Curs 5

5.Sisteme de forțe (vectori) distribuite

Forțele distribuite sunt acele forțe (vectori) care sunt aplicate în fiecare punct al unui domeniu. Acest domeniu poate fi o linie, o suprafață sau un volum.

Ele sunt cele mai întâlnite sisteme de forțe din domeniul construcțiilor.

5.1 Forțe distribuite pe o curbă

Fiind dată o curbă (C) în spațiu de ecuație:

$x = x(u)$

$y = y(u)$

$z = z(u)$

în care *u* este un parametru variabil.

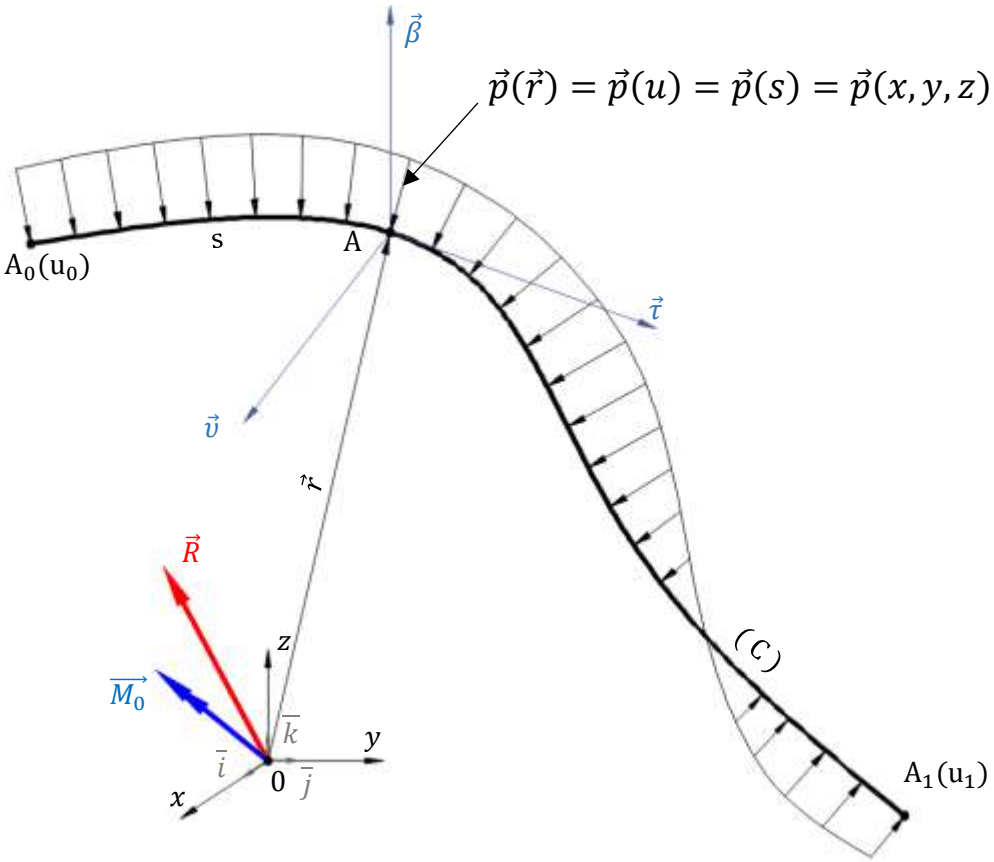

Figura 1 – Forțe distribuite pe o curbă în spațiu

Pe această curbă se află un sistem de forțe distribuite $\vec{p}(\vec{r}) = \vec{p}(u) = \vec{p}(s) = \vec{p}(x, y, z)$. Se cere să se reducă acest sistem de forțe în punctul O din spațiu.

5.1.1 Expresia vectoriala a torsorului de reducere

Torsorul din punctul O se determină cu relațiile:

$$\vec{R} = \int_C \vec{p}\,(s)ds$$

$$\vec{M}_O = \int_C \vec{r} \times \vec{p}\,(s)ds = \int_C \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} ds$$

în care

$$\vec{p}(s) = p_x(u) \cdot \vec{\imath} + p_y(u) \cdot \vec{\jmath} + p_Z(u) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{r} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k}$$

