

Curs 4

Reducerea sistemelor particulare de forțe (vectori)

Sistemele particulare de forțe (vectori), sunt acele sisteme în care forțele ocupă poziții particulare în spațiu. În aceasta categorie intră: forțele concurente, coplanare, paralele, distribuite.

Aceste sisteme se reduc la un torsesc ai cărui vectori $\vec{R}$ și $\vec{M}_O$ sunt perpendiculari $\vec{M}_O \perp \vec{R}$ și se încadrează în cazul 2 de reducere a sistemelor de forțe la care $\vec{R} \neq \vec{0}$, $J = 0$.

În raport cu punctele axei centrale aceste sisteme de forțe se reduc la $\vec{R} \neq \vec{0}$ și $\vec{M}_{min} = \vec{0}$, adică la o rezultantă unică.

1. Reducerea sistemelor de forțe concurente.

Forțele concurente sunt acele forțe reprezentate prin vectori a căror dreaptă suport se intersectează într-un punct din spațiu. Considerăm punctul de concurență O, care se alege drept punct (pol) de reducere. Deoarece suportul fiecărei forțe trece prin O, momentul ei în raport cu punctul O este nul.

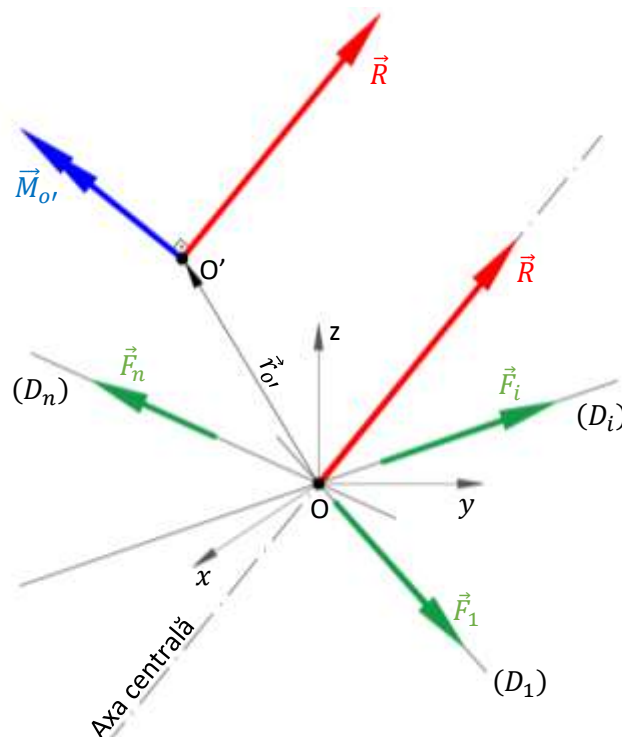


Figura 1 – Sistem de forțe concurente

1.1 Expresia vectorială a torsorului de reducere

Reducând acest sistem de forțe în punctul O avem:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \vec{M}_O = \vec{0} \quad (1)$$

Reducând acest sistem de forțe în alt punct din spațiu O', avem:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \vec{M}_{O'} = \vec{r}_{O'} \times \vec{R} \quad (2)$$

În care

$$\vec{M}_{O'} \perp \vec{R}$$

Vectorul $\vec{M}_{O'}$ s-a obținut prin aplicarea teoremei lui Varignon sistemului de forțe dat conform relației (2).

1.2 Expresia analitică a torsorului de reducere

Dacă expresiile analitice ale vectorilor din relațiile (1) sunt:

$$\vec{F}_i = F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k} \quad (3)$$

Atunci

$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$$

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} \quad (4)$$

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (5)$$

1.3 Axa centrală a sistemului de forțe

Axa centrală a sistemului de forțe dat, trece și ea prin punctul O și este dreapta suport a vectorului rezultat $\vec{R}$.

Ecuatiile axei centrale sunt:

$$\frac{x}{R_x} = \frac{y}{R_y} = \frac{z}{R_z} \quad (6)$$

În concluzie sistemele de forțe concurente se reduc în puncte din spațiu, care nu aparțin axei centrale, la un torsesor format din doi vectori: un vector rezultat $\vec{R}$ și un vector moment rezultat $\vec{M}$, perpendiculari, iar în puncte din spațiu, care aparțin axei centrale la un vector unic și anume vectorul rezultat $\vec{R}$.

în care vectorul $\vec{R}$ aparține planului π , iar vectorul $\vec{M}_o$ este perpendicular pe planul π astfel încât cei doi vectori ai torsorului de reducere sunt perpendiculari $\vec{M}_o \perp \vec{R}$.

