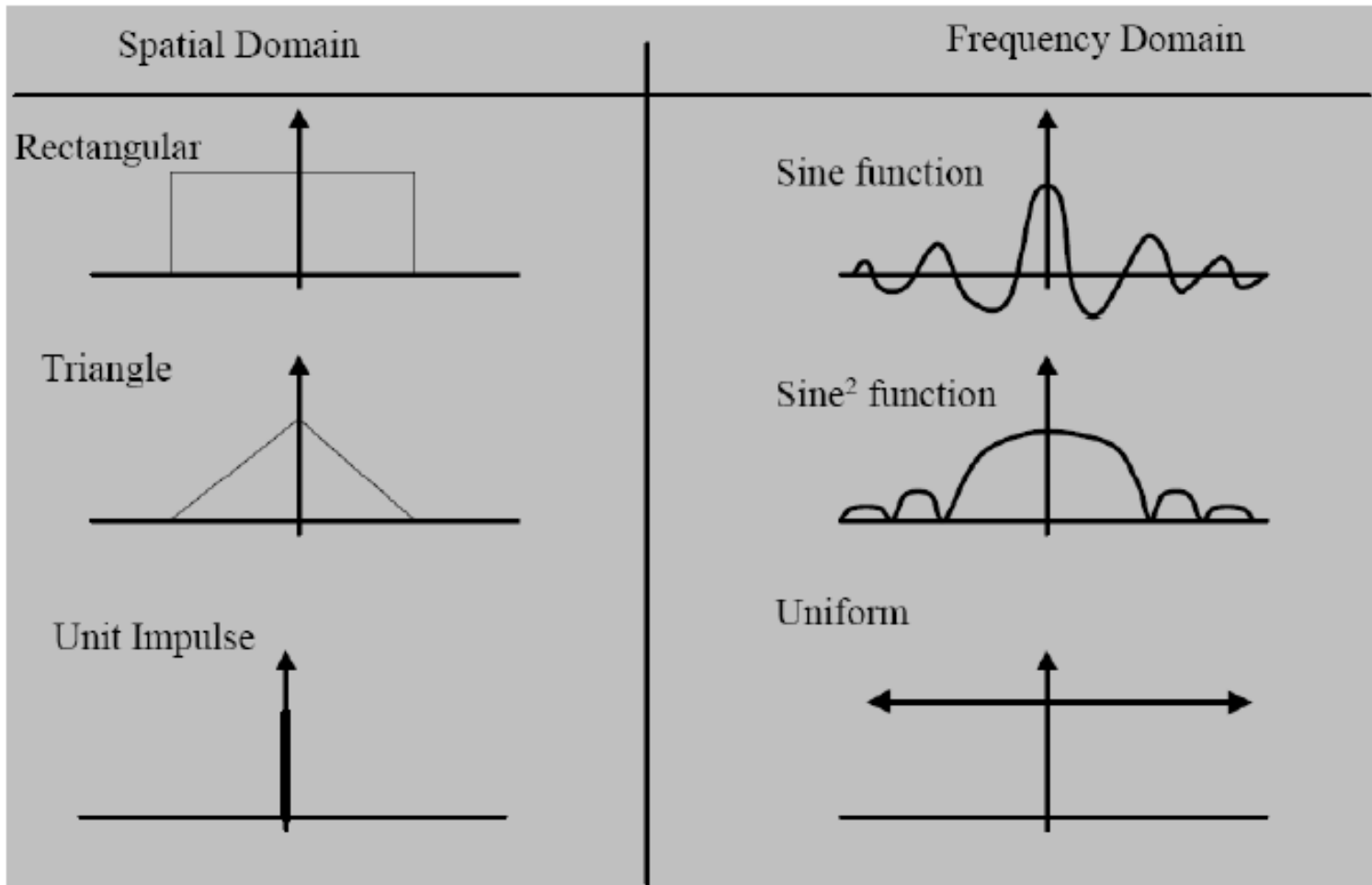
Pentru cazul 2D:

$$F(u, v) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{F}[f(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-j2\pi(ux + vy)) dx dy$$

$$f(x, y) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{F}^{-1}[F(u, v)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp(j2\pi(ux + vy)) du dv$$