5.1.2 Expresia analitică a torsorului de reducere

$$\vec{R} \quad = R_x\vec{\imath} + R_y\vec{\jmath} + R_z\vec{k}$$

$$R_x = \int_C p_x\, ds, \qquad R_y = \int_C p_y\, ds, \qquad R_z = \int_C p_z\, ds$$

$$ds = \sqrt{\left(x'(u)\right)^2 + \left(y'(u)\right)^2 + \left(z'(u)\right)^2}\, du$$

$$\vec{M}_o = M_{ox}\vec{\imath} + M_{oy}\vec{\jmath} + M_{oz}\vec{k}$$

$$M_{ox} = \int_C (yp_z - zp_y)ds,\ \ M_{oy} = \int_C (zp_x - xp_z)ds,\ M_{oz} = \int_C (xp_y - yp_x)ds,$$

5.2 Forțe distribuite pe o suprafață

Fiind dată o suprafață (S) în spațiu de ecuație:

$x = x(u, v)$

$y = y(u, v)$

$z = z(u, v)$

în care *u, v* sunt parametrii variabili.

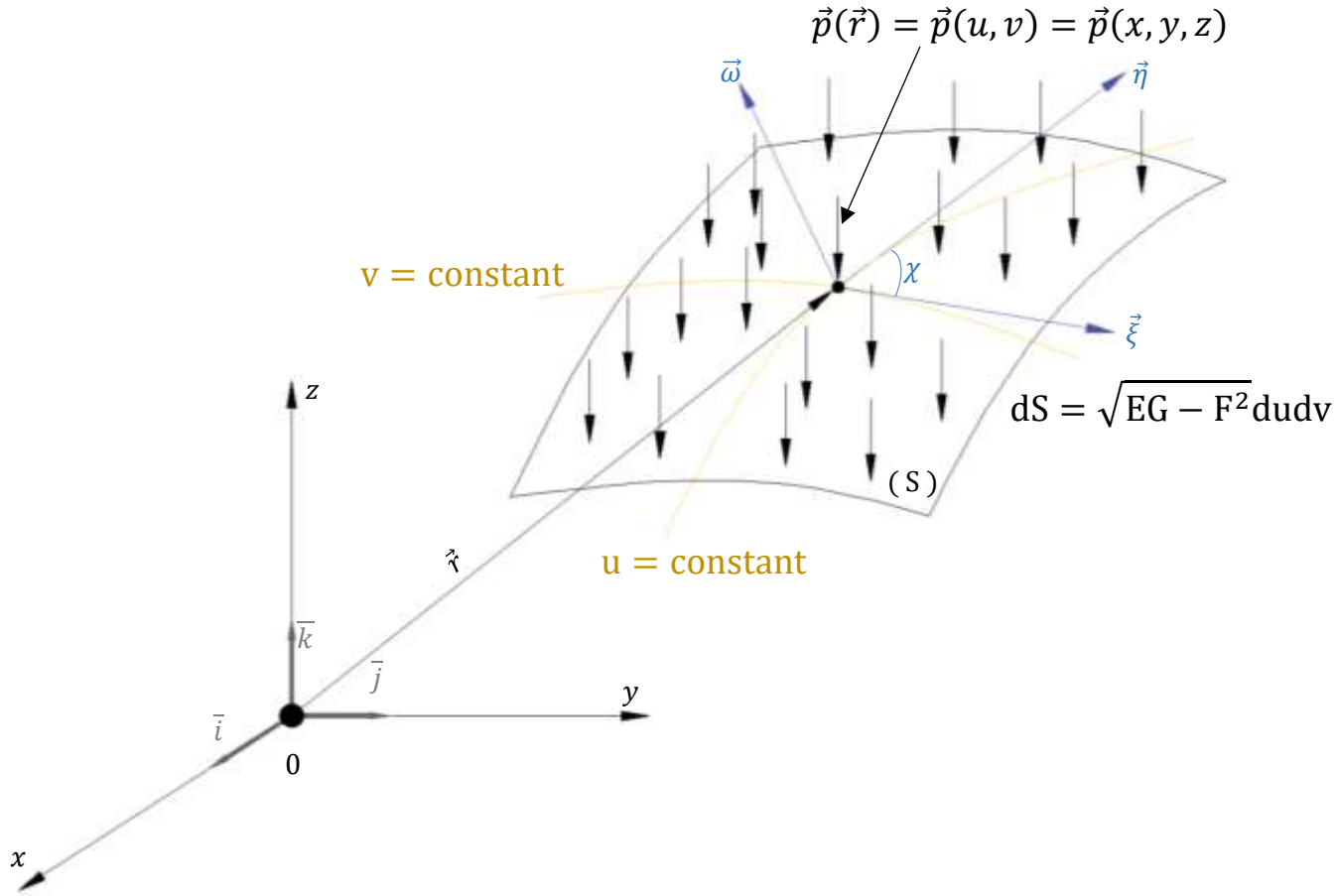

Figura 2 – Forțe distribuite pe o suprafață

Pe această suprafață se află un sistem de forțe distribuite $\vec{p}(\vec{r}) = \vec{p}(u, v) = \vec{p}(x, y, z)$. Se cere să se reducă acest sistem de forțe în punctul O din spațiu.

<u>5.2.1 Expresia vectorială a torsorului de reducere</u>

Torsorul din punctul O se determină cu relațiile:

$$\vec{R} = \iint_S \vec{p}\, dS$$

$$\vec{M}_O \iint_S \vec{r} \times \vec{p} dS = \iint_S \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} dS$$

în care

$$\vec{p}(s) = p_x(u,v) \cdot \vec{\imath} + p_y(u,v) \cdot \vec{\jmath} + p_Z(u,v) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{r} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k}$$

<u>5.2.2 Expresia analitică a torsorului de reducere</u>

$$\vec{R} \quad = R_x\vec{\imath} + R_y\vec{\jmath} + R_z\vec{k}$$

$$R_x = \iint_S p_x\, dS, \qquad R_y = \iint_S p_y\, dS, \qquad R_z = \iint_S p_z\, dS$$

$$dS = \sqrt{EG - F^2} dudv$$