2.2 Expresia analitică a torsorului de reducere

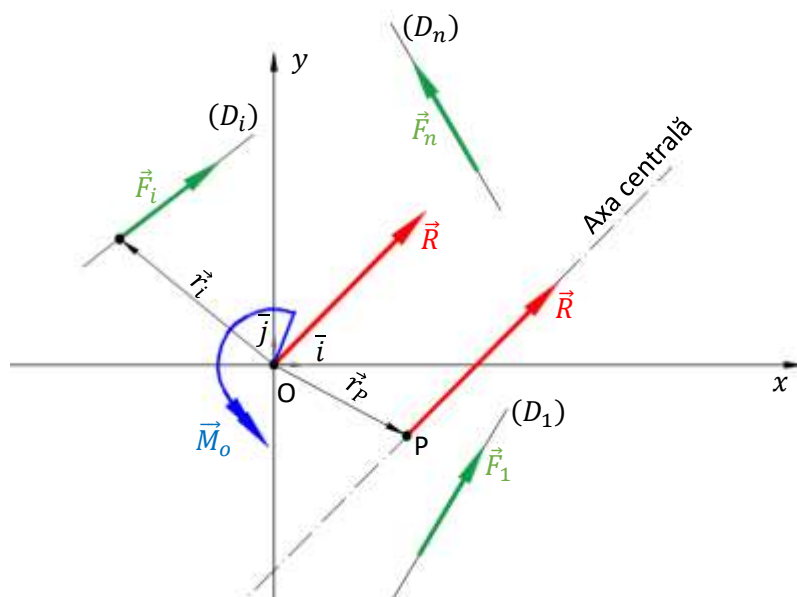


Figura 3 – Sistem de forțe coplanare – planul xOy

Dacă alegem planul π , planul xOy, atunci expresiile analitice ale vectorilor din relațiile (1) sunt:

$$\vec{F}_i = F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j}$$

$$\vec{r}_i = r_{ix}\vec{i} + r_{iy}\vec{j} \quad (8)$$

$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j}$$

$$\vec{M}_o = M_{oz}\vec{k} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{ix} & r_{iy} & 0 \\ F_{ix} & F_{iy} & 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n (r_{ix}F_{iy} - r_{iy}F_{ix})\vec{k}$$

Atunci:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad (9)$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad |\vec{M}_o| = M_{oz} = \pm F_i \cdot d_i \quad (10)$$

În care F_i sunt modulele vectorilor forte, iar d_i sunt brațele acestor forțe în raport cu axa Oz, care trece prin punctul O. Dacă forțele din plan rotesc planul în sens orar

atunci semnul momentului se consideră - , iar în caz contrar +; sau dacă forța „rotește” axa Ox „peste” axa Oy atunci momentul este pozitiv, altfel e negativ („rotește” axa Oy „peste” axa Ox).

2.3 Axa centrală a sistemului de forțe

Axa centrală a sistemului de forțe dat, aparține și ea planului π și este paralelă cu dreapta suport a vectorului rezultat $\vec{R}$.

Aplicând teorema lui Varignon acestui sistem de forțe rezultă:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_P \times \vec{R} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ R_x & R_y & 0 \end{bmatrix} = (xR_y - yR_x)\vec{k} \quad (11)$$

Obținem astfel ecuația axei centrale pentru sistemele de forțe coplanare:

$$x \cdot R_y - y \cdot R_x = M_{Oz} \quad (12)$$

În raport cu punctele axei centrale momentul rezultat este nul , sistemul reducându-se astfel la un vector unic (rezultanta $\vec{R}$).

În concluzie sistemele de forțe coplanare se reduc în puncte din planul forțelor, care nu aparțin axei centrale la un torsesor format din doi vectori: un vector rezultat ce aparține planului forțelor și un vector moment rezultat, perpendicular pe planul forțelor, iar în puncte din plan, care aparțin axei centrale la un vector unic și anume vectorul rezultat $\vec{R}$.

3. Reducerea sistemelor de forțe paralele.

Forțele paralele sunt acele forțe reprezentate prin vectori a căror drepte suport sunt paralele cu o direcție fixă din spațiu.

