

Hodișan Titu

Milchiș Tudor

MECANICĂ

- Teorie

Cinematică, dinamică și mecanică analitică

2018

Capitolul I - CINEMATICA

Cinematica este partea mecanicii care studiază mișcările mecanice ale punctelor materiale, sistemelor de puncte materiale, corpurilor solide sau ale sistemelor de corpuri, fără a lua în considerare proprietățile lor inerțiale (mase, momente de inerție), forțele și momentele care acționează asupra lor sau care rezultă ca efect al mișcării.

Kinematics, branch of physics and a subdivision of classical mechanics concerned with the geometrically possible motion of a body or system of bodies without consideration of the forces involved (i.e., causes and effects of the motions) (Britannica, 1998).

Cuvântul cinematica derivă din substantivele grecești Κινῆματ (kinemat) sau κινῆμα (kinema - deplasare, mișcare), care la rândul lor derivă din verbul κινεῖν (kinein - a mișca).

Mișcarea este o proprietate intrinsecă a materiei în sensul că nu există materie în repaus absolut, după cum nu poate fi concepută mișcarea fără suport material.

Mișcarea este definită în mecanică, ca schimbarea în timp a poziției sau a orientării unui sistem material în raport cu un alt sistem material. Mișcarea de-a lungul unei linii sau curbe se numește translație, iar mișcarea care schimbă orientarea corpului se numește rotație. Mișcarea generală este o combinație între mișcarea de translație și mișcarea de rotație.

Modificarea stării de mișcare a unui sistem material este o consecință a acțiunii altor sisteme materiale sau ca rezultat al interacțiunii unor părți din interiorul sistemului, iar cinematica studiază aceasta modificare doar pur descriptiv fără a lua în considerare cauzele care o determină.

Când spunem că un sistem material este în repaus sau în mișcare se subînțelege că repausul și mișcarea au loc în raport cu alte sisteme materiale. Astfel un corp imobil pe suprafața Pământului este în repaus în raport cu Pământul, dar Pământul este în mișcare față de Soare, etc., astfel încât poziția și mișcarea sunt relative întrucât se raportează la un sistem de referință (reper) care nu este fix. În Cinematică ne raportăm la (i) un sistem de referință care poate fi presupus în mod convențional fix, iar mișcarea înregistrată față de acest sistem de referință se numește **mișcare absolută**, sau la (ii) un sistem de referință mobil, în acest caz mișcarea se numește **mișcare relativă**.

Mișcarea cu viteză apropiată de viteză luminii trebuie tratată folosind teoria relativității, iar mișcarea corpurilor foarte mici (ex. electroni) trebuie tratată folosind teoriile mecanicii cuantice.

Dacă, în timpul mișcării, corpul poate să ocupe orice poziție în spațiu, mișcarea se numește **mișcare generală**, iar dacă acesta ocupă, în timpul mișcării, poziții particulare, în spațiu, mișcarea se numește **mișcare particulară**.

În cinematică se folosesc noțiunile fundamentale de **spațiu** și **timp** și se face ipoteza că spațiul este absolut, infinit, euclidian, tridimensional, izotrop, iar timpul, notat în cinematică cu t , este absolut, continuu, unidimensional, independent de spațiu și de orice altă mărime și ireversibil.

Problema fundamentală a cinematicii este următoarea: cunoscând în orice moment poziția unui sistem material față de un reper, să se determine elementele mișcării și anume **traectoria, viteza și accelerația**.

Scurt istoric

Cinematica s-a impus ca știință distinctă în 1862 prin lucrarea lui **M. Resal** intitulată **Cinematica pură**.

André-Marie Ampère (1775-1836), fizician și matematician francez, a fost primul care a arătat necesitatea ca Dinamica să fie precedată de o teorie a proprietăților geometrice a corpurilor în mișcare. Aceste proprietăți au fost expuse în 1838 la Facultatea de Științe din Paris de **Jean-Victor Poncelet** (1788 - 1867) matematician și inginer francez.

Cinematica are numeroase aplicații geometrice printre care se pot aminti: metoda construcției tangentelor a lui **Gilles de Roberval** (1602-1675), teoria centrului instantaneu de rotație a lui **Michel Chasles** (1793 - 1880), determinarea curbării unei curbe plane, etc.

CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

Introducere în cinematica punctului material

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

4

O reprezentare simplificată a unui sistem sau a unui proces fizic se numește *model fizic*. Modelele fizice și modelarea sunt instrumente esențiale nu numai în fizică ci și în întreg procesul cunoașterii lumii înconjurătoare. Descrierea matematică a unui model fizic simplu este de asemenea simplă. Cu cât recurgem la modele tot mai simple cu atât ne depărtăm de realitate. Lumea reală fiind diferită de modelele cu care operăm și rezultatele pe care le obținem sunt, într-un anumit sens, incomplete. Recurgerea la modele simple este necesară în faza incipientă a cunoașterii. În fizica sunt cunoscute modele care au evoluat în procesul cunoașterii. Cele mai cunoscute sunt modelul atomului, al nucleului, modelul de fluid sau de solid rigid, modele de unde etc.

Cel mai simplu model din mecanica este **punctul material**. Când punctul material este în mișcare el se numește și **mobîl**.

Modelul punctului material se poate aplica atât unor corpuri de dimensiuni și mase mari (corpuri cerești), cât și unor corpuri de dimensiuni microscopice (atomi, electroni, etc). Rezultatele din mecanica punctului material se extrapolează (cu corecțiile necesare) când se trece la studiul mișcării unor corpuri ce nu pot fi reduse la un punct și care pot fi considerate ca o mulțime de puncte materiale. (**sistem de puncte materiale**).

Elementele mișcării punctului material

Traectoria

Mișcarea punctului material o raportăm la un reper pe care îl considerăm fix.(fig.1.1). Poziția punctului material față de reper este dată de vectorul de poziție **r** care are originea în originea reperului și vârful în punctul material studiat. Poziția punctului material este dată de trei scalari care reprezintă distanțe sau distanțe și unghiuri. Traectoria punctului material este **locul geometric al pozițiilor succesive** ocupate de mobil în mișcarea sa și se notează cu **T**. În general traectoria punctului material este o curbă în spațiu. În mecanica clasică se consideră că traectoria sistemului material este bine determinată, iar mulțimea pozițiilor succesive ale punctului pe parcursul mișcării este continuă.

Fie un punct material care se deplasează pe o traiectorie oarecare. Poziția sa se determină cu ajutorul vectorului de poziție **r**. Legea de mișcare este dată de ecuația vectorială:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (1.1)$$

Dacă se alege ca reper un sistem de axe cartezian triortogonal și se proiectează ecuația (1.1) pe axe se obține:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ecuațiile (1.2) se numesc ecuații parametrice ale traiectoriei sau ecuațiile finite ale mișcării, iar **x**, **y** și **z** sunt funcții scalare de timp. Dacă se elimină parametrul **t** (timpul) din aceste ecuații se obține ecuația traiectoriei sub formă implicită:

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad (1.3)$$

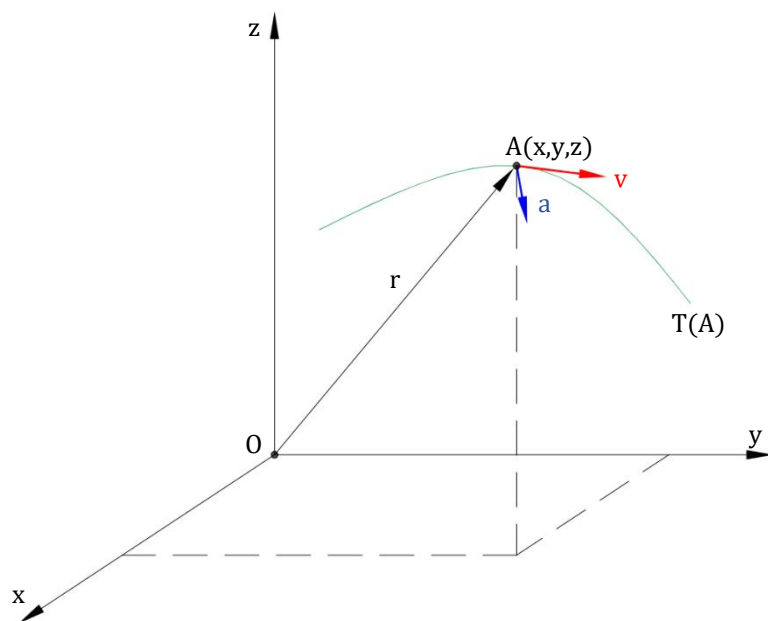


Figura 1.1

Deplasare finită și deplasare elementară

Mișcarea efectuată de punctul material într-un interval finit de timp $\Delta t = t_2 - t_1$ se numește **mișcare finită**, iar deplasarea punctului material în acest interval de timp $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ se numește **deplasare finită** (fig 1.2). Mișcarea efectuată de punctul material într-un interval infinitezimal (elementar) de timp dt se numește **mișcare instantanee sau elementară**, iar deplasarea punctului material în acest interval de timp, $d\mathbf{r}$ se numește **deplasare elementară** (fig 1.3).

$$d\mathbf{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k} \quad (1.4)$$

Viteza

Viteza este o mărime vectorială atașată punctului care arată direcția și sensul în care se efectuează mișcarea. Se consideră două poziții succesive A_1 și A_2 ale punctului A în mișcare pe curba (T_A) , la momentele $t_1 = t$ și respectiv $t_2 = t + \Delta t$ cu vectorii de poziție $\mathbf{r}_1$ și $\mathbf{r}_2$. Elementul de arc A_1A_2 , de pe traiectoria punctului, se poate asimila, în intervalul de timp Δt foarte mic cu elementul de coardă A_1A_2 astfel încât

$$|d\mathbf{r}| \cong \Delta s \quad (1.5)$$

(i) Raportul $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ se numește **viteză medie** pe o porțiune Δs de traiectorie (fig 1.1)

$$\mathbf{v}_m = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (1.6)$$

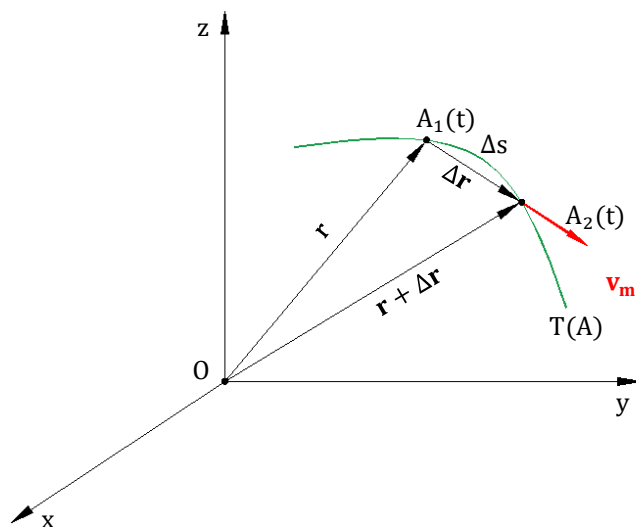


Figura 1.2

(ii) Prin trecerea la limită în relația (1.6) când intervalul de timp $\Delta t \rightarrow 0$ rezultă **viteza instantanee** $\mathbf{v}$ ca fiind viteza punctului la momentul t al mișcării:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (1.7)$$

Viteza instantanee este o mărime vectorială și este egală cu derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului de poziție a punctului material, fiind un vector tangent la traiectorie în poziția punctului pe traiectorie la momentul t (fig.1.3).