Transformata Fourier

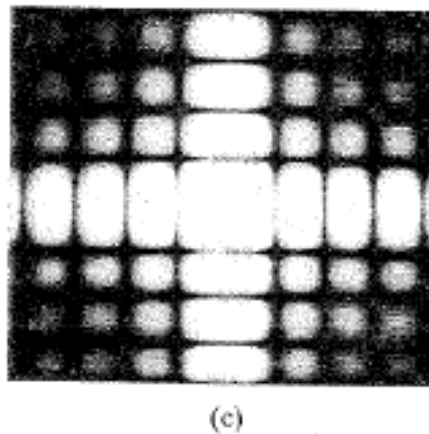
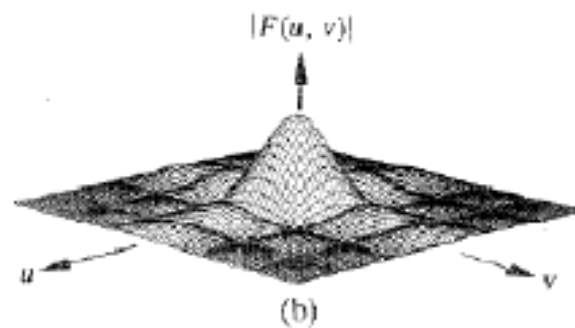
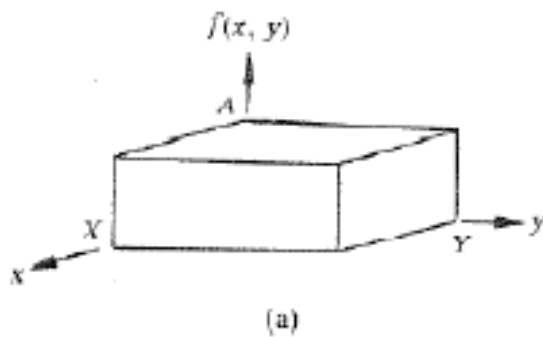


$$\text{sinc} = \sin(x)/x$$



Transformata Fourier

Transformata Fourier a unei funcții 2D de tip dreptunghi





Transformata Fourier Discretă

Transformata Fourier Discretă (DFT) directă:

$$F(u, v) \triangleq \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux/M + vy/N)]$$
$$(u = 0, 1, \dots, M-1, v = 0, 1, \dots, N-1)$$

Transformata Fourier Discretă inversă

$$f(x, y) \triangleq \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[j2\pi(ux/M + vy/N)]$$
$$(x = 0, 1, \dots, M-1, y = 0, 1, \dots, N-1)$$



Proprietățile transformatei Fourier

Frecvențe spațiale: dacă $f(x,y)$ este luminozitatea iar x,y sunt coordonatele spațiale ale imaginii, atunci u, v sunt frecvențele spațiale, reprezentând viteza de schimbare a luminozității cu distanță. Frecvențele u, v se măsoară în inversul unităților de distanță.

Unicitate: pentru funcții continue, $f(x,y)$ și $F(u,v)$ sunt unice una față de cealaltă.

Separabilitate: transformata Fourier este separabilă, astfel că o transformată Fourier 2D poate fi realizată prin două transformări 1D de-a lungul celor două axe de coordonate.



Proprietățile transformatei Fourier

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{-j2\pi(\frac{ux}{N})} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{vy}{N})}$$

$$\sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{vy}{N})} = F(x, v)$$

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{-j2\pi(\frac{ux}{N})} F(x, v)$$



Proprietățile transformatei Fourier

Liniaritate: transformata Fourier este o operație liniară, astfel că transformata sumei a două funcții este suma transformatelor Fourier individuale:

$$F \{a f(x,y) + b g(x,y)\} = aF(u,v) + bG(u,v)$$

Conjugata complexă:

$$F \{f^*(x,y)\} = F^*(-u,-v)$$

Direct și invers:

$$F \{F(u,v)\} = f(-x,-y)$$

$$F^{-1} \{f(x,y)\} = F(-u,-v)$$

Transformata directă și inversă diferă doar prin semnul argumentelor.



Proprietățile transformatei Fourier

Scalare:

$$f(a \cdot x) \leftrightarrow (1/|a|) \cdot F(u/a)$$

Dacă funcția devine mai lată în direcția x , frecvența ei devine mai mică în această direcție, și viceversa.

Deplasament temporal (translație în domeniul spațial)

$$f(x - x_0, y - y_0) \leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi(\frac{ux_0 + vy_0}{N})}$$

Când se deplasează timpul, transformata Fourier se multiplică cu funcția exponențială a unui număr imaginar, astfel că nu se modifică amplitudinea ci doar faza.

