

(completare la cursul 2)

Operații elementare de echivalență

Considerăm un CSR (sau sistem de CSR) acționat de un sistem oarecare de forțe exterioare. Dacă dorim să echivalăm acest sistem de forțe cu unul echivalent, putem să spunem că următoarele propoziții sunt adevărate:

- a. Dacă există două forțe concurente, ele se pot înlocui cu rezultanta lor obținută cu regula paralelogramului;
- b. Oricare din forțe se poate înlocui prin componentele ei pe direcțiile a două axe concurente și coplanare cu ea sau pe direcțiile a trei axe concurente și necoplanare;
- c. Se pot adăuga sau elimina două forțe egale pe aceeași dreaptă suport și de sens contrar;
- d. Un cuplu de forțe se poate înlocui cu momentul său și invers.

Astfel, dacă aplicăm operații de echivalență unui sistem de forțe, se obține un nou sistem de forțe, echivalent cu cel inițial.

Dacă avem două sisteme de forțe echivalente aplicate asupra unui CSR (sau sisteme de CSR), ele vor produce același efect mecanic.

Reducerea unei forțe într-un punct

Reducerea unei forțe într-un punct este o operație de echivalență. Prin reducerea unei forțe într-un punct (punctul se mai numește și pol de reducere) se echivalează efectul mecanic al forței asupra acelui punct prin alt sistem de forțe; acest nou sistem de forțe, echivalent cu forța inițială va fi aplicat în punctul de reducere.

Pornim de la un caz general, în care avem o forță $\vec{F}$ și un punct O (Fig. 2.1 - a). Cu condiția ca dreapta suport a forței să nu treacă prin punctul O, dorim să vedem efectul forței $\vec{F}$ asupra punctului O. Adică, să reducem forța $\vec{F}$ în punctul O.

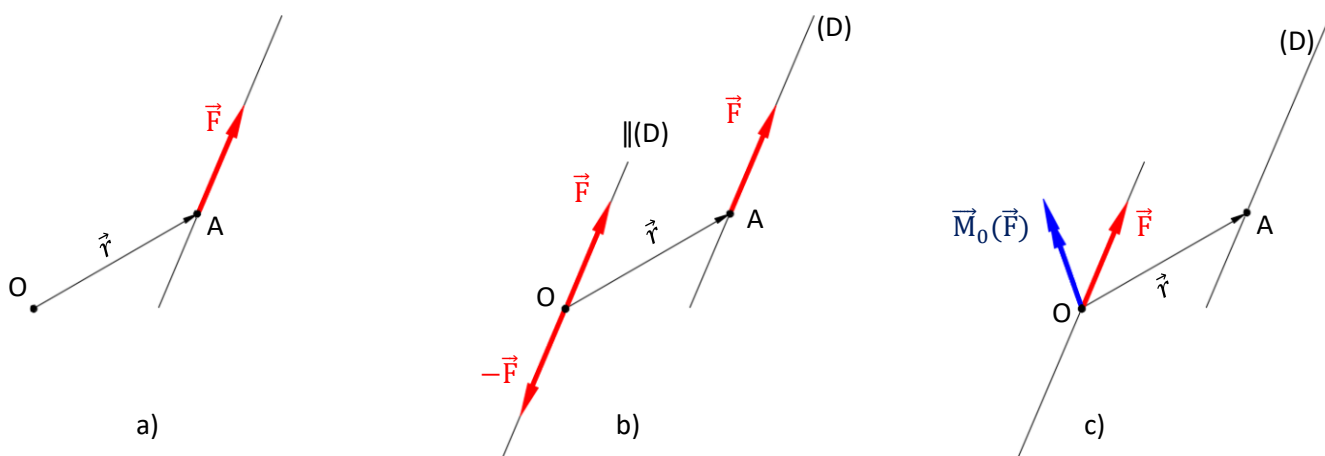


Figura 2.1 – Reducerea unei forțe într-un punct

În următorul pas (Fig.2.1 – b) o să adăugăm o forță $\vec{F}$ în punctul O, cu direcția paralelă la dreapta suport (D) și o forță $-\vec{F}$, tot în același punct O, dar în sens opus, pentru a se anula forța $\vec{F}$ adăugată. Nu am modificat cu nimic starea sistemului de forțe inițial, deoarece nu am făcut altceva decât a aplica o operație de echivalență (vezi punctul c. de la operații elementare de echivalență).