Derivata de ordinul I în raport cu timpul a funcțiilor scalare sau vectoriale se va nota, cu un punct deasupra funcțiilor, derivata de ordinul II în raport cu timpul a funcțiilor scalare sau vectoriale se va nota, cu două puncte deasupra funcțiilor s.a.m.d.

Din relația (1.7) rezultă expresia deplasării elementare:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt \quad (1.8)$$

Dimensiunea și unitatea de măsură a vitezei sunt:

$$\begin{aligned} [v] &= \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = LT^{-1} \\ [v]_{SI} &= 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned} \quad (1.9)$$

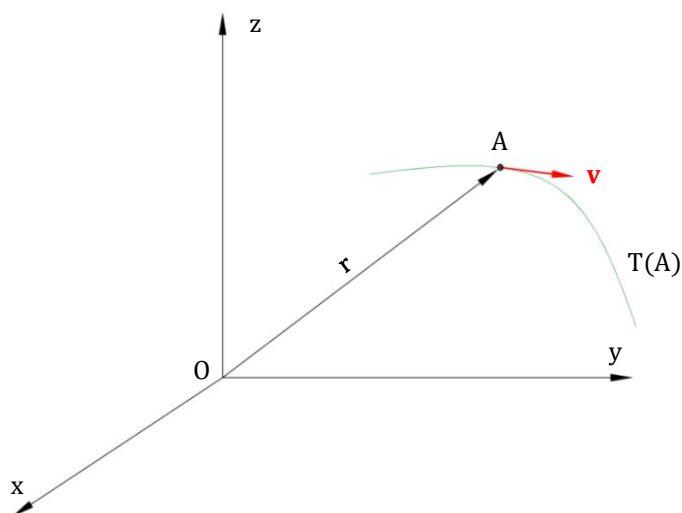


Figura 1.3

(iii) Sunt cazuri când poziția unui punct pe traiectorie se poate preciza cu ajutorul unui unghi la centru θ , (care se mai numește și spațiu unghiular) și a razei vectoriale. (coordonate polare). Considerând ca reper raza vectorială OA_0 , legea de mișcare a punctului A, este definită de funcția: $\theta = \theta(t)$ (fig.1.4).

Se consideră două poziții succesive A_1 și A_2 ale punctului A în mișcare pe curba plană (T_A), la momentele $t_1 = t$ și respectiv $t_2 = t + \Delta t$ cu unghiurile la centru θ și $\theta + \Delta\theta$. Variația spațiului unghiular în intervalul de timp Δt este

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1.$$

Raportul $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ (1.10) se numește **viteză unghiulară medie** a punctului A.

Prin trecerea la limită în relația (1.10) când intervalul de timp $\Delta t \rightarrow 0$ rezultă **viteza unghiulară instantanee** ω ca fiind viteza unghiulară a punctului la momentul t al mișcării:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad (1.11)$$

Vectorul viteză unghiulară ω este perpendicular pe planul traiectoriei mobilului și are sensul dat de regula burghiului sau a mâinii drepte.

Dimensiunea și unitatea de măsură a vitezei unghiulare sunt:

$$[\omega] = \frac{[\Delta\theta]}{[\Delta t]} = T^{-1} \quad (1.12)$$

$$[\omega]_{SI} = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 1 \text{ s}^{-1}$$

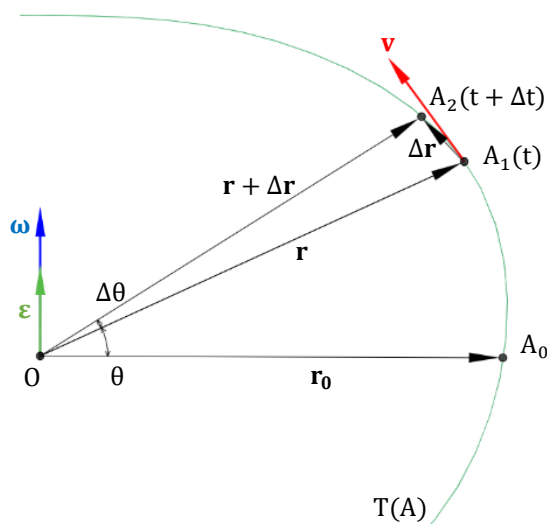


Figura 1.4

(iv) Se definește **viteză areolară medie** raportul $\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}$ (1.13) în care $\Delta\sigma$ reprezintă aria parcursă de raza vectorială a unui punct material aflat în mișcare pe o traiectorie curbilinie într-un interval finit de timp, foarte mic. (fig.1.5)

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r} \quad (1.14)$$

Prin trecerea la limită în relația (1.13) când intervalul de timp $\Delta t \rightarrow 0$ rezultă **viteza areolară instantanee** Ω ca fiind viteza areolară la momentul t al mișcării:

Vectorul viteză areolară este egal cu derivata de ordinul întâi în raport cu timpul a vectorului de arie descris de vectorul de poziție $\mathbf{r}$

$$\Omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (1.15)$$

Relația dimensională a vitezei areolare este

$$[\Omega] = L^2 T^{-1} \quad (1.16)$$

$$[\Omega]_{SI} = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

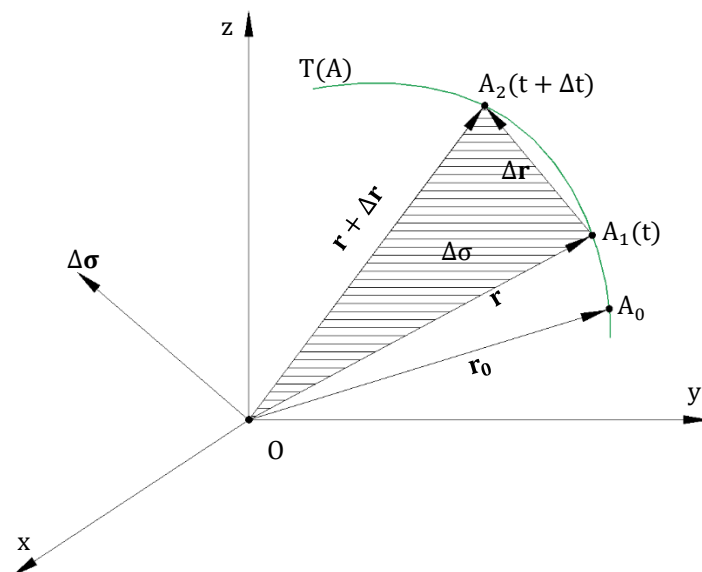


Figura 1.5

Accelerația

Accelerația este o mărime vectorială atașată punctului în mișcare și arată modul de variație al vitezei acestui punct în decursul mișcării, ca modul, direcție și sens.

Se consideră două poziții succesive A_1 și A_2 ale punctului A în mișcare pe curba (T_A) , la momentele $t_1 = t$ și respectiv $t_2 = t + \Delta t$, având vitezele $\mathbf{v}_1(t_1)$ și $\mathbf{v}_2(t_2)$.

Variația vitezei în intervalul de timp Δt este $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2(t_2) - \mathbf{v}_1(t_1)$

(i) Raportul $\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ măsoară variația vitezei în timp și se numește **accelerație medie** pe o porțiune Δs de traiectorie.

$$\mathbf{a}_m = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (\text{fig 1.6}) \quad (1.17)$$

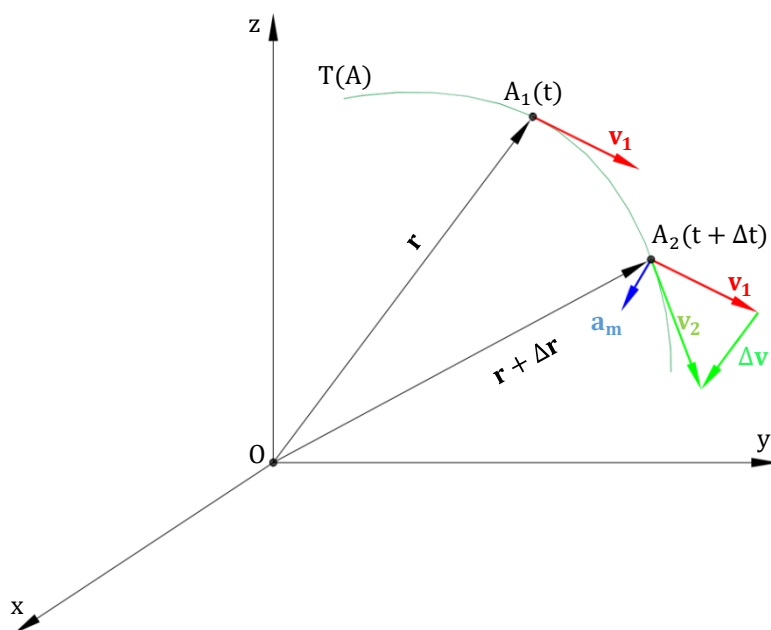


Figura 1.6

(ii) Prin trecerea la limită în relația (1.17) când intervalul de timp $\Delta t \rightarrow 0$ rezultă **acclerația instantanee a** ca fiind acclerația la momentul t al mișcării;

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (1.18)$$

Mecanica Clasică, Cinematica, Dinamica și Mecanica Analitică

și este egală cu derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului viteză instantanee și cu derivata de ordinul II în raport cu timpul a vectorului de poziție $\mathbf{r}$ (fig1.7).

Dacă se continuă derivarea în raport cu timpul, a vectorului de poziție $\mathbf{r}$, se obțin vectori care se numesc acclerații de ordin superior. Astfel, derivata a treia în raport cu timpul a vectorului de poziție, se numește acclerație de ordinul al doilea sau supra acclerație.