Deplasamentul în frecvență: complementul transformării temporale

$$f(x, y) \exp[-j2\pi(u_0 x / N + v_0 y / N)] \leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$



Proprietățile transformatei Fourier

Derivate: transformata Fourier a derivatei unei funcții este:

$$F \{df(x)/dx\} = j2\pi u F(u)$$

iar derivata a doua este:

$$F \{d^2 f(x)/dx^2\} = -(2\pi u)^2 F(u)$$

$$F \{df(x, y)/dx\} = j2\pi u F(u, v)$$

$$F \{df(x, y)/dy\} = j2\pi v F(u, v)$$

$$F \{\Delta f(x, y)\} = -(2\pi w)^2 F(u, v) \quad \text{where } w^2 = u^2 + v^2$$

Teorema convoluției: $g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) \quad G(u, v) = H(u, v) F(u, v)$

Conservarea produsului scalar: produsul scalar a două funcții este egal cu produsul scalar al transformatelor lor Fourier. De aici se obține **formula conservării energiei (Parseval):**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(u, v)|^2 du dv$$



Proprietățile transformatei Fourier

Coeficienții Fourier sunt în general numere complexe, având parte reală și imaginară:

$$F(u,v) = R(u,v) + jI(u,v)$$

O reprezentare echivalentă este sub formă de magnitudine și unghi de fază:

$$F(u,v) = |F(u,v)| e^{j\theta(u,v)}$$

Spectru Fourier: $|F(u,v)| = \sqrt{R(u,v)^2 + I(u,v)^2}$

Unghiul de fază: $\Theta(u,v) = \tan^{-1}(I(u,v)/R(u,v))$

Spectrul de putere: $|F(u,v)|^2 = R(u,v)^2 + I(u,v)^2 = P(u,v)$



Proprietățile transformatei Fourier

Transformata DFT pe o imagine NxN este ciclică, de perioadă N, în ambele direcții:

$$F(u + nN, v + mN) = F(u, v)$$

Calculul transformatei ne dă valoarea $F(0,0)$ în colțul stânga sus. Putem deplasa $F(u,v)$ pentru a plasa $F(0,0)$ în centrul imaginii. Pentru acest lucru, se aplică o translație în domeniul de frecvență, cu $u_0=N/2$, și $v_0=N/2$.

$$e^{j2\pi(\frac{N}{2}x + \frac{N}{2}y)} = e^{j\pi(x+y)} = (-1)^{x+y}$$

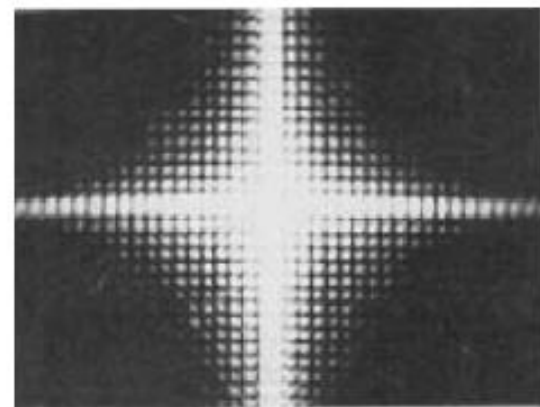
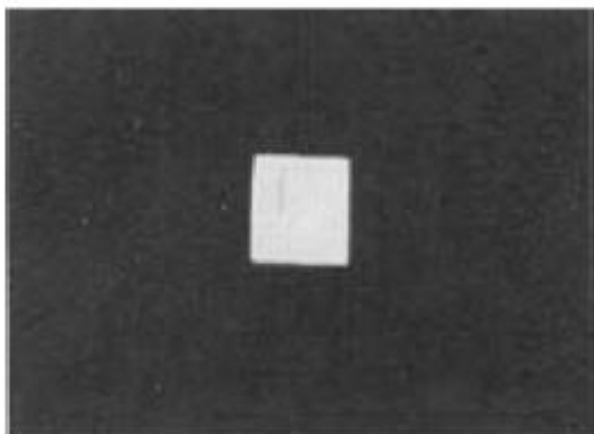
$$f(x, y)(-1)^{x+y} \longleftrightarrow F(u - N/2, v - N/2)$$