$$E = x'_u + y'_u + z'_u \ , \ G = x'_v + y'_v + z'_v \ , \ F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$$

$$\vec{M}_o = M_{ox}\vec{\imath} + M_{oy}\vec{\jmath} + M_{oz}\vec{k}$$

$$M_{ox} = \iint_S \left(yp_z - zp_y\right) dS, \ M_{oy} = \iint_S \left(zp_x - xp_z\right) dS, \ M_{oz} = \iint_S \left(xp_y - \right.$$
$$\left. - yp_x\right) dS$$

5.3 Forțe distribuite pe un volum

Pe volumul (V) se află un sistem de forțe distribuite $\vec{p} = \vec{p}(\vec{r}) = \vec{p}(x, y, z)$. Se cere să se reducă acest sistem de forțe în punctul O din spațiu.

5.3.1 Expresia vectorială a torsorului de reducere

Torsorul din punctul O se determină cu relațiile:

$$\vec{R} = \iiint_V \vec{p} dV$$

$$\vec{M}_O = \iiint_V \vec{r} \times \vec{p} dV = \iiint_V \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} dV$$

în care

$$\vec{r} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{p} = p_x(x, y, z) \cdot \vec{\imath} + p_y(u, x, y, z) \cdot \vec{\jmath} + p_Z(x, y, z) \cdot \vec{k}$$

5.3.2 Expresia analitică a torsorului de reducere

$$\vec{R} \quad = R_x \vec{\imath} + R_y \vec{\jmath} + R_z \vec{k}$$

$$R_x = \iiint_V p_x dV\,, \qquad R_y = \iiint_V p_y dV\,, \qquad R_z = \iiint_V p_z dV$$

$$dV = dxdydz$$

$$M_{ox} = \iiint_V \left(yp_z - zp_y\right) dV\,,\ M_{oy} = \iiint_V (zp_x - xp_z) dS\,, M_{oz} = \iiint_V \left(xp_y - \right.$$
$$\left. -yp_x\right) d\mathrm{V}$$

5.4 Forțe distribuite pe un segment de dreaptă de lungime $\boldsymbol{l}$

Se dă segmentul de dreaptă OA de lungime l pe care se află un sistem de forțe distribuite $\vec{p}(x)$. Funcția de distribuire a forțelor se consideră cunoscută.

Se cere să se determine valoarea vectorului rezultant $\vec{R}$, și a poziției lui prin abscisa x_c.