Dimensiunea și unitatea de măsură a acclerației sunt:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}] &= \frac{[\Delta \mathbf{v}]}{[\Delta t]} = \text{LT}^{-2} \\ [\mathbf{a}]_{\text{SI}} &= 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned} \quad (1.19)$$

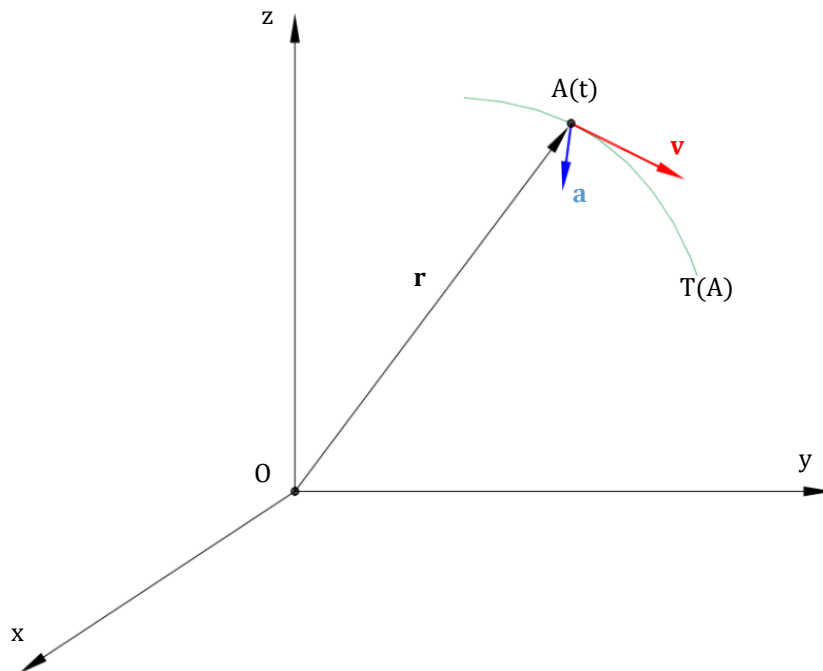


Figura 1.7

(iii) Se definește **acclerația unghiulară** ca variația în timp a vectorului viteză unghiulară

Considerând pozițiile succesive A_1 și A_2 ale punctului A în mișcare pe traiectorie, la momentul t și respectiv $t + \Delta t$, având vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 , variația vitezei unghiulare în intervalul de timp Δt este $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$. Raportul $\frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ (1.20) măsoară variația vitezei unghiulare în timp și se numește **acclerație unghiulară medie**. Prin trecerea la limită în relația (1.20) când intervalul de timp $\Delta t \rightarrow 0$ și sau $A_2 \rightarrow A_1$ rezultă acclerația unghiulară instantanee:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \quad (1.21)$$

Vectorul acclerație unghiulară are aceeași direcție ca și vectorul viteză unghiulară în cazul traiectoriilor plane ale mobilului (fig1.4).

Dimensiunea și unitatea de măsură a vitezei unghiulare sunt:

$$\begin{aligned} [\varepsilon] &= \frac{[\Delta \omega]}{[\Delta t]} = \text{T}^{-2} \\ [\varepsilon]_{\text{SI}} &= 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned} \quad (1.22)$$

(iv) Se definește **acclerația areolară** ca o mărime vectorială ce reprezintă variația în timp a vectorului viteză areolară a unui punct material aflat în mișcare pe o traiectorie curbilinie. Formula de definiție este dată de expresia:

$$\dot{\Omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} = \frac{d\Omega}{dt} \quad (1.23)$$

Vectorul accelerație areolară este egal cu derivata de ordinul întâi în raport cu timpul a vectorului viteză areolară:

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{a} \quad (1.24)$$

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

10

Relația dimensională a accelerației areolare este

$$\begin{aligned} [\dot{\Omega}] &= L^2 T^{-2} \\ [\dot{\Omega}]_{SI} &= 1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Componentele vectorilor viteză și accelerație

Coordonate carteziene

Vectorul de poziție al punctului material are expresia $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}$ în care x, y și z sunt coordonatele punctului material A raportate la un sistem de axe cartezian triortogonal.

Aceste coordonate sunt funcții de timp și reprezintă **ecuațiile finite ale mișcării punctului** (fig1.8).

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Vectorul **viteză instantanee** are expresia:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = \dot{x}(t) \mathbf{i} + \dot{y}(t) \mathbf{j} + \dot{z}(t) \mathbf{k} \quad (1.27)$$

Din relația (1.16) rezultă **componentele scalare** ale vectorului viteză instantanee care sunt funcții scalare de timp:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x}(t) \\ v_y &= \dot{y}(t) \\ v_z &= \dot{z}(t) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Modulul vectorului viteză instantanee este:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} \quad (1.29)$$

Direcția acestui vector este dată de cosinușii directori:

$$\begin{aligned} \cos(\angle \mathbf{v}, \mathbf{i}) &= \frac{v_x}{|\mathbf{v}|} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}} \\ \cos(\angle \mathbf{v}, \mathbf{j}) &= \frac{v_y}{|\mathbf{v}|} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}} \\ \cos(\angle \mathbf{v}, \mathbf{k}) &= \frac{v_z}{|\mathbf{v}|} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}} \end{aligned} \quad (1.30)$$

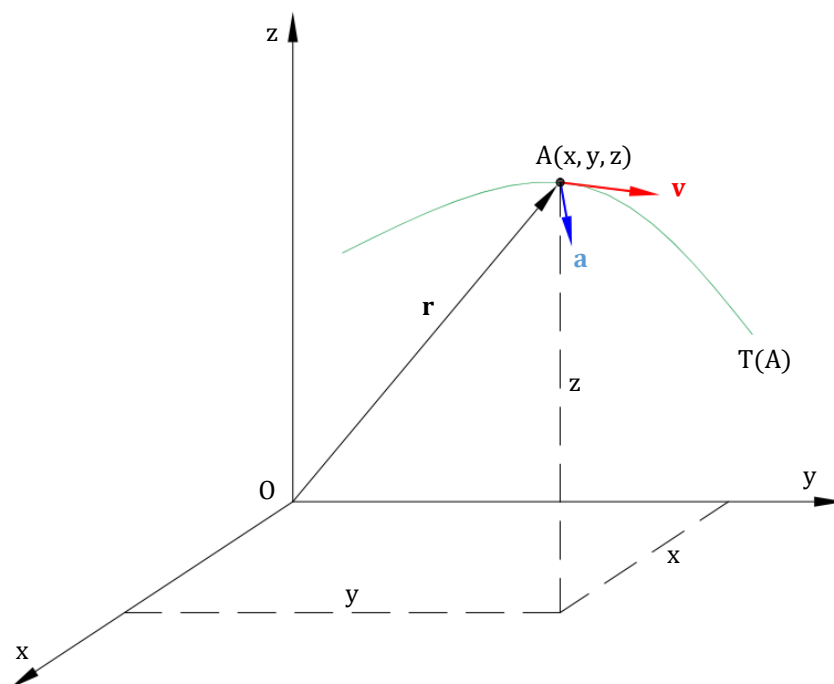


Figura 1.8

Vectorul viteză areolară:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \Omega_x \mathbf{i} + \Omega_y \mathbf{j} + \Omega_z \mathbf{k} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} [(\dot{y}z - z\dot{y}) \mathbf{i} + (z\dot{x} - x\dot{z}) \mathbf{j} + (x\dot{y} - y\dot{x}) \mathbf{k}]\end{aligned}\quad (1.31)$$

Componentele scalare ale vectorului $\boldsymbol{\Omega}$ sunt:

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \frac{1}{2} (\dot{y}z - z\dot{y}) \\ \Omega_y &= \frac{1}{2} (z\dot{x} - x\dot{z}) \\ \Omega_z &= \frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x})\end{aligned}\quad (1.32)$$

Vectorul **acclerație instantanee** are expresia:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{y} \mathbf{j} + \ddot{z} \mathbf{k} = \ddot{x}(t) \mathbf{i} + \ddot{y}(t) \mathbf{j} + \ddot{z}(t) \mathbf{k} \quad (1.33)$$

Din relația (1.16) rezultă componentele scalare ale vectorului accelerație instantanee

$$\begin{aligned}a_x &= \ddot{x}(t) \\ a_y &= \ddot{y}(t) \\ a_z &= \ddot{z}(t)\end{aligned}\quad (1.34)$$

Modulul vectorului accelerație instantanee este:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2} \quad (1.35)$$

Direcția acestui vector este dată de cosinușii directori

$$\begin{aligned}\cos(\angle \mathbf{a}, \mathbf{i}) &= \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2}} \\ \cos(\angle \mathbf{a}, \mathbf{j}) &= \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2}} \\ \cos(\angle \mathbf{a}, \mathbf{k}) &= \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2}}\end{aligned}\quad (1.36)$$

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

12

Vectorul accelerație areolară:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\Omega}} &= \dot{\Omega}_x \mathbf{i} + \dot{\Omega}_y \mathbf{j} + \dot{\Omega}_z \mathbf{k} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} [(y\ddot{z} - z\ddot{y}) \mathbf{i} + (z\ddot{x} - x\ddot{z}) \mathbf{j} + (x\ddot{y} - y\ddot{x}) \mathbf{k}]\end{aligned}\quad (1.37)$$

Componentele scalare ale vectorului $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ sunt:

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_x &= \frac{1}{2} (y\ddot{z} - z\ddot{y}) \\ \dot{\Omega}_y &= \frac{1}{2} (z\ddot{x} - x\ddot{z}) \\ \dot{\Omega}_z &= \frac{1}{2} (x\ddot{y} - y\ddot{x})\end{aligned}\quad (1.38)$$

Coordonate cilindrice

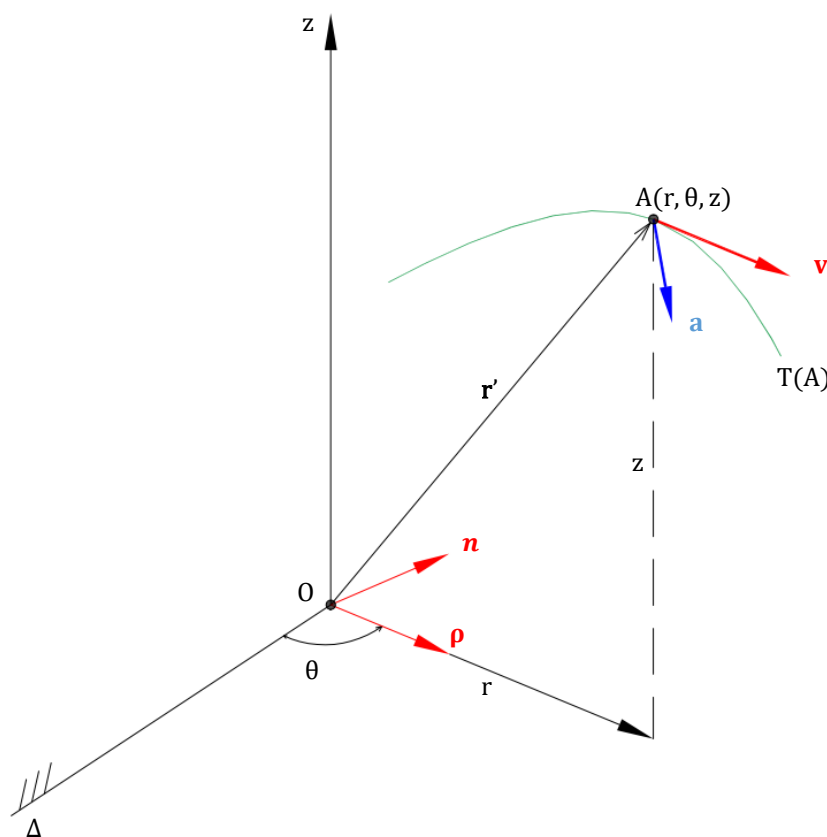


Figura 1.9

vectorul de poziție al punctului material are expresia $\mathbf{r}' = r(t) \cdot \boldsymbol{\rho} + z \cdot \mathbf{k}$ în care r, θ, z , sunt coordonatele cilindrice ale punctului material A raportate la un sistem de axe. Aceste coordonate sunt funcții de timp și reprezintă **ecuațiile finite ale mișcării punctului** (fig.1.9)

$$\begin{aligned} r &= r(t) \\ \theta &= \theta(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (1.39)$$

