

Aplicația 1

Pentru sistemul de forțe coplanare din figura de mai jos, să se calculeze torsorul $\tau_0(\mathbf{R}, \mathbf{M}_0)$ și să se determine ecuația axei centrale.

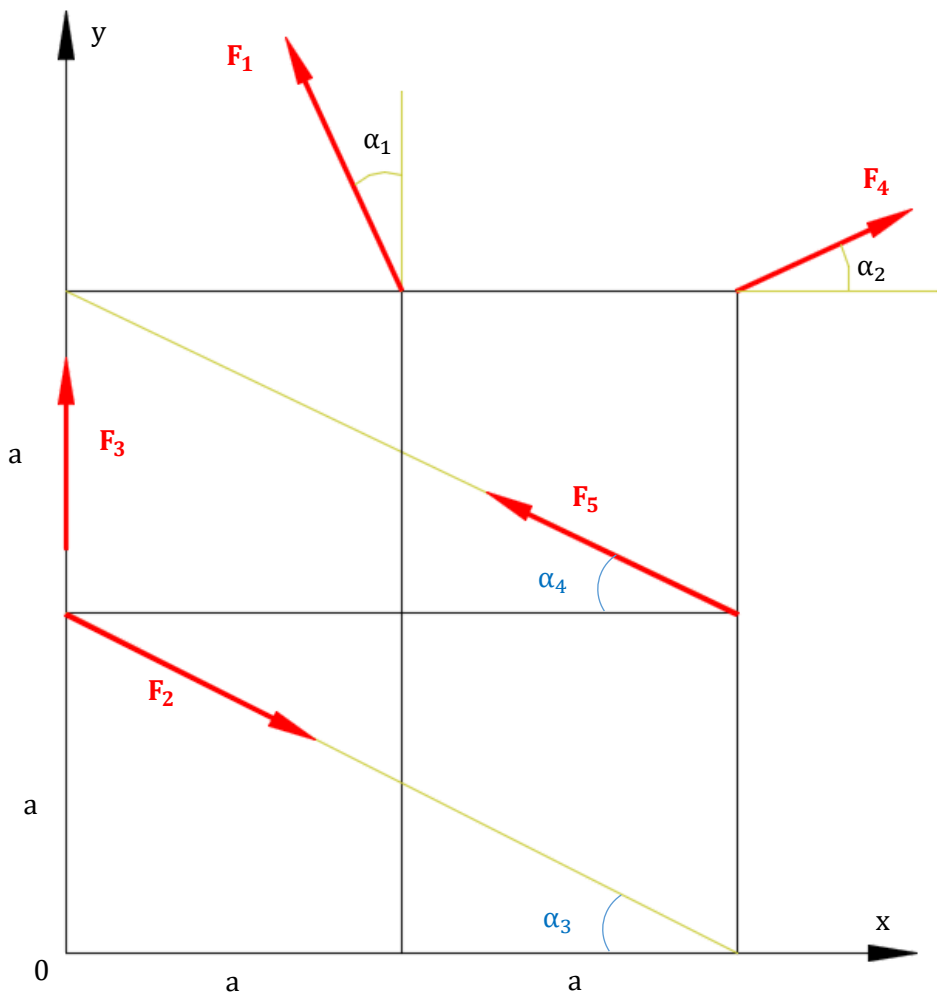


Figura 1 - Reducerea sistemelor coplanare de forțe

Date numerice:

Forța	Modulul forței	Dimensiuni geometrice
F_1	7	$a = 2$ $\alpha_1 = 21^0$ $\alpha_4 = 14^0$
F_2	$3\sqrt{5}$	
F_3	4	
F_4	$3\sqrt{13}$	
F_5	$3\sqrt{5}$	