Pentru afișarea $|F(u,v)|$ se obișnuiește să se scaleze rezultatul:

$$D(u,v) = c \log (1 + |F(u,v)|)$$

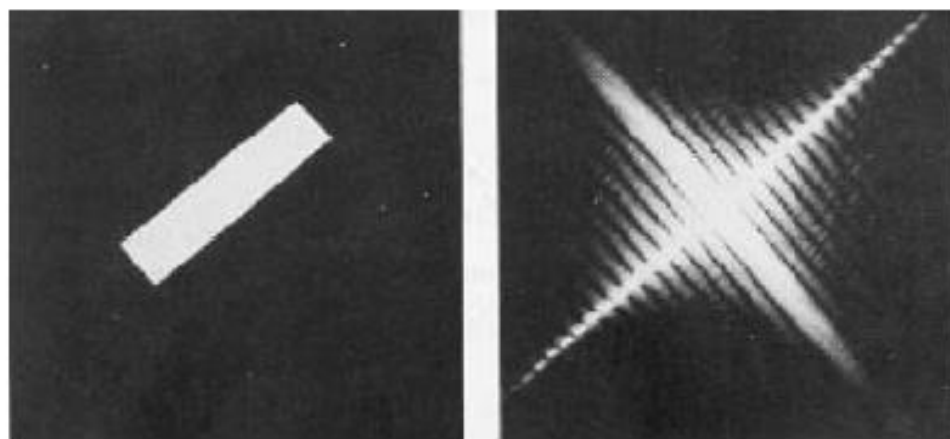
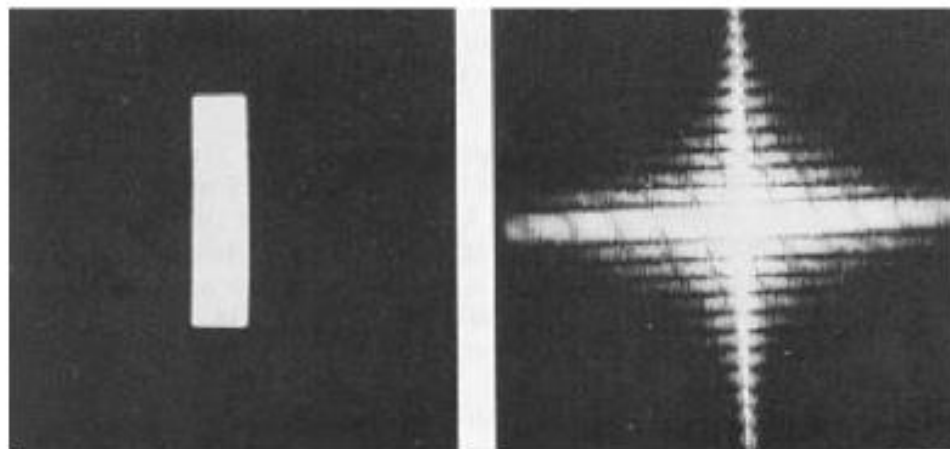