Vectorul *viteză instantanee* are expresia

$$\mathbf{v} = \dot{r} \boldsymbol{\rho} + r \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{z} \mathbf{k} \quad (1.40)$$

Știind că $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\theta} \mathbf{n}$ (vezi anexa 1) și $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ se obține:

$$\mathbf{v} = \dot{r} \boldsymbol{\rho} + v_n \mathbf{n} + v_z \mathbf{k} = \dot{r} \boldsymbol{\rho} + r \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{z} \mathbf{k} \quad (1.41)$$

Din relația (1.41) rezultă **componentele scalare** ale vectorului viteză instantanee:

$$\begin{aligned} v_\rho &= \dot{r} \\ v_n &= r \dot{\theta} \\ v_z &= \dot{z} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Modulul vectorului viteză instantanee este:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_\rho^2 + v_n^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2 + \dot{z}^2} \quad (1.43)$$

Vectorul **acelerație instantanee** are expresia

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r} \boldsymbol{\rho} + \dot{r} \dot{\theta} \mathbf{n} + r \ddot{\theta} \mathbf{n} + r \dot{\theta} \dot{\mathbf{n}} + \ddot{z} \mathbf{k} \quad (1.44)$$

Știind că $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\theta} \cdot \mathbf{n}$, $\dot{\mathbf{n}} = -\dot{\theta} \cdot \boldsymbol{\rho}$

Relația (1.44) devine

$$\mathbf{a} = a_\rho \boldsymbol{\rho} + a_n \mathbf{n} + a_z \mathbf{k} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \boldsymbol{\rho} + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \mathbf{n} + \ddot{z} \mathbf{k} \quad (1.45)$$

Din relația (1.45) rezultă **componentele scalare** ale vectorului **acelerație instantanee**:

$$\begin{aligned} a_\rho &= \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \\ a_n &= r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \\ a_z &= \ddot{z} \end{aligned} \quad (1.46)$$

Modulul vectorului accelerație instantanee este:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_\rho^2 + a_n^2 + a_z^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2)^2 + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta})^2 + \ddot{z}^2} \quad (1.47)$$

Coordonate intrinseci

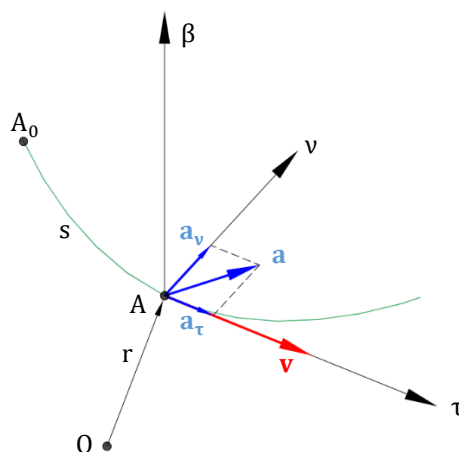


Figura 1.10

Coordonata intrinsecă a punctului material este s (fig 1.10). Această coordonată este funcție de timp și reprezintă **ecuația finită a mișcării punctului**

$$s = s(t) \quad (1.48)$$

Mișcarea o raportăm la un reper mobil legat de punct a cărui axe sunt: tangenta la traiectorie τ , normala ν și binormala β numit triedrul lui Frenet.

Vectorul **viteză instantanee** are expresia:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \boldsymbol{\tau} \quad (1.49)$$

$$\mathbf{v} = v_\tau \boldsymbol{\tau} + v_\nu \boldsymbol{\nu} + v_\beta \boldsymbol{\beta} \quad (1.50)$$

Din relațiile (1.49) și (1.50) rezultă *componentele scalare* ale vectorului viteză instantanee:

$$\begin{aligned} v_\tau &= \dot{s} \\ v_\nu &= 0 \\ v_\beta &= 0 \end{aligned} \quad (1.51)$$

Din relația (1.51) se observă că vectorul viteză este dirijat după tangenta la traiectoria punctului. Vectorul **acelerație instantanee** are expresia:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} = \ddot{s} \boldsymbol{\tau} + \dot{s} \dot{\boldsymbol{\tau}} \\ \dot{\boldsymbol{\tau}} &= \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{\mathbf{v}}{\rho} \end{aligned} \quad (1.52)$$

În relația (1.52) s-a ținut seama de cea de-a doua formulă a lui Frenet¹.

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{\mathbf{v}}{\rho} \quad (1.53)$$

În relația (1.53) ρ este raza de curbură a traiectoriei.

Înlocuind relația (1.53) în formula accelerației obținem:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = a_\tau \boldsymbol{\tau} + a_\nu \boldsymbol{\nu} + a_\beta \boldsymbol{\beta} = \ddot{s} \boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \boldsymbol{\nu} \quad (1.54)$$

Din relația (1.54) rezultă componentele scalare ale vectorului accelerație

$$\begin{aligned} a_\tau &= \dot{v} = \ddot{s} \\ a_n &= \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \\ a_\beta &= 0 \end{aligned} \quad (1.55)$$

Din relațiile (1.55) rezultă câteva observații legate de mișcarea punctului:

- - accelerația tangențială măsoară variația vitezei în timp $a_\tau = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$

componenta normală a accelerației a_ν este îndreptată spre centrul de curbură al traiectoriei, ea se mai numește și accelerație centripetă

vectorul accelerație instantanee este situat în planul osculator al curbei traiectorie ($a_\beta = 0$)

Modulul vectorului accelerație este:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2} = \sqrt{(\ddot{s})^2 + \left(\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right)^2} \quad (1.56)$$

Cinematica mișcărilor particulare ale punctului material

Mișcarea rectilinie

Este mișcarea în care traiectoria este o dreaptă (fig1.11). Considerăm o axă Ox de versor $\mathbf{u}$ pe care s-a stabilit un sens pozitiv și un punct A care se mișcă pe axă. Vectorul de poziție al punctului pe axă este $\mathbf{r} = \mathbf{OA} = x\mathbf{u}$.

Viteza punctului este $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{u}$, iar accelerația $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{x}\mathbf{u}$.

Se observă că viteza și accelerația sunt vectori coliniari și dirijați de-a lungul traiectoriei.

¹ Jean Frédéric Frenet (1816 – 1900)

Dacă vectorul viteză și vectorul accelerație au același sens mișcarea se numește accelerată, iar dacă acești vectori sunt de sens contrar mișcarea se numește încetinită.

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanici

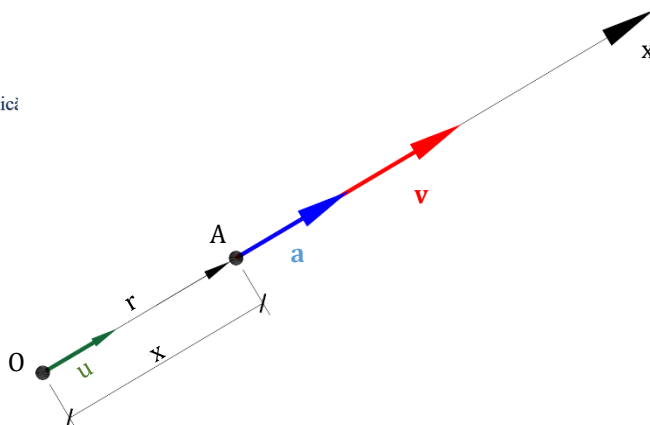


Figura 1.11

Cazurile particulare ale mișcării rectilinii sunt:

(i) **mișcarea rectilinie și uniformă** este mișcarea în care viteza este constantă pe tot parcursul mișcării (fig1.12).

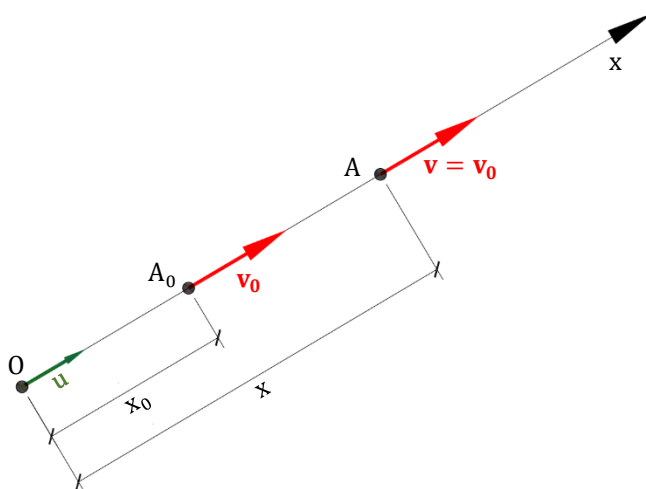


Figura 1.12

$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ constant, $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$

Știind că $\frac{dx}{dt} = v$, rezultă:

$$dx = v_0 dt \quad (1.57)$$

Dacă se integrează relația (1.57) rezultă:

$$x = v_0 t + C \quad (1.58)$$

Constanta C se determină din condițiile inițiale ale mișcării:

$$t = t_0 = 0$$

$$x = x_0$$

Relația (1.58) devine

$$x = v_0 t + x_0 \quad (1.59)$$

În concluzie mișcarea rectilinie și uniformă se caracterizează prin următoarele elemente:

$x = v_0 t + x_0$ - traiectoria o funcție de gradul întâi în t ,

$v = \dot{x} = v_0$ - viteza constantă

$a = \dot{v} = 0$ - accelerația nulă

(ii) **mişcarea rectilinie uniform variată** (fig 1.13) este mişcarea în care acceleraţia este constantă pe tot parcursul mişcării

Mecanică – Cinematică, dinamică şi me

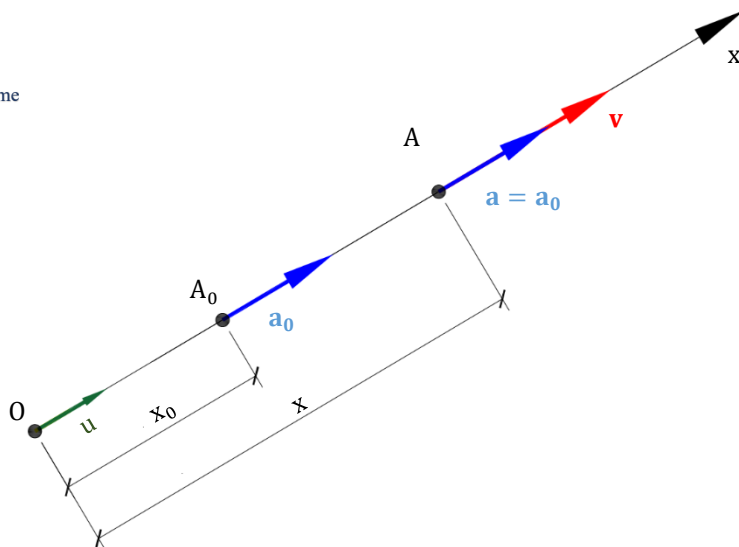


Figura 1.13

$a = a_0$ - constant

Știind că

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_0 \quad (1.60)$$

Dacă se integrează relația (1.60) rezultă:

$$\frac{dx}{dt} = v = a_0 t + C_1 \quad (1.61)$$

Constanta C_1 se determină din condițiile inițiale ale mișcării:

$t = t_0 = 0$

$v = v_0$

$C_1 = v_0$

Relația (1.61) devine:

$v = a_0 t + v_0$

Dacă se integrează relația (1.61) rezultă:

$$x = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + C_2 \quad (1.62)$$

constantă C_2 se determină din condițiile inițiale ale mișcării:

$t = t_0 = 0$

$x = x_0$

$C_2 = x_0$

Relația (1.62) devine:

$$x = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0 \quad (1.63)$$

În concluzie mișcarea rectilinie uniform variată se caracterizează prin următoarele elemente:

$x = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$ - traiectoria o funcție de gradul doi în t

$v = a_0 t + v_0$ - viteza o funcție de gradul întâi în t

$a = a_0$ - accelerația constantă

Dacă vectorul viteze și vectorul accelerație au același sens mișcarea se numește uniform accelerată, iar dacă acești vectori sunt de sensuri contrarii mișcarea se numește uniform încetinită.