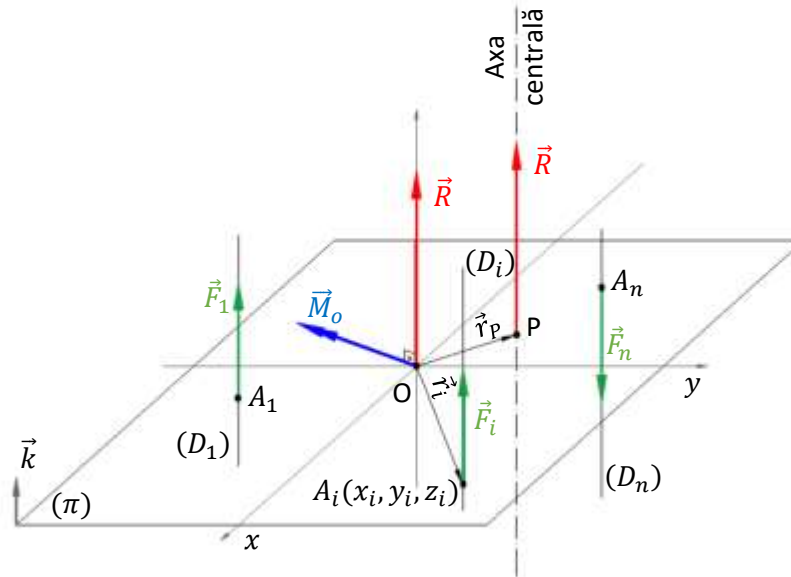


Figura 4 – Sistem de forțe paralele

Fiind dat un sistem de forțe (vectori) paralele $\{\vec{F}_i\}, i = \overline{1, n}$, se cere să se efectueze reducerea acestui sistem de forțe.

3.1 Expresia vectorială a tursorului de reducere

Reducând acest sistem de forțe în punctul O din spațiu, obținem tursorul de reducere:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (13)$$

În care vectorul $\vec{R}$ este paralel cu direcția comună a forțelor, iar vectorul $\vec{M}_O$ este conținut într-un plan perpendicular pe direcția comună a forțelor, astfel încât cei doi vectori ai tursorului de reducere sunt perpendiculari $\vec{M}_O \perp \vec{R}$.

3.2 Expresia analitică a tursorului de reducere

Dacă alegem axa Oz direcția comună a forțelor, atunci expresiile analitice ale vectorilor din relațiile (1) sunt:

$$\vec{F}_i = F_{iz} \vec{k} = F_i \vec{k}$$

$$\vec{r}_i = r_{ix} \vec{i} + r_{iy} \vec{j} + r_{iz} \vec{k} \quad (14)$$

$$\vec{R} = R_z \vec{k}$$

$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{ix} & r_{iy} & r_{iz} \\ 0 & 0 & F_i \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n (r_{iy} F_i) \cdot \vec{i} - \sum_{i=1}^n (r_{ix} F_i) \cdot \vec{j} = M_{ox} \cdot \vec{i} + M_{oy} \cdot \vec{j}$$

Atunci :

$$R_z = \sum_{i=1}^n F_i,$$

$$|\vec{R}| = R_z = R, M_{ox} = \sum_{i=1}^n r_{iy} F_i, M_{oy} = - \sum_{i=1}^n r_{ix} F_i, |\vec{M}_o| = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2} \quad (15)$$

În care F_i sunt modulele vectorilor forțe.

3.3 Axa centrală a sistemului de forțe

Axa centrală a sistemului de forțe dat, este și ea este paralelă cu direcția comună a forțelor și a vectorului rezultat $\vec{R}$.

Aplicând teorema lui Varignon acestui sistem de forțe obținem:

$$\vec{M}_o = \vec{r}_P \times \vec{R} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} = M_{ox} \cdot \vec{i} + M_{oy} \cdot \vec{j} \quad (16)$$

Obținem astfel ecuațiile axei centrale pentru sistemele de forțe paralele, ca intersecție a doua plane:

$$x = -\frac{M_{oy}}{R}, \quad y = \frac{M_{ox}}{R} \quad (17)$$

În raport cu punctele axei centrale momentul rezultat este nul , sistemul reducându-se astfel la un vector unic.

În concluzie sistemele de forțe paralele se reduc în puncte din spațiu, care nu aparțin axei centrale la un torsi format din doi vectori: un vector rezultat care

are direcția forțelor și un vector moment rezultat situat într-un plan perpendicular pe direcția forțelor, iar în puncte din spațiu, care aparțin axei centrale, la un vector unic și anume vectorul rezultat $\vec{R}$, paralel cu forțele.