Reducem acest sistem de forțe in punctul O:

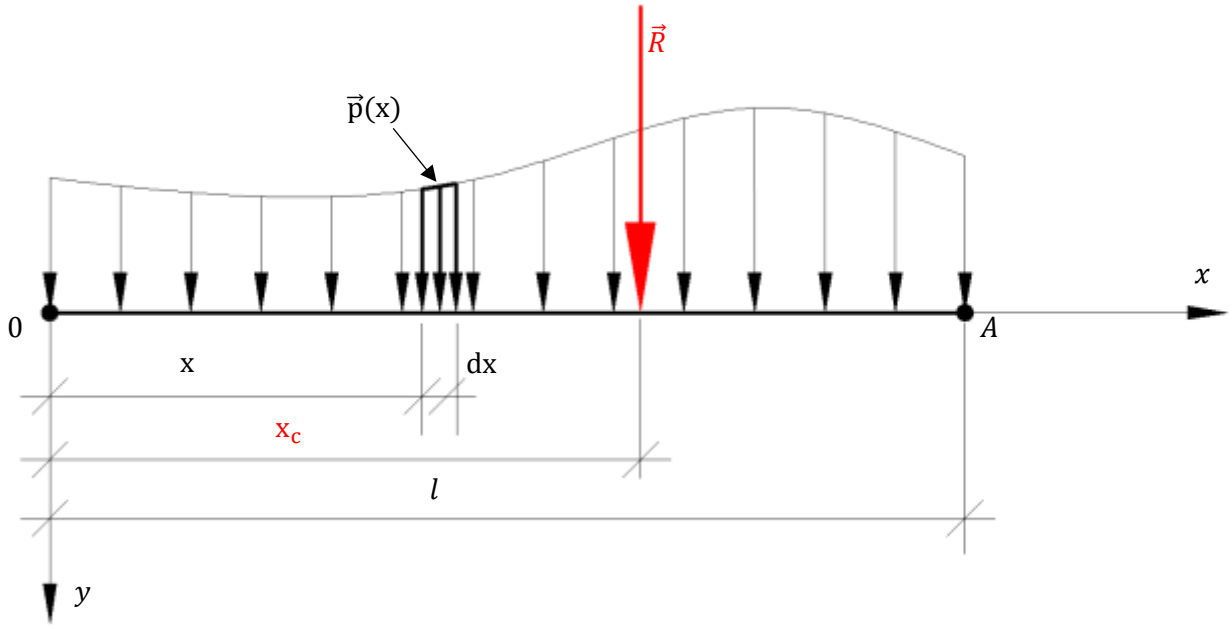

Figura 3 – Forțe distribuite pe o dreaptă

$$R = \int_0^l p\,(x)dx$$

$$M_O = \int_0^l x \cdot p\,(x)dx$$

Aplicând teorema lui Varignon :