Dacă privim noua configurație a sistemului de forțe de la punctul b), putem să observăm că s-a format un cuplu de forțe ($\vec{F}$ și $-\vec{F}$). Astfel ajungem la faza finală (Fig. 2.1-c) în care avem momentul cuplului de forțe $\vec{M}_O(\vec{F})$ și forța $\vec{F}$ aplicată în polul O.

Astfel, am redus forța $\vec{F}$, situată pe dreapta suport (D), în polul O, rezultând în polul O un torsesor al forței $\vec{F}$ format din forța $\vec{F}$ și momentul forței $\vec{F}$ în raport cu polul O, $\{\vec{F}, \vec{M}_O(\vec{F})\}$.

Curs 3

Reducerea sistemelor generale (oarecare) de forțe (vectori)

Reducerea sistemelor de forțe $\{\vec{F}_i\}$, este o operație de echivalență , prin care un sistem de forțe (vectori) se înlocuiește cu un sistem de doi vectori, numit torsor de reducere. Acești doi vectori sunt: vectorul rezultat $\vec{R}$ si vectorul moment rezultat $\vec{M}_O$.

Fiind dat un sistem general (oarecare) de forțe (vectori) $\{\vec{F}_i\}$, se cere să se efectueze reducerea acestui sistem într-un punct (pol) oarecare din spațiu O.