Proprietățile transformatei Fourier





Proprietățile transformatei Fourier



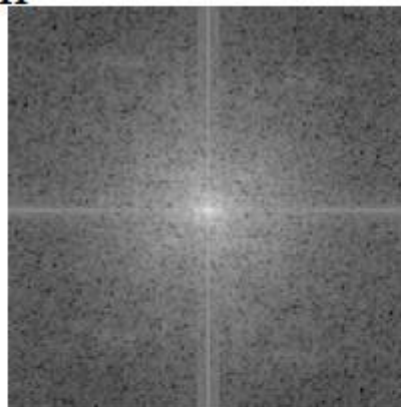


Proprietățile transformatei Fourier

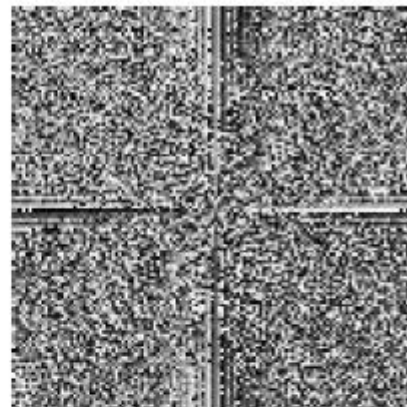
Direct Fourier Transform



Original

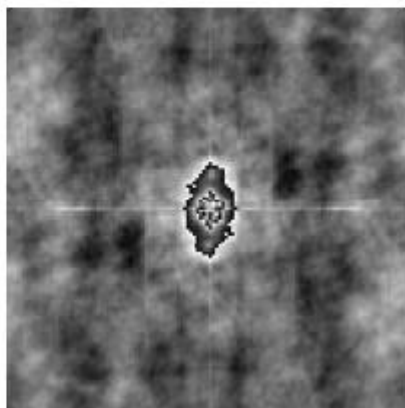


$\log(1+|F(u,v)|)$



$\phi(u,v)$