Rezolvare

1. Calculul rezultantei

$\mathbf{F_1} = F_{x1} \cdot \mathbf{i} + F_{y1} \cdot \mathbf{j}$	$\mathbf{F_2} = F_{x2} \cdot \mathbf{i} + F_{y2} \cdot \mathbf{j}$
$F_{x1} = -F_1 \cdot \sin(\alpha_1) = -7 \cdot \sin(21^\circ) = -2.51$ $F_{y1} = F_1 \cdot \cos(\alpha_1) = 7 \cdot \cos(21^\circ) = 6.54$ $\mathbf{F_1} = -2.51 \cdot \mathbf{i} + 6.54 \cdot \mathbf{j}$	$F_{x2} = F_2 \cdot \cos(\alpha_3) = 3\sqrt{5} \cdot \frac{4}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 6$ $F_{y2} = -F_2 \cdot \sin(\alpha_3) = -3\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = -3$ $\mathbf{F_2} = 6 \cdot \mathbf{i} - 3 \cdot \mathbf{j}$

$\mathbf{F_3} = F_{x3} \cdot \mathbf{i} + F_{y3} \cdot \mathbf{j}$	$\mathbf{F_4} = F_{x4} \cdot \mathbf{i} + F_{y4} \cdot \mathbf{j}$
$F_{x3} = 0$ $F_{y3} = F_3 = 4$ $\mathbf{F_3} = 4 \cdot \mathbf{j}$	$F_{x4} = F_4 \cdot \cos(\alpha_2) = 3\sqrt{13} \cdot \cos(14^\circ) = 10.50$ $F_{y4} = F_4 \cdot \sin(\alpha_2) = 3\sqrt{13} \cdot \sin(14^\circ) = 2.62$ $\mathbf{F_4} = 10.50 \cdot \mathbf{i} + 2.62 \cdot \mathbf{j}$

$\mathbf{F_5} = F_{x5} \cdot \mathbf{i} + F_{y5} \cdot \mathbf{j}$
$F_{x5} = -F_5 \cdot \cos(\alpha_4) = -3\sqrt{5} \cdot \frac{4}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = -6$ $F_{y5} = F_5 \cdot \sin(\alpha_4) = 3\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 3$ $\mathbf{F_5} = -6 \cdot \mathbf{i} + 3 \cdot \mathbf{j}$

$$\mathbf{R} = R_x \cdot \mathbf{i} + R_y \cdot \mathbf{j}$$

$$R_x = \sum_{i=1}^5 F_{xi} = -2.51 + 6 + 10.50 - 6 = 7.99$$

$$R_y = \sum_{i=1}^5 F_{yi} = 6.54 - 3 + 4 + 2.62 + 3 = 13.16$$

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{7.99^2 + 13.16^2} = 15.40 \text{ [N]}$$

2. Calculul momentului resultant

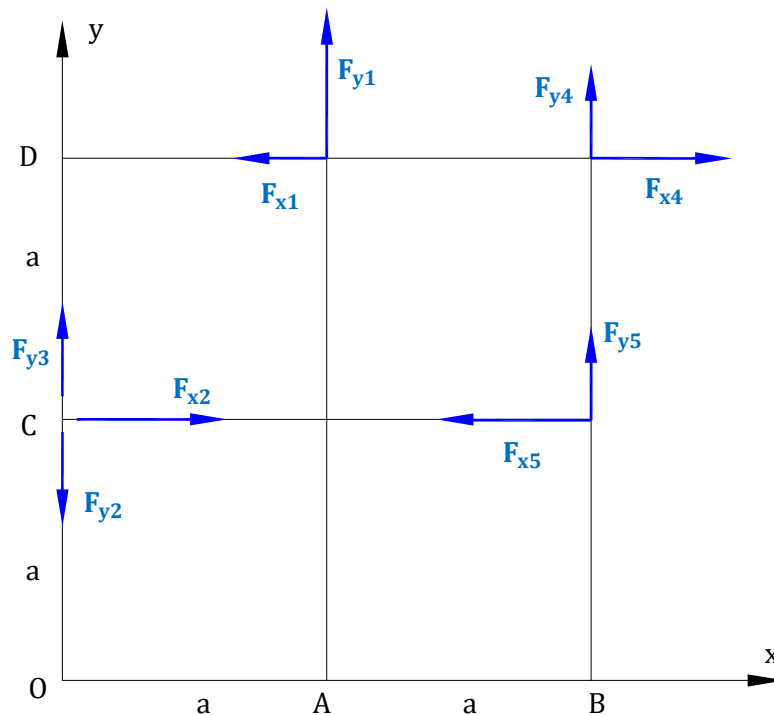


Figura 2. Schema echivalentă a sistemului de forțe

$$M_{0z} = -F_{x2} \cdot \widehat{OC} + F_{x5} \cdot \widehat{OC} + F_{y5} \cdot \widehat{OB} + F_{y4} \cdot \widehat{OB} - F_{x4} \cdot \widehat{OD} + F_{x1} \cdot \widehat{OD} + F_{y1} \cdot \widehat{OA}$$