3.4 Forțe paralele legate.

Forțele paralele legate sunt un caz particular al forțelor paralele. Dacă forțele paralele au punctele de aplicație fixe în spațiu, atunci vectorii sistemului sunt vectori legați. Vectorul rezultat este și el un vector legat, iar punctul lui de aplicație se numește **centrul forțelor paralele legate** (CFPL).

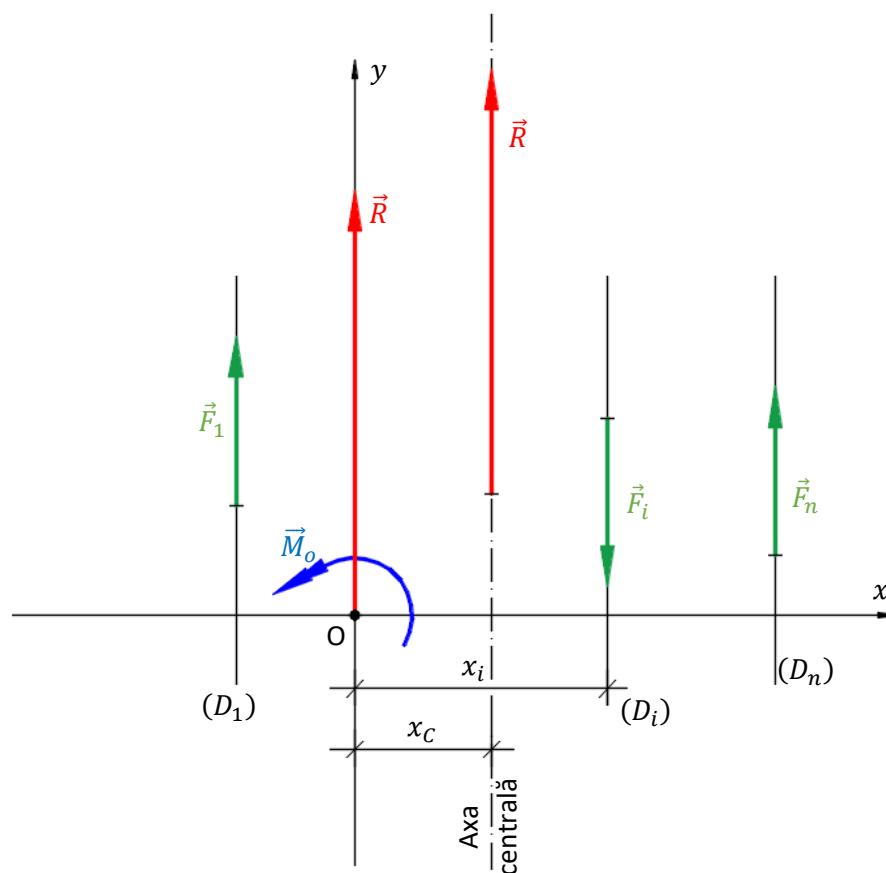


Figura 5 – Sistem de forțe paralele legate

Pentru determinarea poziției CFPL aplicăm sistemului de forțe teorema lui Varignon:

$$\vec{r}_c \times \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (18)$$

În care $\vec{r}_c$ este vectorul de poziție al CFPL în sistemul de referință ales, $\vec{R}$, este vectorul rezultat al sistemului de forțe, $\vec{F}_i$, reprezintă forțele din sistem, iar $\vec{r}_i$, sunt vectorii de poziție ai forțelor din sistem în sistemul de referință ales.

Dacă

$$\vec{F}_i = F_i \vec{k}$$

$$\vec{R} = R \vec{k} = \sum_{i=1}^n F_i \vec{k} = \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \vec{k} \quad (19)$$

Înlocuind relațiile (19) în relația (18) avem:

$$R \cdot \vec{r}_c \times \vec{k} = \left(\sum_{i=1}^n F_i \cdot \vec{r}_i \right) \times \vec{k} \quad (20)$$

$$R \cdot \vec{r}_c = \left(\sum_{i=1}^n F_i \cdot \vec{r}_i \right)$$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot \vec{r}_i}{R} \quad (21)$$

Dacă avem sistem de forțe paralele legate în spațiu (xOyz):

$$\vec{r}_c = x_c \cdot \vec{i} + y_c \cdot \vec{j} + z_c \cdot \vec{k}$$

$$\vec{r}_i = x_i \cdot \vec{i} + y_i \cdot \vec{j} + z_i \cdot \vec{k}$$

Atunci coordonatele CFPL vor fi:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i}{R} \quad , \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{R} \quad , \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot z_i}{R}.$$