$$x_c \cdot R = M_O$$

$$x_c = \frac{M_O}{R}$$

5.4 Cazuri particulare:

5.4.1. $p(x) = p = constant$ - **forțe uniform distribuite**

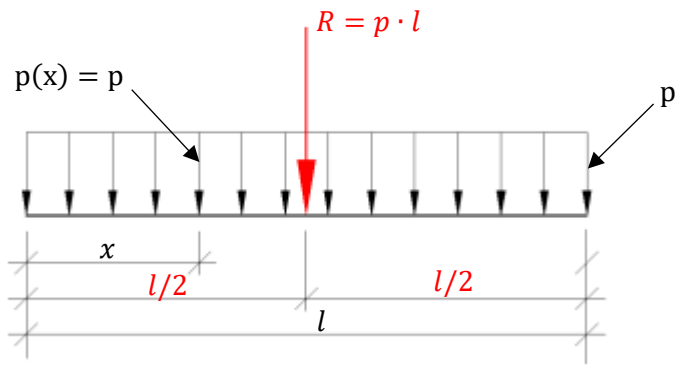

Figura 4 – Forțe uniform distribuite

$$R = \int_0^l p\,dx = p \cdot \int_0^l dx = pl$$

$$M_O = \int_0^l x \cdot p\,dx = p \cdot \int_0^l x\,dx = p\frac{l^2}{2}$$

$$x_c = \frac{p\frac{l^2}{2}}{pl} = \frac{l}{2}$$

$$R = pl, \qquad x_c = \frac{l}{2}$$

5.4.2. $p(x) = x\frac{p}{l}$ - **forțe liniar distribuite**

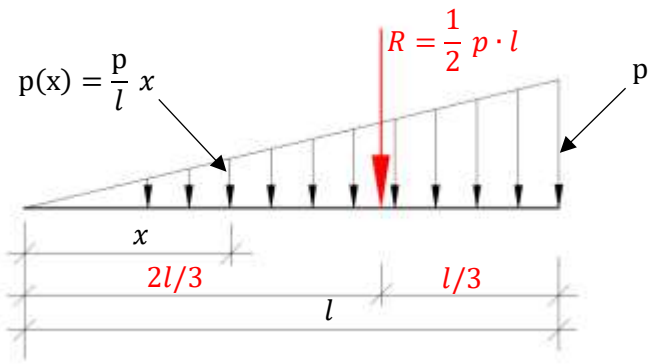

Figura 5 – Forțe liniar distribuite

$$R = \int_0^l x \frac{p}{l} dx = \frac{p}{l} \cdot \int_0^l x \, dx = p \frac{l}{2}$$

$$M_O = \int_0^l x \cdot x \frac{p}{l} dx = \frac{p}{l} \cdot \int_0^l x^2 \, dx = p \frac{l^2}{3}$$

$$x_c = \frac{p \frac{l^2}{3}}{p \frac{l}{2}} = \frac{2}{3} \, l$$

$$R = p \frac{l}{2}, x_c = \frac{2}{3} \, l$$

5.4.3. $p(x) = x^2 \frac{p}{l^2}$ - **forțe parabolic distribuite**

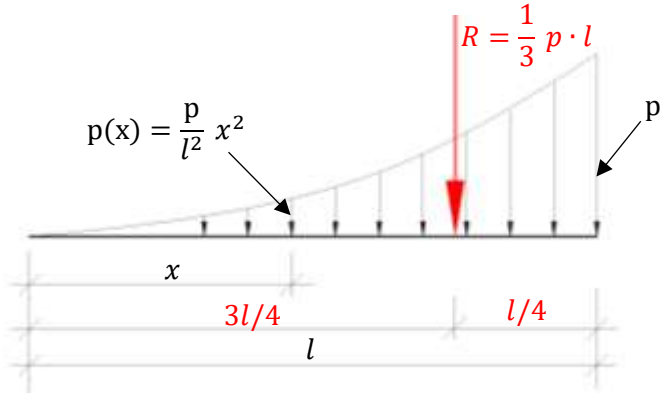

Figura 6 – Forțe parabolic distribuite

$$R = \int_0^l x^2 \frac{p}{l^2} \, dx = \frac{p}{l^2} \cdot \int_0^l x^2 \, dx = p \frac{l}{3}$$

$$M_O = \int_0^l x \cdot x^2 \frac{p}{l^2} dx = \frac{p}{l^2} \cdot \int_0^l x^3 \, dx = p \frac{l^2}{4}$$

$$x_c = \frac{p\frac{l^2}{4}}{p\frac{l}{3}} = \frac{3}{4}\ l$$

$$R = p\frac{l}{3}, x_c = \frac{3}{4}\ l$$

5.4.4. $p(x) = p - x^2\frac{p}{l^2}$ - **forțe parabolice complementar distribuite** față de precedentele în raport cu cele uniform distribuite

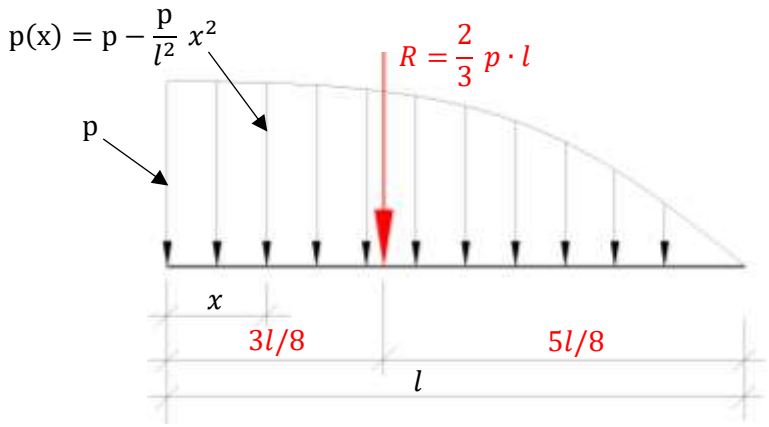

Figura 7 – Forțe parabolic complementar distribuite

$$R = \int_0^l \left(p - x^2\frac{p}{l^2}\right)\ dx = \frac{2}{3}pl$$

$$M_O = \int_0^l x \cdot \left(p - x^2\frac{p}{l^2}\right) dx = p\frac{l^2}{4}$$

$$x_c = \frac{p\frac{l^2}{4}}{2p\frac{l}{3}} = \frac{3}{8}\ l$$

$$R = \frac{2}{3}pl, x_c = \frac{3}{8}\ l$$

Echivalenta cu zero a sistemelor de forțe (vectori)