$$= -6 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 2.62 \cdot 4 - 10.50 \cdot 4 + 2.51 \cdot 4 + 6.54 \cdot 2 = 3.60 \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

$$\mathbf{M}_0 = 3.60 \cdot \mathbf{k}$$

Observație

Se poate observa că forțele $\mathbf{F}_2$ și $\mathbf{F}_5$ formează un cuplu de forțe (au direcții paralele, sensuri opuse, modulul forțelor egal). Atunci rezolvarea ar fi următoarea:

1. Rezultanta forțelor $\mathbf{F}_2$ și $\mathbf{F}_5$ este $\mathbf{0}$, rezultanta sistemului fiind compusă doar din suma vectorială a forțelor $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_3$ și $\mathbf{F}_4$; $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$, rezultatul fiind același:

$$R_x = \sum_{i=1}^5 F_{xi} = -2.51 + 10.50 = 7.99$$

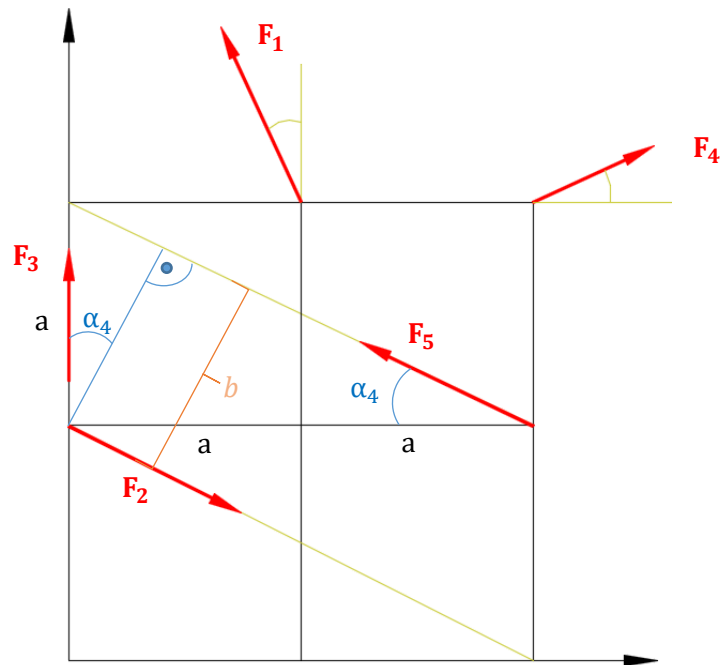
$$R_y = \sum_{i=1}^5 F_{yi} = 6.54 + 4 + 2.62 = 13.16$$

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{7.99^2 + 13.16^2} = 15.40 \text{ [N]}$$

2. La calculul momentului, se calculează momentul cuplului de forțe $\mathbf{F}_2$ și $\mathbf{F}_5$ și se adună momentele celorlalte forțe (componente ale forțelor):

$$M_{\text{cuplu}} = +F_5 \cdot b$$

unde b este distanța dintre cele două drepte suport ale forțelor $\mathbf{F}_2$ și $\mathbf{F}_5$.