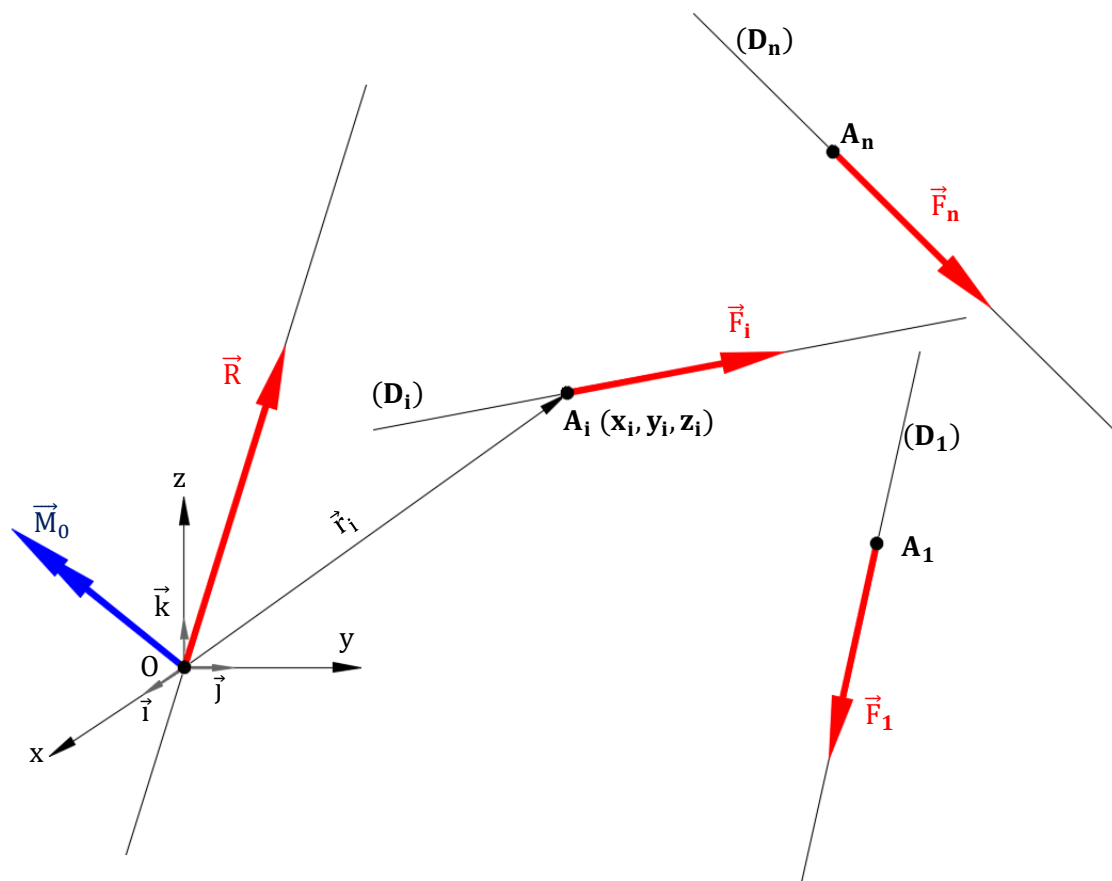


Figura 3.1 – Reducerea sistemelor de forțe oarecare

Vectorul rezultat $\vec{R}$ se obține însumând vectorial toate forțele $\vec{F}_i$ din sistem, iar momentul rezultat $\vec{M}_O$ se obține însumând vectorial momentele fiecărei forțe din sistem în raport cu punctul (polul) O.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \vec{M}_o = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (1)$$

1. Expresiile analitice ale vectorilor torsorului de reducere

Daca expresiile analitice ale vectorilor din relațiile (1) sunt:

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k} \\ \vec{r}_i &= r_{ix}\vec{i} + r_{iy}\vec{j} + r_{iz}\vec{k} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$$

$$\vec{M}_o = M_{ox}\vec{i} + M_{oy}\vec{j} + M_{oz}\vec{k}$$

atunci

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} \quad (3)$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (4)$$

$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{ix} & r_{iy} & r_{iz} \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n (r_{iy}F_{iz} - r_{iz}F_{iy})\vec{i} + \sum_{i=1}^n (r_{iz}F_{ix} - r_{ix}F_{iz})\vec{j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n (r_{ix}F_{iy} - r_{iy}F_{ix})\vec{k} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} M_{ox} &= \sum_{i=1}^n (r_{iy}F_{iz} - r_{iz}F_{iy}), M_{oy} = \sum_{i=1}^n (r_{iz}F_{ix} - r_{ix}F_{iz}), M_{oz} = \\ &= \sum_{i=1}^n (r_{ix}F_{iy} - r_{iy}F_{ix}) \end{aligned} \quad (6)$$

$$|M_o| = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} \quad (7)$$

2. Variația elementelor torsorului la schimbarea punctului (polului) de reducere

În acest capitol ne propunem să calculăm tursorul de reducere al aceluiași sistem de forțe $\{\vec{F}_i\}$ în raport cu un alt punct oarecare din spațiu O' .

Vectorul rezultat $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ rămâne același (suma forțelor este aceeași indiferent de punctul de reducere), dar momentul rezultat $\vec{M}_o = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ se modifică după cum urmează.