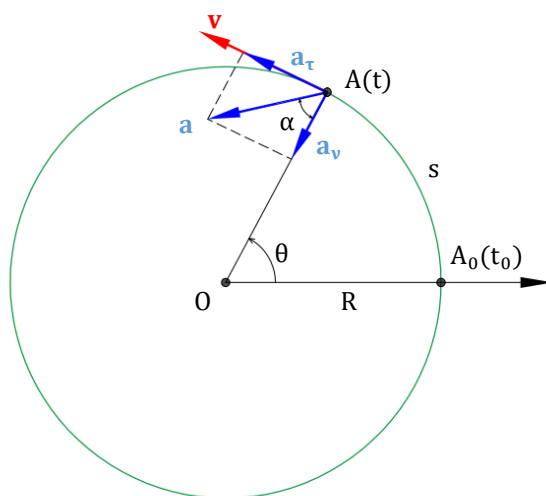


Figura 1.14

în coordonate intrinseci

$$s = s(t) = R \cdot \theta(t) \quad (1.64)$$

viteza se calculează derivând relația (1.64)

$$v = \dot{s} = R\dot{\theta} = R\omega \quad (1.65)$$

Accelerația se calculează conform relației (1.54)

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= a_\tau \boldsymbol{\tau} + a_v \mathbf{v} = \dot{s} \boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \mathbf{v} \\ a_\tau &= \dot{s} = R\dot{\omega} = R\varepsilon \\ a_v &= \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2 \end{aligned} \quad (1.66)$$

Modulul vectorului accelerație va fi

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_v^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (1.67)$$

Direcția sa dată de unghiul α făcut cu raza vectorie OA este:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_\tau}{a_v} = \frac{R\varepsilon}{R\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (1.68)$$

CINEMATICA CORPULUI SOLID RIGID

Introducere

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

18

Corpul rigid este un element important în mecanică și semnifică un corp material în formă fixă, compus din particule elementare pentru care **distanța dintre oricare două puncte ale sale nu se modifică în timp și în spațiu**. Conceptul de corp rigid are avantajul de a simplifica studiul mișcării corpului în sensul adoptării unui număr finit de parametri care să definească poziția corpului în mișcare.

Mișcarea unui corp este definită ca o schimbare de poziție a corpului în raport cu un reper (sistem de referință).

Mișcarea unui corp față de un sistem de referință este cunoscută, dacă se pot determina legile de mișcare, traiectoria, viteza și accelerația fiecărui punct din corp.

Practic nu este posibil să se descrie mișcarea rigidului prin mișcarea fiecărui punct, dar este suficient să fie cunoscut în fiecare moment al mișcării, numai pozițiile unor puncte din care, pe baza păstrării distanțelor dintre puncte, se vor determina pozițiile celorlalte puncte din rigid. Poziția unui corp rigid față de un anumit reper din spațiul euclidian tridimensional R^3 este cunoscută dacă se cunosc pozițiile a trei puncte necoliniare din rigid.

Numărul minim al funcțiilor scalare independente care determină poziția corpului în orice moment reprezintă numărul gradelor de libertate ale corpului. Funcțiile scalare care determină poziția corpului sunt elemente geometrice (distanțe, unghiuri), funcții de timp.

Legăturile la care este supus un corp (sau sistem de corpuri) micșorează numărul gradelor de libertate.

Mișcarea are loc în spațiu și în timp. Spațiul în care are loc mișcarea este spațiul geometriei euclidiene, infinit, omogen, continuu și izotrop. Timpul măsoară durata mișcării și este infinit, omogen, continuu și ireversibil.

Mișcarea realizată de corp într-un interval finit de timp se numește mișcare finită, iar punctele corpului înregistrează deplasări finite ca mărime.

Mișcarea realizată de corp într-un interval elementar de timp se numește mișcare instantanee, iar punctele corpului înregistrează deplasări elementare.

Mișcarea se raportează la un sistem de axe mobil, legat de corpul în mișcare și un sistem de referință fix.

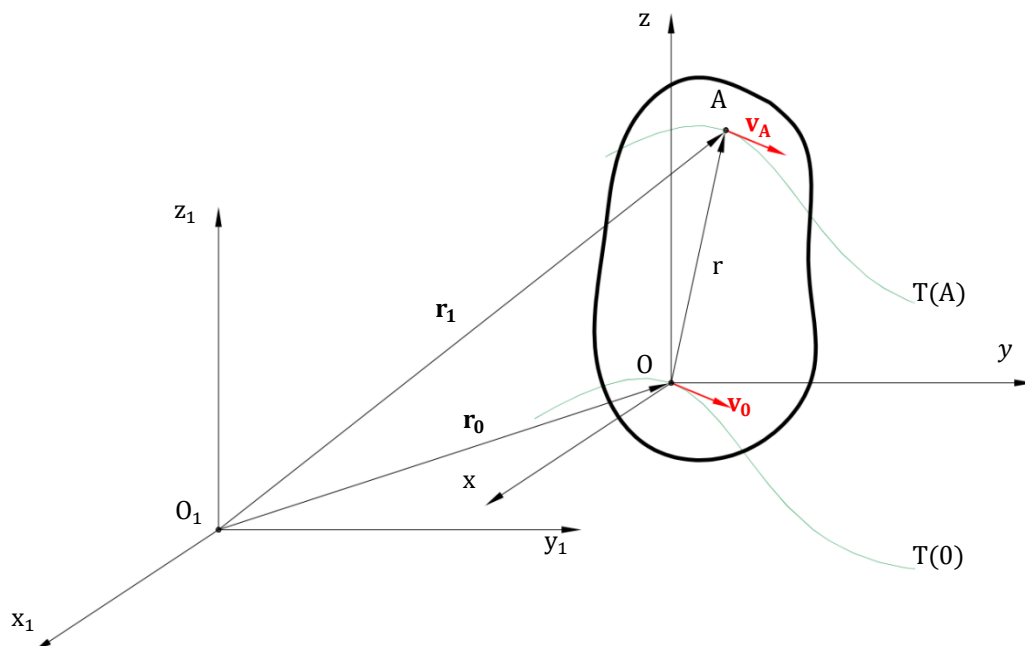
Dacă corpul, în mișcarea sa, poate ocupa orice poziție în spațiu, fără nici o restricție, mișcarea se numește generală, iar în caz contrar se numește mișcare particulară.

Mișcarea de translație

Definiția mișcării

Mișcarea în care orice segment de dreaptă, aparținând corpului rigid, rămâne paralel cu el însuși în tot timpul mișcării se numește **mișcare de translație**.

Mișcarea se raportează la un sistem de referință fix și la un sistem de referință mobil, legat de corpul în mișcare, paralel cu sistemul fix (fig.1.15).



Grade de libertate

Mișcarea de translație a corpului se reduce la o mișcare de punct material astfel încât în această mișcare corpul are 3 grade de libertate cinematică.

Ecuția finită a mișcării de translație este:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t) \quad (1.69)$$

Iar ecuațiile finite scalare sunt:

$$\begin{aligned} x_{10} &= x_{10}(t) \\ y_{10} &= y_{10}(t) \\ z_{10} &= z_{10}(t) \end{aligned} \quad (1.70)$$

Ecuțiile (1.70) exprimă gradele de libertate ale corpului rigid.

Elementele mișcării

- **traectorii**

traectoriile punctelor ce aparțin corpului rigid, în mișcarea de translație sunt curbe paralele(fig.1.15). Mișcarea de translație poate fi rectilinie, dacă traectoriile sunt drepte paralele.

- **viteze**

în orice moment al mișcării se poate scrie:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r} \quad (1.71)$$

În care $\mathbf{r}$ este vectorul de poziție al punctului A (punct oarecare ce aparține corpului) în sistemul de referință fix.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$$

$\mathbf{r}_0$ este vectorul de poziție al punctului O (originea sistemului de referință mobil)

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t)$$

$\mathbf{r}$ este vectorul de poziție al punctului A în sistemul de referință mobil

$\mathbf{r} = \text{constant}$ (fig.1.15)

Viteza punctului A se exprimă prin relația:

$$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}} \quad (1.72)$$

Știind că $\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_0$ relația (1.72) devine

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_0 \quad (\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \text{ deoarece este un vector constant în timpul mișcării}). \quad (1.73)$$

Vitezele tuturor punctelor sunt egale.

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_B = \dots$$

Viteza comună a punctelor de pe corp se numește **viteză de translație**.

Dacă viteza este constantă mișcarea se numește **uniformă**.

Dacă viteza este constantă și traectoriile sunt drepte paralele mișcarea se numește **rectilinie și uniformă**.

- **acelerații**

Accelerația punctului A se exprimă prin relația:

$$\mathbf{a}_A = \ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{v}}_0 \quad (1.74)$$

Știind că $\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_0$ relația (1.74) devine:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 \quad (1.75)$$

Accelerațiile tuturor punctelor sunt egale:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_B = \dots \quad (1.76)$$

Accelerația comună a punctelor de pe corp se numește **acelerație de translație**.

În mișcarea rectilinie și uniformă accelerațiile sunt nule.

Definiția mișcării

Mișcarea în care două puncte (O și O') ale solidului rămân fixe în spațiu în tot timpul mișcării se numește mișcare de rotație în jurul unei axe fixe determinată de cele două puncte. Axa după care are loc mișcarea se numește axa de rotație (fig. 1.16).