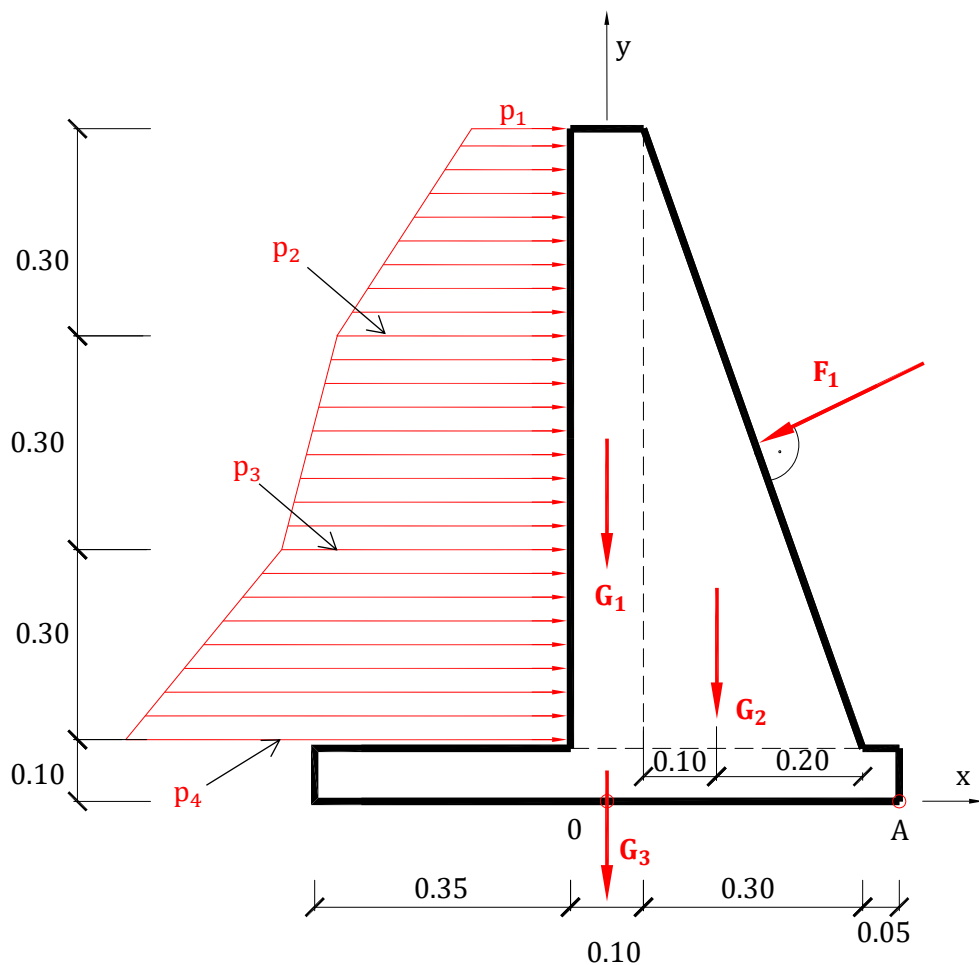
$$b = a \cdot \cos(\alpha_4) = 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 1.79$$

$$M_{\text{cuplu}} = 3\sqrt{5} \cdot 1.79 = 12.00 \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

$$\begin{aligned} M_0(F_1, F_3, F_4) &= F_{y4} \cdot \overset{\text{OB}}{\widehat{4}} - F_{x4} \cdot \overset{\text{OD}}{\widehat{4}} + F_{x1} \cdot \overset{\text{OD}}{\widehat{4}} + F_{y1} \cdot \overset{\text{OA}}{\widehat{2}} \\ &= 2.62 \cdot 4 - 10.50 \cdot 4 + 2.51 \cdot 4 + 6.54 \cdot 2 = -8.40 \text{ [N} \cdot \text{m]} \\ M_0 &= M_{\text{cuplu}} + M_0(F_1, F_3, F_4) = 12.00 - 8.40 = 3.60 \text{ [N} \cdot \text{m]} \end{aligned}$$