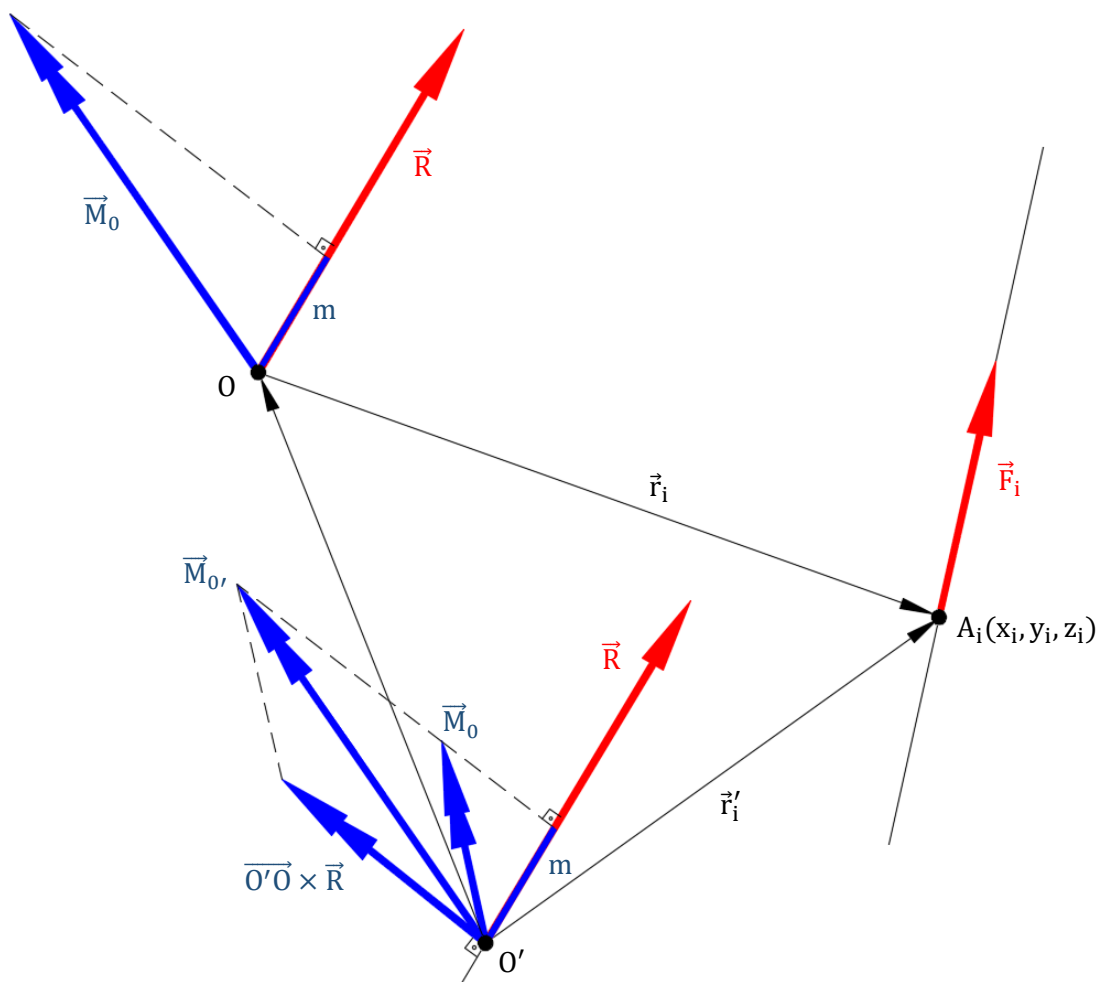


Figura 3.2 – Variația momentului la schimbarea polului de reducere

Din figura (3.2) se observă că:

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \overrightarrow{O'O} \quad (8)$$

Atunci înlocuind formula (8) în expresia momentului $\vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i' \times \vec{F}_i$ obținem:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O'} &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i + \overrightarrow{O'O}) \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \overrightarrow{O'O} \times \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \\ &= \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R} \end{aligned}$$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R} \quad (9)$$

3. Invarianții operației de reducere

Reducând sistemul de forțe (vectori) $\{\vec{F}_i\}$ în diferite puncte din spațiu, anumite elemente rămân neschimbate. Aceste elemente se numesc **invarianți** ai operației de reducere. Astfel avem doi invarianți principali și doi secundari.

3.1 Invarianții principali

Primul invariant principal este vectorul rezultat $\vec{R}$ deoarece suma forțelor este aceeași indiferent de punctul de reducere. El se numește invariantul vectorial.

Al doilea invariant principal este produsul scalar dintre cei doi vectori ai tursorului, care este același indiferent de punctul de reducere. El se numește invariantul scalar.