Invers Fourier Transform



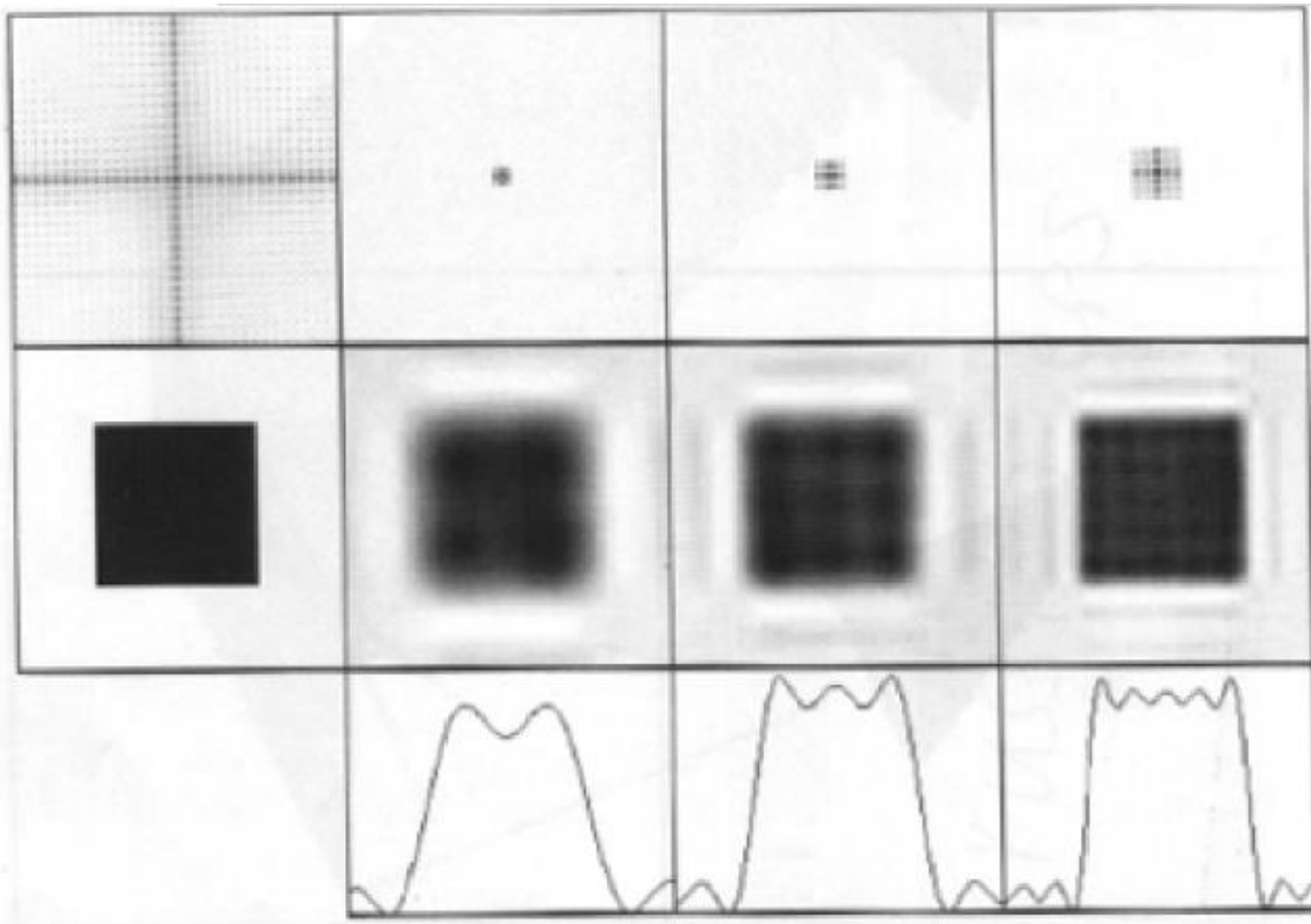
Eliminarea informației de fază



Eliminarea informației de magnitudine

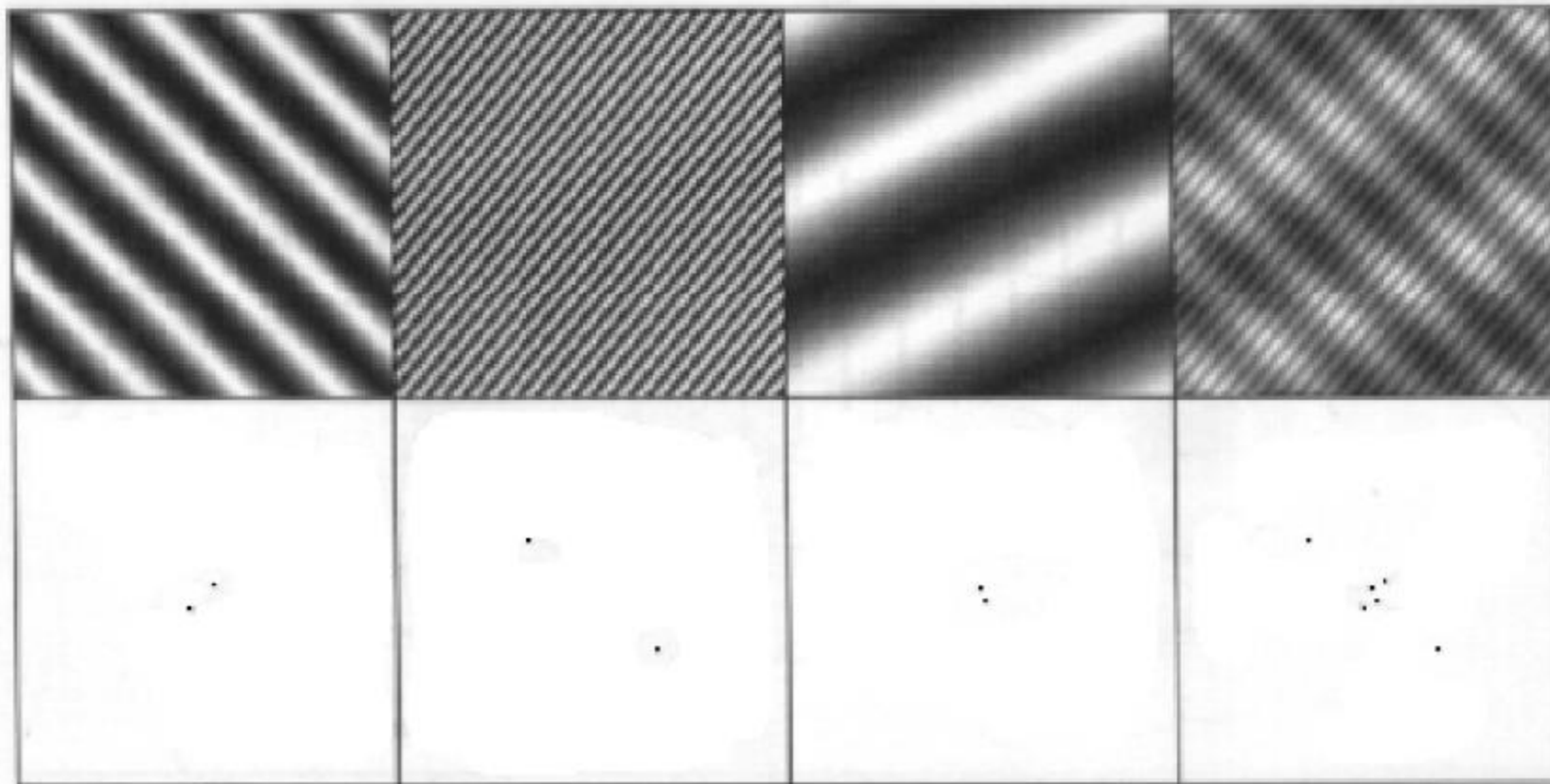


Proprietățile transformatei Fourier



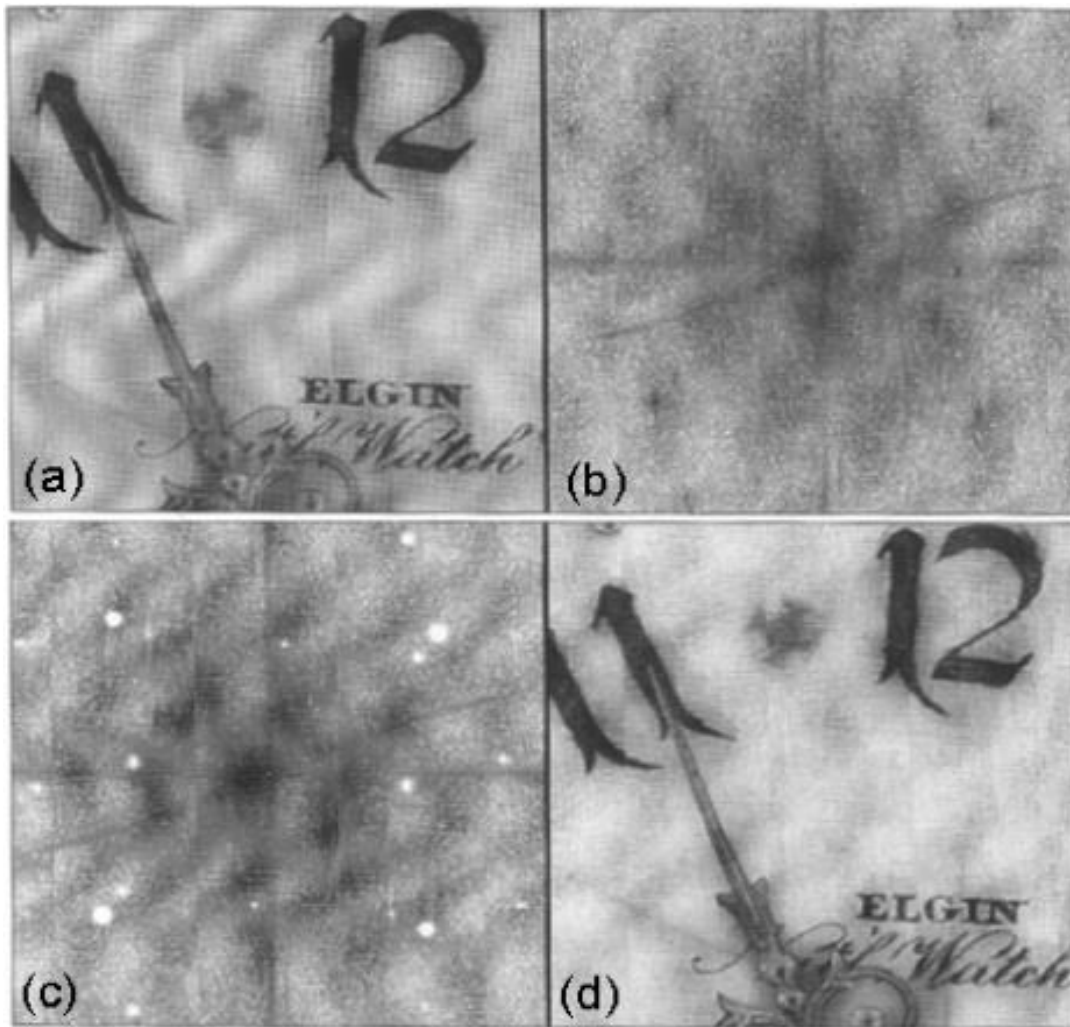


Proprietățile transformatei Fourier