Mișcarea se raportează la un sistem de referință fix și la un sistem de axe mobil, care se rotește o dată cu corpul. În fig.1.16 axa de rotație este axa o_1z_1 .

Grade de libertate

În această mișcare corpul are un grad de libertate cinematică (fig.1.16)

Ecuția finită a mișcării de rotație în jurul unei axe fixe este:

$$\theta = \theta(t) \quad (1.77)$$

Ecuția (1.77) exprimă gradul de libertate al corpului rigid.

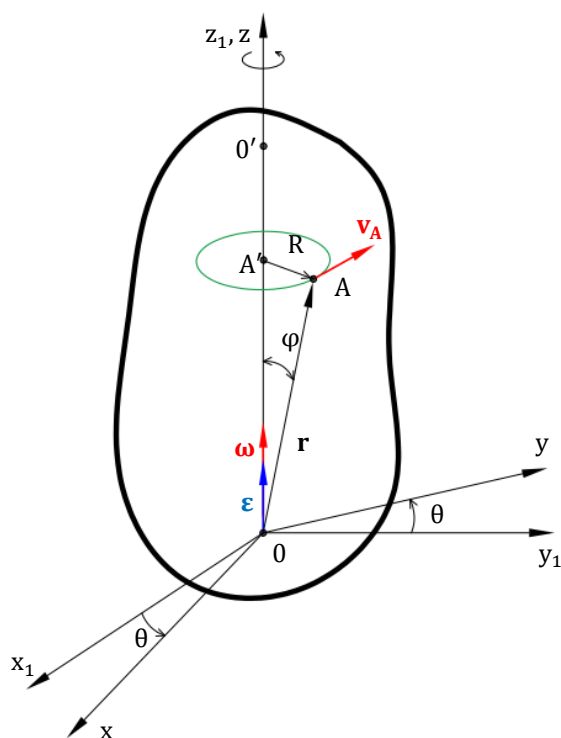


Figura 1.16

Elementele mișcării

Traectorii

Traectoriile punctelor ce aparțin corpului rigid, în mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe sunt cercuri cu centrele pe axa de rotație.

Cercurile care aparțin aceluiași plan sunt concentrice.

Viteze

viteza unghiulară

Viteza cu care se rotește corpul se numește viteză unghiulară ω și reprezintă variația spațiului unghiular

$$\theta = \theta(t) \quad (1.78)$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(t) \quad (1.79)$$

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

21

Vectorul viteză unghiulară este un vector alunecător dirijat după axa de rotație (fig.1.17) astfel încât se poate scrie:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}_1 = \omega \mathbf{k} \quad (1.80)$$

Relația (1.80) este valabilă atunci când axa de rotație este o_1z_1 . viteza liniară

$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ este vectorul de poziție al punctului A (punct oarecare ce aparține corpului) în sistemul de referință fix, iar $\mathbf{r}$ în sistemul de referință mobil.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} = OA \cdot (\sin \varphi \cos \theta \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{j}_1 + \cos \varphi \mathbf{k}_1) \quad (1.81)$$

În relația 1.81.

$$\begin{aligned} \theta &= \theta(t) \\ \varphi &= \text{constant} \\ \mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_1 &= OA \cdot (-\sin \varphi \sin \theta \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \cos \theta \mathbf{j}_1) \cdot \dot{\theta} \end{aligned} \quad (1.82)$$

Dacă

$$\begin{aligned} OA &= r \\ \omega &= \dot{\theta} \end{aligned}$$

Relația (1.82) se scrie:

$$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_1 = r\omega(-\sin \varphi \sin \theta \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \cos \theta \mathbf{j}_1) \quad (1.83)$$

Dacă efectuăm produsul vectorial:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ r \sin \varphi \cos \theta & r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r\omega(-\sin \varphi \sin \theta \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \cos \theta \mathbf{j}_1)$$

Se observă că

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (1.84)$$

componentele scalare ale vectorului viteză liniară

Dacă se scrie

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} = x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1 = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \quad (1.85)$$

Atunci

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = -\omega y_1 \mathbf{i}_1 + \omega x_1 \mathbf{j}_1 \quad (1.86)$$

$$\mathbf{v}_A = v_{x_1} \mathbf{i}_1 + v_{y_1} \mathbf{j}_1 + v_{z_1} \mathbf{k}_1 \quad (1.87)$$

Relațiile (1.83), (1.86) și (1.87) reprezintă expresiile analitice ale vectorului viteză în mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe.

Ținând seama de relațiile (1.86) și (1.87) componentele scalare ale vectorului viteză a punctului A în sistemul de referință fix sunt:

$$\begin{aligned} v_{x_1} &= -\omega y_1 \\ v_{y_1} &= \omega x_1 \\ v_{z_1} &= 0 \end{aligned} \quad (1.88)$$

iar în sistemul de referință mobil sunt:

$$\begin{aligned} v_x &= -\omega y \\ v_y &= \omega x \\ v_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.89)$$

Câmpul vitezelor

Vectorul $\mathbf{v}_A$ este un vector tangent la traiectorie în punctul A (fig.1.16) și este conținut într-un plan perpendicular pe axa de rotație, având același sens cu sensul de rotație al corpului rigid și modulul:

$$|\mathbf{v}_A| = |\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{r}| \sin(\angle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) = \omega R \quad (1.90)$$

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

22

În relația 1.90, r este raza cercului care reprezintă traiectoria punctului A

Modulul vectorului viteză este direct proporțional cu distanța de la punct la axa de rotație. Pe baza relației (1.90) se poate trasa câmpul (diagrama de variație) vitezelor (fig. 1.17).

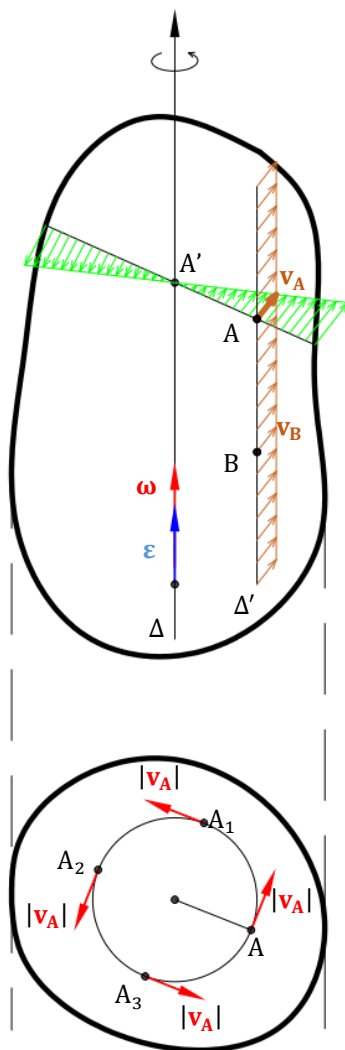


Figura 1.17

Din diagramă se pot deduce proprietățile câmpului vitezelor

- diagrama vitezelor are o variație liniară având valoarea 0 pentru punctele de pe axa de rotație.
- punctele de pe suprafața corpului au vitezele cele mai mari.
- punctele situate pe o dreaptă paralelă la axa de rotație au vitezele egale
- punctele egal depărtate de axa de rotație au vitezele egale în modul

Accelații

Accelația unghiulară

Accelația cu care se rotește corpul se numește accelerație unghiulară ε și reprezintă variația vitezei unghiulare $\omega = \omega(t)$.

$$\varepsilon(t) = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}(t) \quad (1.91)$$

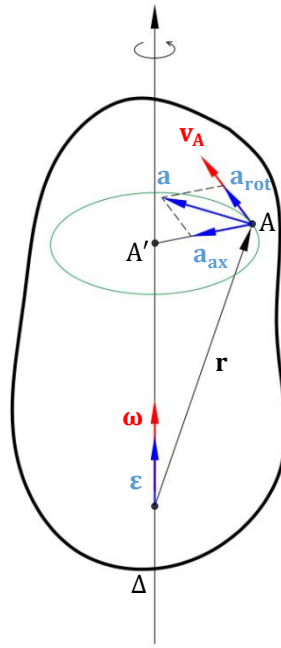


Figura 1.18

Vectorul accelerație unghiulară este un vector alunecător dirijat după axa de rotație astfel (fig 1.18) încât se poate scrie:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon \mathbf{k}_1 = \varepsilon \mathbf{k} \quad (1.92)$$

Relația (1.92) este valabilă atunci când axa de rotație este o_1z_1 .

Accelația liniară

Accelația punctului A se exprimă prin relația:

$$\mathbf{a}_A = \dot{\mathbf{v}}_A = \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times \dot{\mathbf{r}} = \varepsilon \times \mathbf{r} + \omega \times \mathbf{v} = \varepsilon \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \quad (1.93)$$

Accelația unui punct ce aparține solidului are două componente:

(i) accelerația de rotație

$$\mathbf{a}_{rot} = \varepsilon \times \mathbf{r} \quad (1.94)$$

Accelația de rotație este un vector tangent la traiectorie în punctul A și este conținută într-un plan perpendicular pe axa de rotație, având același sens cu sensul de rotație al corpului rigid și modulul:

$$|\mathbf{a}_{rot}| = |\varepsilon| \cdot |\mathbf{r}| \sin(\angle \varepsilon, \mathbf{r}) = \varepsilon R \quad (1.95)$$

(ii) accelerația axipetă

$$\mathbf{a}_{ax} = \omega \times \mathbf{v} = \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \quad (1.96)$$

Componenta $\mathbf{a}_{ax}$ este și ea conținută într-un plan perpendicular pe axa de rotație și este dirijată spre centrul cercului de traiectorie.

$$|\mathbf{a}_{ax}| = |\boldsymbol{\omega}| \cdot |\mathbf{v}| \sin(\angle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) = \omega \cdot v = \omega^2 R \quad (1.97)$$

Componentele $\mathbf{a}_{ax}$ și $\mathbf{a}_{rot}$ sunt perpendiculare.

Accelerația punctului A se mai poate exprima prin relația:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{rot} + \mathbf{a}_{ax} \quad (1.98)$$

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică 24

Componentele scalare ale vectorului accelerație

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A &= \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y_1 & \omega x_1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (-\varepsilon y_1 - \omega^2 x_1) \mathbf{i}_1 + (\varepsilon x_1 - \omega^2 y_1) \mathbf{j}_1 \end{aligned} \quad (1.99)$$

$$\mathbf{a}_A = a_{x_1} \mathbf{i}_1 + a_{y_1} \mathbf{j}_1 + a_{z_1} \mathbf{k}_1 \quad (1.100)$$

Relațiile (1.99) și (1.100) reprezintă expresiile analitice ale vectorului accelerație în mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe.