Aplicația 2

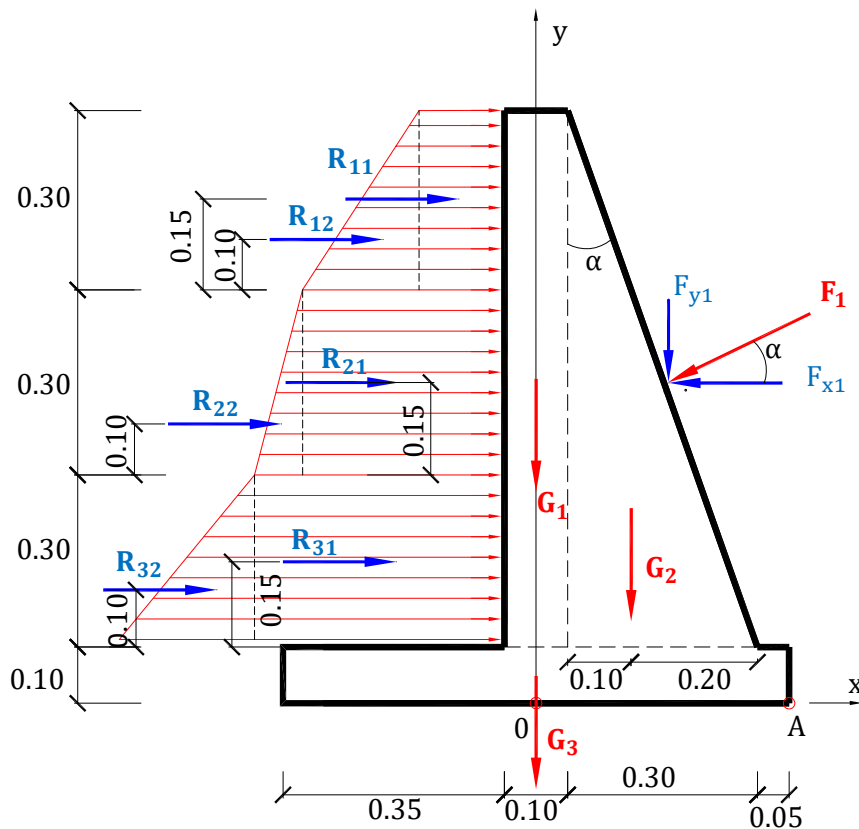
Pentru sistemul de forțe din figura de mai jos, să se calculeze torsorul față de polul O, $\tau_O(\mathbf{R}, \mathbf{M}_O)$ și față de polul A, $\tau_A(\mathbf{R}, \mathbf{M}_A)$. Dimensiunile sunt în metri.



Date numerice:

Forța distribuită	Mărimea forței distribuite [N/m]
p_1	100
p_2	150
p_3	220
p_4	350
Forța	Modulul forței [N]
G_1	200
G_2	180
G_3	250
F_1	500 (situată la mijlocul laturii înclinate)

1. Calculul rezultantei forțelor distribuite și poziția lor



- rezultantele forțelor distribuite:

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= p_1 \cdot 0.30 = 100 \cdot 0.30 = 30 \text{ [N]} \\
 R_{12} &= \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \cdot 0.30 = \frac{1}{2} (150 - 100) \cdot 0.30 = 7.5 \text{ [N]} \\
 R_{21} &= p_2 \cdot 0.30 = 150 \cdot 0.30 = 45 \text{ [N]} \\
 R_{22} &= \frac{1}{2} (p_3 - p_2) \cdot 0.30 = \frac{1}{2} (220 - 150) \cdot 0.30 = 10.5 \text{ [N]} \\
 R_{31} &= p_3 \cdot 0.30 = 220 \cdot 0.30 = 66 \text{ [N]} \\
 R_{32} &= \frac{1}{2} (p_4 - p_3) \cdot 0.30 = \frac{1}{2} (350 - 220) \cdot 0.30 = 19.5 \text{ [N]}
 \end{aligned}$$

- componentele orizontale și verticale ale forței F_1 :

$$\begin{aligned}
 F_{x1} &= -F_1 \cdot \cos(\alpha) = -500 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{0.9^2 + 0.3^2}} = -474.34 \text{ [N]} \\
 F_{y1} &= -F_1 \cdot \sin(\alpha) = -500 \cdot \frac{0.3}{\sqrt{0.9^2 + 0.3^2}} = -158.11 \text{ [N]}
 \end{aligned}$$

1. Calculul rezultantei

$$\begin{aligned}
 R_x &= R_{11} + R_{12} + R_{21} + R_{22} + R_{31} + R_{32} - F_{x1} = \\
 &= 30 + 7.5 + 45 + 10.5 + 66 + 19.5 - 474.34 = -295.84 \text{ [N]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_y &= -G_1 - G_2 - G_3 - F_{y1} = \\
 &= -200 - 180 - 250 - 158.11 = -788.11 \text{ [N]} \\
 \mathbf{R} &= R_x \cdot \mathbf{i} + R_y \cdot \mathbf{j} = -295.84 \cdot \mathbf{i} - 788.11 \cdot \mathbf{j}
 \end{aligned}$$

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-295.84)^2 + (-788.11)^2} = 841.61 \text{ [N]}$$

Rezultanta fiind un invariant, pentru calculul torsorului în punctele O și A, doar momentul o să fie diferit pentru cele două cazuri.