Pentru tursorul de reducere din punctul O avem:

$$J = \vec{R} \cdot \vec{M}_O \quad (10)$$

Pentru tursorul de reducere din punctul O' (Fig. 3.2) avem:

$$J = \vec{R} \cdot \vec{M}_{O'} = \vec{R} \cdot (\vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{M}_O + \vec{R} \cdot (\overrightarrow{O'O} \times \vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{M}_O$$

Produsul scalar:

$$\vec{R} \cdot (\overrightarrow{O'O} \times \vec{R}) = 0 \text{ deoarece } \vec{R} \perp \overrightarrow{O'O} \times \vec{R}$$

3.2 Invarianții secundari

Primul invariant secundar este modulul momentului minim m . Momentul minim este cel mai mic moment rezultat al sistemului de forțe dat și reprezintă proiecția vectorului moment pe vectorul rezultat. Proiecția unui vector pe o axa se face înmulțind scalar vectorul respectiv cu versorul direcției axei.

$\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$ este versorul direcției vectorului rezultat $\vec{R}$,

$$m = M_{min} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \cdot \vec{M}_O = \frac{J}{|\vec{R}|} \quad (11)$$

Al doilea invariant secundar este k numit constanta sistemului de forte

Vectorul moment minim se obține din expresia (12)

$$\vec{M}_{min} = \frac{J}{|\vec{R}|} \cdot \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{J}{R^2} \cdot \vec{R} = k \cdot \vec{R} \quad (12)$$

iar

$$k = \frac{J}{R^2} \quad (13)$$

4. Axa centrală a unui sistem de forțe (vectori)

Axa centrală a unui sistem de forțe (vectori) este locul geometric al punctelor din spațiu în care, dacă reducem sistemul de forțe (vectori), cei doi vectori ai tursorului de reducere sunt coliniari.

Axa centrală este unică pentru fiecare sistem de forțe (vectori) și are direcția vectorului rezultat $\vec{R}$.

Reducem sistemul de forțe în punctul O. Apoi considerăm un plan π perpendicular pe vectorul rezultat $\vec{R}$. Reducem sistemul de forțe în punctul P care reprezintă intersecția planului π cu axa centrală. Poziția axei centrale în spațiu o determinăm prin ecuația ei vectorială sau prin ecuațiile carteziane.

4.1 Ecuația vectorială a axei centrale

Reducând sistemul de forțe în punctul P avem același vector rezultat $\vec{R}$ iar momentul rezultat se calculează cu relația (9)