Ținând seama de relațiile (1.99) și (1.100) componentele scalare ale vectorului accelerație ale punctului A în sistemul de referință fix sunt:

$$\begin{aligned} a_{x_1} &= -\varepsilon y_1 - \omega^2 x_1 \\ a_{y_1} &= \varepsilon x_1 - \omega^2 y_1 \\ a_{z_1} &= 0 \end{aligned} \quad (1.101)$$

iar în sistemul de referință mobil sunt:

$$\begin{aligned} a_x &= -\varepsilon y - \omega^2 x \\ a_y &= \varepsilon x - \omega^2 y \\ a_{z1} &= 0 \end{aligned} \quad (1.102)$$

Câmpul accelerațiilor

Vectorul $\mathbf{a}_A$ este un vector conținut într-un plan perpendicular pe axa de rotație, având același sens cu sensul de rotație al corpului rigid și modulul:

$$|\mathbf{a}_A| = \sqrt{|\mathbf{a}_{rot}|^2 + |\mathbf{a}_{ax}|^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (1.103)$$

Modulul vectorului accelerație este direct proporțional cu distanța de la punct la axa de rotație.

Pe baza relației (1.103) se poate trasa câmpul (diagrama) accelerațiilor (fig.1.19).

Din diagramă se pot deduce proprietățile câmpului accelerațiilor:

- diagrama accelerațiilor are o variație liniară având valoarea 0 pentru punctele de pe axa de rotație.
- punctele de pe suprafața corpului au accelerațiile cele mai mari.
- punctele situate pe o dreaptă paralelă la axa de rotație au accelerațiile egale
- punctele egal depărtate de axa de rotație au accelerațiile egale în modul

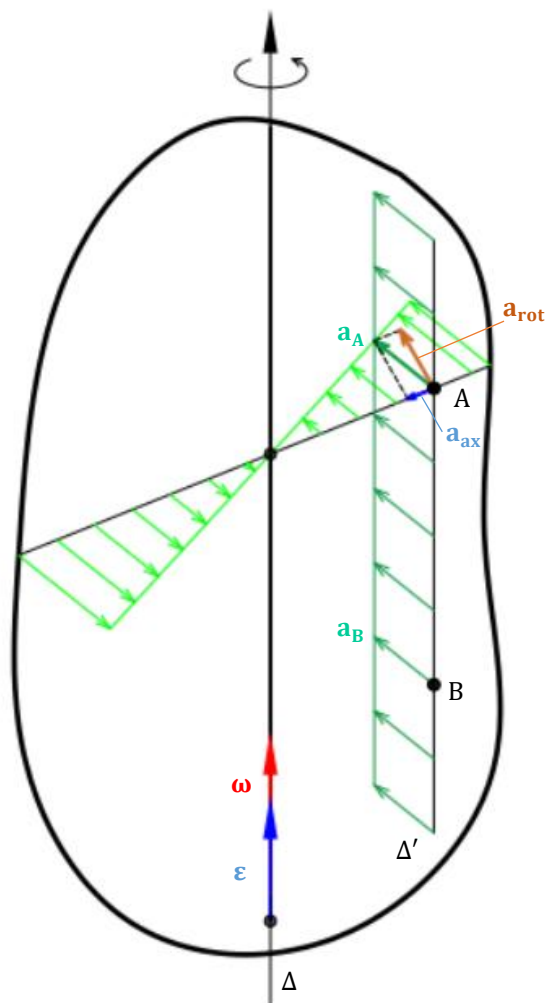


Figura 1.19

Deplasări elementare

Într-un interval de timp elementar dt punctele solidului efectuează deplasări elementare $d\mathbf{r}$. Știind că $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ și $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$ atunci deplasarea elementară:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt \quad (1.104)$$

și rotația elementară

$$d\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega} dt \quad (1.105)$$

Dar $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ și relația (1.104) devine:

$$d\mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})dt = \boldsymbol{\omega} dt \times \mathbf{r} \quad (1.106)$$

Ținând seama de relația (1.105) relația (1.106) devine:

$$d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \quad (1.107)$$

Relația (1.107) reprezintă expresia vectorială a deplasărilor elementare în mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe.

Pe baza relației (1.107) se poate reprezenta câmpul deplasărilor elementare care este asemenea câmpului vectorilor viteze

- Componentele scalare ale vectorului deplasărilor elementare

$$d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & d\theta \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = -y_1 d\theta \mathbf{i}_1 + x_1 d\theta \mathbf{j}_1 \quad (1.108)$$

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

26

$$d\mathbf{r} = dx_1 \mathbf{i}_1 + dy_1 \mathbf{j}_1 + dz_1 \mathbf{k}_1 \quad (1.109)$$

Relațiile (1.108) și (1.109) reprezintă expresiile analitice ale vectorului deplasare elementară în mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe.

Ținând seama de relațiile (1.108) și (1.109) componentele scalare ale vectorului deplasare elementară a punctului A în sistemul de referință fix sunt:

$$\begin{aligned} dx_1 &= -y_1 d\theta \\ dy_1 &= x_1 d\theta \\ dz_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.110)$$

iar în sistemul de referință mobil sunt:

$$\begin{aligned} dx &= -y d\theta \\ dy &= x d\theta \\ dz &= 0 \end{aligned}$$

Mișcarea de rototranslație

Definiția mișcării

Mișcarea în care două puncte ale solidului rămân în tot timpul mișcării pe o dreaptă din spațiu se numește mișcare de rototranslație. Axa după care are loc mișcarea se numește axa de rototranslație.

Mișcarea se raportează la un sistem de referință fix și la un sistem de axe mobil, care se mișcă o dată cu corpul.

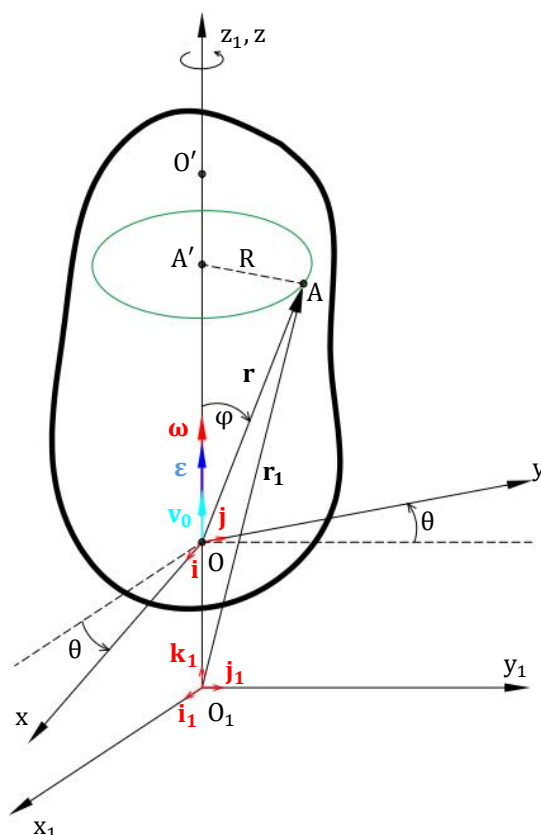


Figura 1.20

În fig.1.20 axa de rototranslație este axa O_1z_1 .

Grade de libertate

În această mișcare corpul are două grade de libertate cinematică.

Mișcarea de rototranslație este compusă dintr-o translație instantanee de-a lungul axei de rototranslație și o rotație instantanee în jurul aceleiași axe.

Ecuatiile finite ale mișcării de rototranslație sunt:

27

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}_0(t) \\ \theta &= \theta(t)\end{aligned}\tag{1.111}$$

Ecuatiile (1.111) sunt ecuațiile finite ale mișcării corpului.

Elementele mișcării

c₁) traiectorii

Traietoriile punctelor ce aparțin corpului rigid, în mișcarea de rototranslație sunt curbe situate pe suprafețe cilindrice circulare. Cercul pe care se afla punctul A reprezintă traiectoria acestuia în mișcarea instantanee de rotație în jurul axei de rototranslație (fig.1.21).

c₂) viteze

viteza unghiulară

Viteza cu care se rotește corpul este viteza unghiulară ω .

Vectorul vitezei unghiulare este un vector alunecător dirijat după axa de rototranslație astfel încât se poate scrie:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}_1 = \omega \mathbf{k}\tag{1.112}$$

Relația (1.112) este valabilă atunci când axa de rototranslație este o_1z_1 .

viteza în mișcarea de rototranslație

$\mathbf{r}_1$ este vectorul de poziție al punctului A (punct oarecare ce aparține corpului) în sistemul de referință fix, iar $\mathbf{r}$ în sistemul de referință mobil (fig. 1.20).

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}\tag{1.113}$$

$$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}\tag{1.114}$$

Dacă $\mathbf{r} = \mathbf{v}_0$ și $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, relația (1.114) se scrie:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (\text{fig. 1.21})\tag{1.115}$$

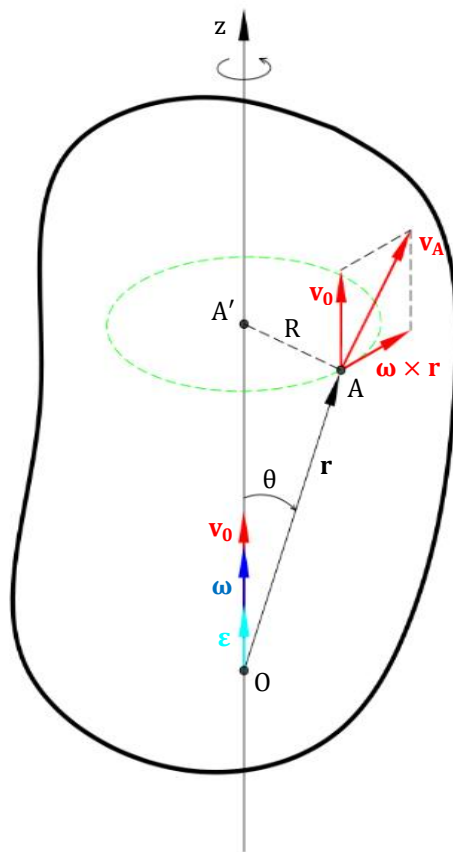


Figura 1.21

componentele scalare ale vectorului viteză

Dacă se scrie:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} = x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1 = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \quad (1.116)$$

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{k}_1 = v_0 \mathbf{k} \quad (1.117)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = -\omega y_1 \mathbf{i}_1 + \omega x_1 \mathbf{j}_1 \quad (1.118)$$

$$\mathbf{v}_A = v_{x_1} \mathbf{i}_1 + v_{y_1} \mathbf{j}_1 + v_{z_1} \mathbf{k}_1 \quad (1.119)$$

Relația (1.119), reprezintă expresia analitică a vectorului viteză în mișcarea de rototranslație

Ținând seama de relațiile (1.117) și (1.118) componentele scalare ale vectorului viteză a punctului A în sistemul de referință fix sunt:

$$\begin{aligned} v_{x_1} &= -\omega y_1 \\ v_{y_1} &= \omega x_1 \\ v_{z_1} &= v_0 \end{aligned} \quad (1.120)$$

câmpul vitezelor

Vectorul $\mathbf{v}_A$ este un vector tangent la traiectorie în punctul A având același sens cu sensul de rotație al corpului rigid și modulul:

$$|\mathbf{v}_A| = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 R^2} \quad (1.121)$$

Unde R este raza cercului care reprezintă traiectoria punctului A în mișcarea instantanee de rotație. proprietățile câmpului vitezelor (fig.1.22)

- nu există puncte de viteză zero pe corp, punctele de viteză minimă sunt punctele de pe axa de rototranslație și au viteza $\mathbf{v}_0$,
- punctele situate pe o dreaptă paralelă la axa de rotație au vitezele egale,
- punctele egal depărtate de axa de rotație au vitezele egale în modul,

Mecanică – Cinematică – Mișcări de rotație și de translație 29

- dacă viteza $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ mișcarea este o mișcare de rotație în jurul axei cu viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega}$,
- dacă viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ mișcarea este o mișcare de translație de-a lungul axei cu viteza $\mathbf{v}_0$.