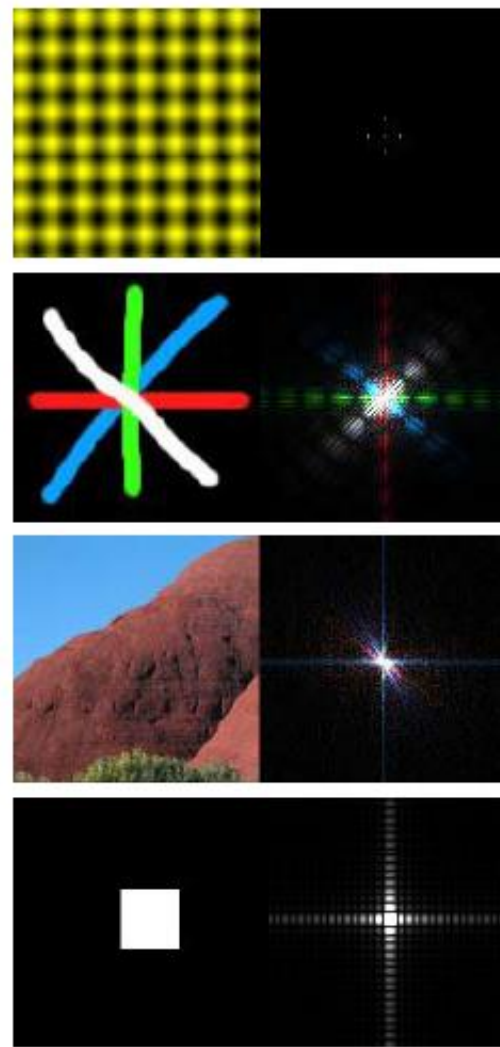
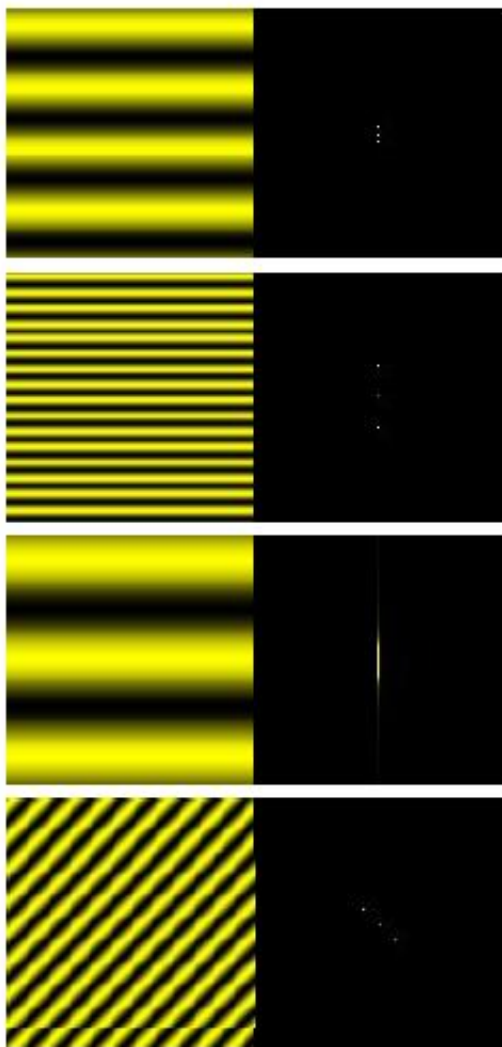


Proprietățile transformatei Fourier



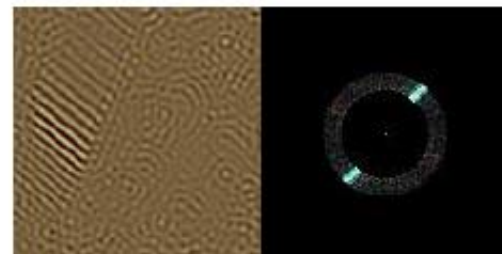
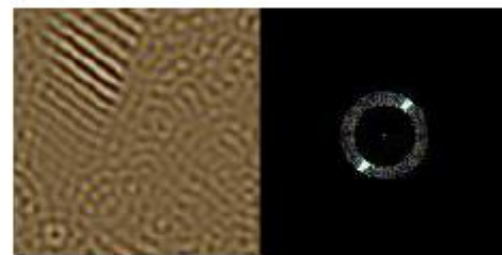
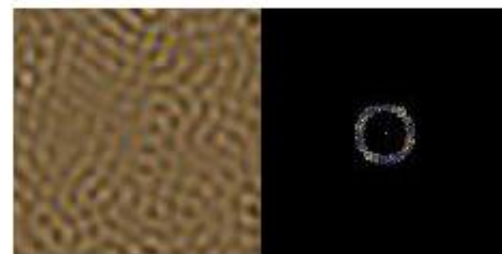
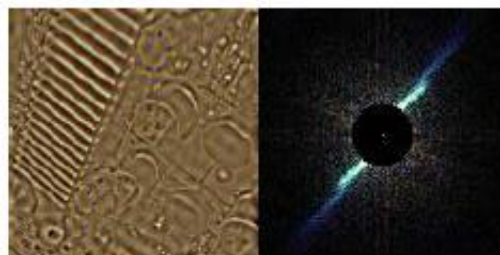


Proprietățile transformatei Fourier





Proprietățile transformatei Fourier





Filtrarea folosind transformata Fourier

1. Se convertește imaginea spațială în domeniul de frecvență, folosind Transformata Fourier
2. Se modifică frecvențele folosind un filtru în domeniul frecvențial
3. Se convertește imaginea rezultat înapoi în domeniul spațial.