2. Calculul momentului rezultat în raport cu punctul O

$$\begin{aligned}
 M_0 = & -R_{11} \cdot (0.10 + 0.30 + 0.30 + 0.15) - R_{12} \cdot (0.10 + 0.30 + 0.30 + 0.10) - \\
 & -R_{21} \cdot (0.10 + 0.30 + 0.15) - R_{22} \cdot (0.10 + 0.30 + 0.10) - \\
 & -R_{31} \cdot (0.10 + 0.15) - R_{32} \cdot (0.10 + 0.10) - \\
 & -G_2 \cdot \left(\frac{0.10}{2} + 0.10\right) - F_{y1} \cdot \left(\frac{0.30}{2} + \frac{0.10}{2}\right) + F_{x1} \cdot \left(\frac{0.30 + 0.30 + 0.30}{2} + 0.1\right) \\
 \\
 M_0 = & -30 \cdot (0.10 + 0.30 + 0.30 + 0.15) - 7.5 \cdot (0.10 + 0.30 + 0.30 + 0.10) - \\
 & -45 \cdot (0.10 + 0.30 + 0.15) - 10.5 \cdot (0.10 + 0.30 + 0.10) - \\
 & -66 \cdot (0.10 + 0.15) - 19.5 \cdot (0.10 + 0.10) - \\
 & -180 \cdot \left(\frac{0.10}{2} + 0.10\right) - 158.11 \cdot \left(\frac{0.30}{2} + \frac{0.10}{2}\right) + 474.34 \cdot \left(\frac{0.30 + 0.30 + 0.30}{2} + 0.10\right) = 120.37 \text{ [N} \cdot \text{m]}
 \end{aligned}$$

3. Calculul momentului rezultat în raport cu punctul A

$$\begin{aligned}
 M_A = & -R_{11} \cdot (0.10 + 0.30 + 0.30 + 0.15) - R_{12} \cdot (0.10 + 0.30 + 0.30 + 0.10) - \\
 & -R_{21} \cdot (0.10 + 0.30 + 0.15) - R_{22} \cdot (0.10 + 0.30 + 0.10) - \\
 & -R_{31} \cdot (0.10 + 0.15) - R_{32} \cdot (0.10 + 0.10) + \\
 & +G_1 \cdot \left(\frac{0.10}{2} + 0.30 + 0.05\right) + G_2 \cdot (0.20 + 0.05) + G_3 \cdot \left(\frac{0.10}{2} + 0.30 + 0.05\right) + \\
 & +F_{y1} \cdot \left(\frac{0.30}{2} + 0.05\right) + F_{x1} \cdot \left(\frac{0.30}{2} + 0.30 + 0.1\right) \\
 \\
 M_A = & -30 \cdot (0.10 + 0.30 + 0.30 + 0.15) - 7.5 \cdot (0.10 + 0.30 + 0.30 + 0.10) - \\
 & -45 \cdot (0.10 + 0.30 + 0.15) - 10.5 \cdot (0.10 + 0.30 + 0.10) - \\
 & -66 \cdot (0.10 + 0.15) - 19.5 \cdot (0.10 + 0.10) + \\
 & +200 \cdot \left(\frac{0.10}{2} + 0.30 + 0.05\right) + 180 \cdot (0.20 + 0.05) + 250 \cdot \left(\frac{0.10}{2} + 0.30 + 0.05\right) + \\
 & +158.11 \cdot \left(\frac{0.30}{2} + 0.05\right) + 474.34 \cdot \left(\frac{0.30}{2} + 0.30 + 0.1\right) = 435.61 \text{ [N} \cdot \text{m]}
 \end{aligned}$$