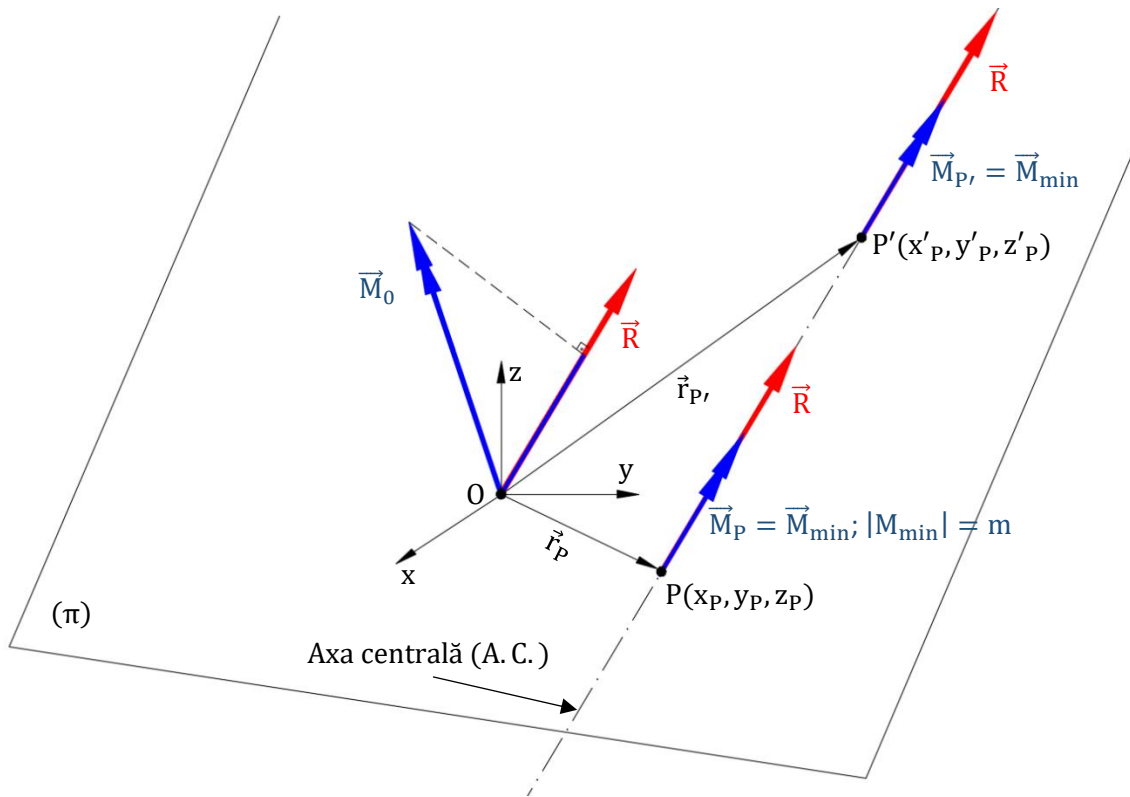


Figura 3.2 –Ecuția axei centrale

$$\vec{M}_p = \vec{M}_o + \vec{PO} \times \vec{R} = \lambda \cdot \vec{R} \quad (14)$$

Știind că $\vec{PO} = -\vec{r}_p$ obținem

$$\vec{M}_p = \vec{M}_o - \vec{r}_p \times \vec{R} = \lambda \cdot \vec{R} \quad (15)$$

$$\vec{M}_p = \vec{M}_{min}$$

Înmulțim vectorial la stânga a doua egalitate din relația (15) cu $\vec{R}$

$$\vec{R} \times \vec{M}_o - \vec{R} \times (\vec{r}_p \times \vec{R}) = \vec{R} \times \lambda \cdot \vec{R} = \vec{0} \quad (16)$$

Dublul produs vectorial $\vec{R} \times (\vec{r}_p \times \vec{R})$ se calculează astfel:

$$\vec{R} \times (\vec{r}_p \times \vec{R}) = (\vec{R} \cdot \vec{R}) \cdot \vec{r}_p - (\vec{R} \cdot \vec{r}_p) \cdot \vec{R} = R^2 \cdot \vec{r}_p$$

Termenul:

$$(\vec{R} \cdot \vec{r}_p) \cdot \vec{R} = \vec{0} \text{ deoarece } \vec{R} \perp \vec{r}_p, \vec{r}_p \in \pi$$

Ecuția (16) devine:

$$\vec{R} \times \vec{M}_o - R^2 \cdot \vec{r}_p = \vec{0} \quad (17)$$

Din ecuația (17) rezultă vectorul de poziție al punctului P de pe axa centrală:

$$\vec{r}_p = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_o}{R^2} \quad (18)$$

vectorul de poziție al punctului oarecare P' de pe axa centrală este:

$$\vec{r} = \vec{r}_p + \overrightarrow{PP'} \quad (19) \quad \text{vectorul } \overrightarrow{PP'} = \mu \vec{R} \text{ este coliniar cu vectorul } \vec{R}$$

$$\vec{r} = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_o}{R^2} + \mu \vec{R} \quad (20)$$

Ecuația (20) se numește ecuația vectorială a axei centrale.

Din relația (18) scrisă sub forma analitică se obține relația (21) de unde rezultă coordonatele punctului P de pe axa centrală.

$$\vec{r}_p = \frac{1}{R^2} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R_x & R_y & R_z \\ M_{ox} & M_{oy} & M_{oz} \end{bmatrix} = x_p \cdot \vec{i} + y_p \cdot \vec{j} + z_p \cdot \vec{k} \quad (21)$$

4.2 Ecuațiile carteziene ale axei centrale

Pentru a deduce ecuațiile carteziene ale axei centrale reducem sistemul de forțe în punctul P' de pe axa centrală.