Sistemele de forțe echivalente cu zero, sau în echilibru, sunt acelea care nu au nici un efect mecanic când sunt aplicate sistemelor materiale. Ele aparțin cazului 3b de reducere conform capitolului "Cazuri de reducere a sistemelor de forte".

Un sistem de forțe fiind echivalent cu torsorul său, rezultă faptul că un sistem de forțe este echivalent cu 0 dacă are torsorul de reducere nul.

Se demonstrează că dacă, un sistem de forțe are torsorul nul într-un punct din spațiu, atunci el are torsorul nul în toate punctele din spațiu.

$\vec{R} = \vec{0},\ \vec{M}_o = \vec{0}$ (1)

În punctul O' torsorul sistemului de forțe va fi:

$\vec{R} = \vec{0}, \qquad \vec{M}_{o'} = \vec{M}_o + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R} = \vec{0}$

Relațiile (1) reprezintă condițiile vectoriale de echivalență cu 0 a sistemelor de forțe și sunt valabile pentru toate sistemele de forțe.

1. <u>Forțe generale sau oarecare</u>

Pentru forțele generale sunt valabile relațiile (1). Dacă cu originea în punctul O alegem un reper cartezian triortogonal, proiectând relațiile (1) pe cele trei axe avem:

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} M_{ox} = 0 \\ M_{oy} = 0 \\ M_{oz} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Relațiile (2) reprezintă ecuațiile scalare de echilibru pentru forțele generale.

O altă condiție de echivalență cu 0 a sistemelor generale de forțe este că momentele sistemului de forțe în raport cu 3 puncte necoliniare din spațiu să fie nule.

$\vec{M}_1 = \vec{0}, \quad \vec{M}_2 = \vec{0}\,,\ \vec{M}_3 = \vec{0}$

Tot pentru sistemele de forțe generale, sunt valabile și ecuațiile scalare de echilibru:

$$\begin{cases} M_{\Delta_1} = 0 \\ M_{\Delta_2} = 0 \\ \vdots \\ M_{\Delta_6} = 0 \end{cases}$$

în care $\Delta_1, \Delta_{2,\ldots,}\Delta_6$ sunt 6 axe necoplanare. Ele pot fi muchiile unui tetraedru oarecare.

2. <u>Forțe concurente într-un punct O din spațiu</u>

$$\vec{R} = \vec{0} \qquad (3)$$

Proiectând relațiile (1) pe cele trei axe avem:

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Relațiile (4) reprezintă ecuațiile scalare de echilibru pentru forțele concurente.

3. <u>Forțe coplanare</u>

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_o = \vec{0} \end{cases} \qquad (5)$$

Dacă planul xOy este planul forțelor, proiectând relațiile (5) pe cele trei axe avem:

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_x = 0 \\ M_{oz} = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Relațiile (6) reprezintă ecuațiile scalare de echilibru pentru forțele coplanare.

O altă condiție de echivalență cu 0 a sistemelor coplanare de forțe este ca momentele sistemului de forțe în raport cu 3 puncte necoliniare din planul forțelor să fie nule.

$\vec{M}_1 = \vec{0}, \quad \vec{M}_2 = \vec{0}\,,\ \vec{M}_3 = \vec{0}$

Tot pentru sistemele de forțe coplanare, sunt valabile și următoarele ecuații scalare de echilibru:

$$\begin{cases} M_A = 0 \\ M_B = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0 \end{cases}$$

în care A si B sunt două puncte din planul forțelor, iar dreapta AB nu este perpendiculară pe axa Ox.

4. <u>Forțe paralele</u>

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_o = \vec{0} \end{cases} \qquad (7)$$

Dacă axa Oz este direcția comună a forțelor, proiectând relațiile (5) pe cele trei axe avem:

$$\begin{cases} R_z = 0 \\ M_{ox} = 0 \\ M_{oy} = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Relațiile (8) reprezintă ecuațiile scalare de echilibru pentru forțele paralele.