Vectorul rezultat $\vec{R}$ este același, iar vectorul moment rezultat se obține cu relația:

$$\vec{M}_{P'} = \vec{M}_o - \vec{r} \times \vec{R} = v \cdot \vec{R} \quad (22)$$

$$\vec{M}_{P'} = \vec{M}_{min}$$

Scriind relația (22) sub forma analitică obținem:

$$M_{ox}\vec{i} + M_{oy}\vec{j} + M_{oz}\vec{k} - \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{bmatrix} = v(R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}) \quad (23)$$

Efectuând calculele în relația (23) obținem:

$$\frac{M_{ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z} = v \quad (24)$$

Relațiile (24) reprezintă ecuațiile carteziane ale axei centrale.

Reducerea sistemelor de forțe în raport cu punctele axei centrale se numește **reducere canonică**, iar torsorul astfel obținut este torsorul minim al sistemului de forțe $\vec{R}, \vec{M}_{min}$.

5. Teorema lui Varignon

Un caz particular îl constituie sistemele de forțe la care cei doi vectori ai torsorului de reducere sunt perpendiculari.

$$\vec{M}_o \perp \vec{R}$$

În acest caz

$$\vec{M}_P = \vec{M}_{P'} = \vec{M}_{min} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_o = \vec{M}_{P'} + \overrightarrow{OP'} \times \vec{R} \quad (25)$$

Știind că

$$\vec{M}_{P'} = \vec{0} \quad \text{rezultă}$$

$$\overrightarrow{OP'} = \vec{r}$$

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{R} \quad (26)$$

Relația (26) reprezintă teorema lui Varignon care se enunța astfel:

În cazul sistemelor de forțe la care momentul minim $\vec{M}_{min} = \vec{0}$, momentul resultant $\vec{M}_o$ în raport cu un pol O, este egal cu momentul vectorului resultant $\vec{R}$ plasat pe axa centrală a sistemului de forțe în raport cu același punct O.

6. Cazurile de reducere ale sistemelor de forte

Aceste cazuri de reducere se clasifică în funcție de cei doi invariant principali, invariantul vectorial $\vec{R}$ și invariantul scalar $J = \vec{R} \cdot \vec{M}_o$.

În cazul 1 de reducere intră sistemele generale de forțe la care $\vec{R} \neq \vec{0}, J \neq 0$. Aceste sisteme de forțe se reduc la un tursor format din $\vec{R} \neq \vec{0}$ și $\vec{M}_O \neq \vec{0}$ fără a fi perpendiculare. Ele admit axă centrală, iar lor nu li se aplică teorema lui Varignon.

În cazul 2 de reducere intră sistemele particulare de forțe la care $\vec{R} \neq \vec{0}, J = 0$.

Acest caz de reducere are două subcazuri :

2.a în care $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}$ dar $\vec{M}_O \perp \vec{R}$. În raport cu punctele axei centrale ele se reduc la $\vec{R} \neq \vec{0}$ și $\vec{M}_{min} = \vec{0}$, adică la o rezultantă unică.

2.b în care $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_O = \vec{M}_{min} = \vec{0}$

Sistemele de forțe din cazul 2 de reducere admit axă centrală și li se aplică teorema lui Varignon.

În cazul 3 de reducere intră sistemele de forțe la care $\vec{R} = \vec{0}, J = 0$.

Acest caz de reducere are două subcazuri :

3.a $\vec{R} = \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}$

În acest caz sistemul de forțe se reduce la un cuplu de forțe având același moment în orice punct din spațiu.

3.b $\vec{R} = \vec{0}, \vec{M}_O = \vec{0}$

Acest caz este al sistemelor de forțe echivalente cu 0 sau în echilibru.

Sistemele de forțe din cazul 3 de reducere nu admit axă centrală și nu li se aplică teorema lui Varignon.