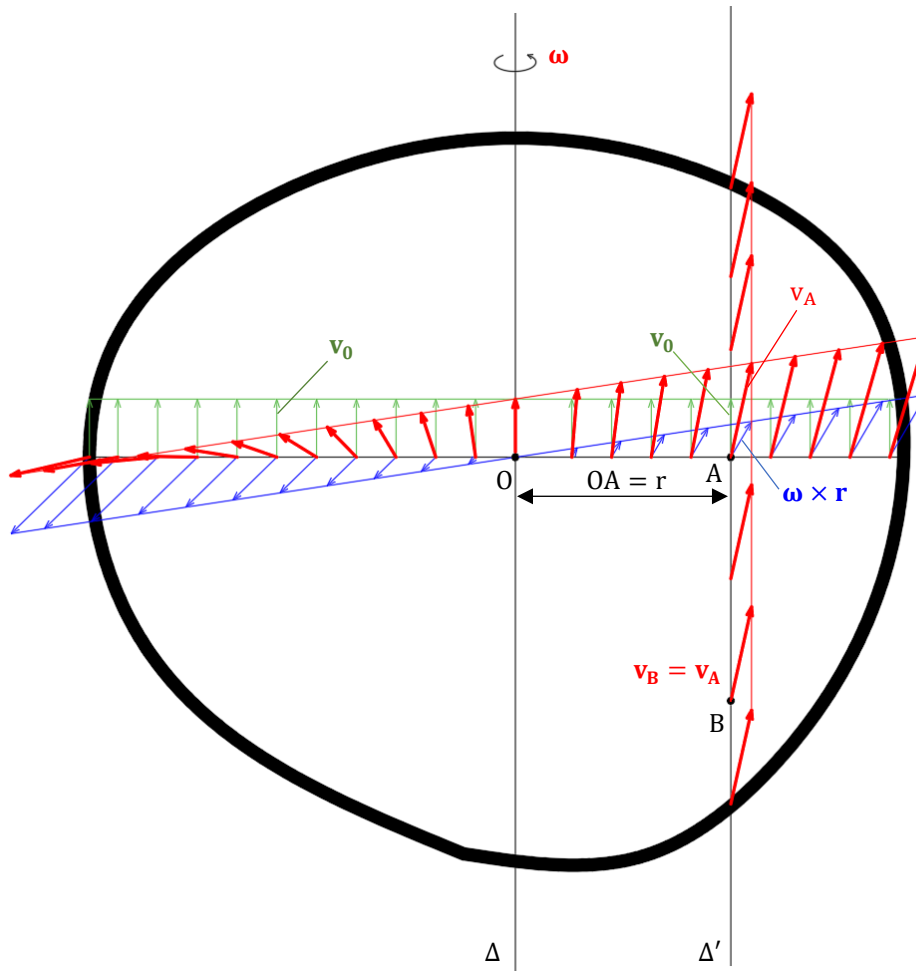


Figura 1.22

c₃) accelerații

Vectorul accelerație unghiulară este un vector alunecător dirijat după axa de rotație astfel încât se poate scrie:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon \mathbf{k}_1 = \varepsilon \mathbf{k} \quad (1.122)$$

Relația (1.122) este valabilă atunci când axa de rotație este o_1z_1 .

accelerația liniară

Accelerația punctului A se exprimă prin relația:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A = \dot{\mathbf{v}}_A &= \dot{\mathbf{v}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \\ &= \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.123)$$

Accelerația unui punct ce aparține solidului are 3 componente (fig.1.23):

- accelerația de translație $\mathbf{a}_0$
- accelerația de rotație

$$\mathbf{a}_{\text{rot}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} \quad (1.124)$$

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

30

$$|\mathbf{a}_{\text{rot}}| = |\boldsymbol{\varepsilon}| \cdot |\mathbf{r}| \cdot \sin(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{r}) = \varepsilon R \quad (1.125)$$

și (iii) accelerația axipetă

$$\mathbf{a}_{\text{ax}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (1.126)$$

$$|\mathbf{a}_{\text{ax}}| = |\boldsymbol{\omega}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin(\angle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) = \omega \cdot R^2 \quad (1.127)$$

Componentele $\mathbf{a}_{\text{ax}}$ și $\mathbf{a}_{\text{rot}}$ sunt perpendiculare.

Accelerația punctului A se mai poate exprima prin relația:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_{\text{rot}} + \mathbf{a}_{\text{ax}} \quad (1.128)$$

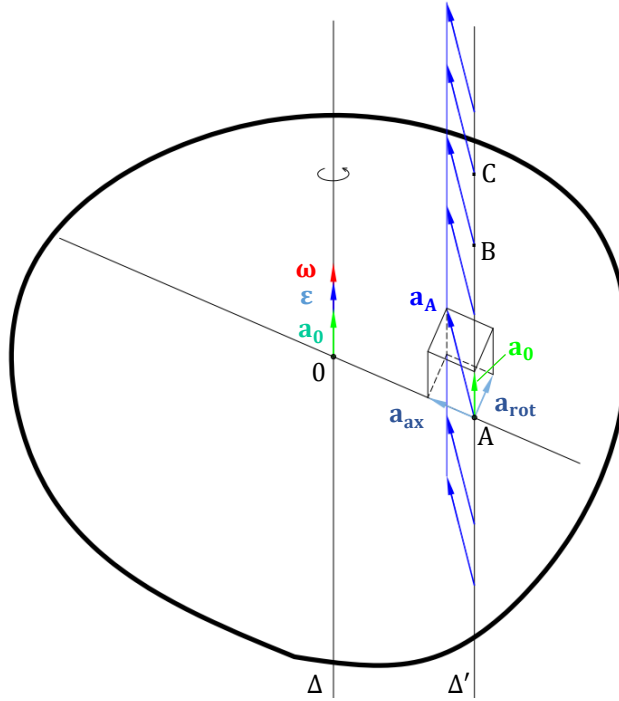


Figura 1.23

Componentele scalare ale vectorului accelerație liniară

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = a_0 \mathbf{k}_1 + \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y_1 & \omega x_1 & 0 \end{vmatrix} = \quad (1.129)$$

$$= (-\varepsilon y_1 - \omega^2 x_1) \mathbf{i}_1 + (\varepsilon x_1 - \omega^2 y_1) \mathbf{j}_1 + a_0 \mathbf{k}_1$$

$$\mathbf{a}_A = a_{x_1} \mathbf{i}_1 + a_{y_1} \mathbf{j}_1 + a_{z_1} \mathbf{k}_1 \quad (1.130)$$

Relațiile (1.129) și (1.130) reprezintă expresiile analitice ale vectorului accelerație în mișcarea de rototranslație. Ținând seama de relația (1.128) componentele scalare ale vectorului accelerație ale punctului A în sistemul de referință fix sunt:

$$\begin{aligned} a_{x_1} &= -\varepsilon y_1 - \omega^2 x_1 \\ a_{y_1} &= \varepsilon x_1 - \omega^2 y_1 \\ a_{z_1} &= a_0 \end{aligned} \quad (1.131)$$

câmpul accelerațiilor

modulul vectorului accelerație

$$|a_A| = \sqrt{a_0^2 + \varepsilon^2 R^2 + \omega^4 R^2} \quad (1.132)$$

Pe baza relațiilor (1.128) (1.132) se poate trasa câmpul (diagrama) accelerațiilor.
Din diagramă se pot deduce proprietățile câmpului accelerațiilor (fig.1.23)

- nu există puncte de accelerație zero pe corp, punctele de accelerație minimă sunt punctele de pe axa de rototranslație și au accelerația a_0
- componentele a_{rot} și a_{ax} se găsesc într-un plan perpendicular pe axa de rototranslație
- într-un plan perpendicular pe axa de rototranslație pentru punctele situate pe o dreaptă variația mărimii accelerației este liniară
- punctele situate pe o dreaptă paralelă la axa de rototranslație au accelerațiile egale
- punctele egal depărtate de axa de rototranslație au accelerațiile egale în modul

Deplasări elementare

Într-un interval de timp elementar dt punctele solidului efectuează deplasări elementare $d\mathbf{r}$

Știind că $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \times \mathbf{r}$ atunci deplasarea elementară:

$$d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}_0 + d\theta \times \mathbf{r} \quad (1.133)$$

componentele scalare ale vectorului deplasărilor elementare

dacă $\mathbf{v}_0 = \alpha \omega$ (mișcarea de șurub) unde α este o constantă atunci:

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \alpha \frac{d\theta}{dt}$$

și

$$d\mathbf{r}_0 = \alpha d\theta$$

sau

$$d\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{k}_1 = \alpha d\theta \cdot \mathbf{k}_1$$

traectoria unui punct oarecare A de pe solidul în mișcare se determină din relațiile:

$$d\mathbf{v} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & d\theta \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = -y_1 d\theta \mathbf{i}_1 + x_1 d\theta \mathbf{j}_1 \quad (1.134)$$

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{i}_1 + dy \mathbf{j}_1 + dz \mathbf{k}_1 \quad (1.135)$$

Relațiile (1.108) și (1.109) reprezintă expresiile analitice ale vectorului deplasare elementară în mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe.

Ținând seama de relațiile (1.108) și (1.109) componentele scalare ale vectorului deplasare elementară a punctului A în sistemul de referință fix sunt:

$$\begin{aligned} dx_1 &= -y_1 d\theta \\ dy_1 &= x_1 d\theta \\ dz_1 &= \alpha d\theta \end{aligned} \quad (1.136)$$

sau

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\theta} &= -y_1 \\ \frac{dy_1}{d\theta} &= x_1 \\ \frac{dz_1}{d\theta} &= 0\end{aligned}\tag{1.137}$$

Rezolvând sistemul de ecuații diferențiale (1.137), rezultă:

$$\begin{aligned}x_1 &= a \sin(\theta + \beta) \\ y_1 &= a \cos(\theta + \beta) \\ z_1 &= \alpha\theta + z_0\end{aligned}\tag{1.138}$$

Relația (1.138) reprezintă ecuațiile parametrice ale elicei circulare drepte cu pas constant.

Mișcarea plan paralelă (mișcarea plană)

Definiția mișcării

Mișcarea în care distanța, de la orice punct al solidului până la un plan fix din spațiu, rămâne constantă în tot timpul mișcării se numește mișcare plan paralelă sau mișcarea plană. (fig.1.24)

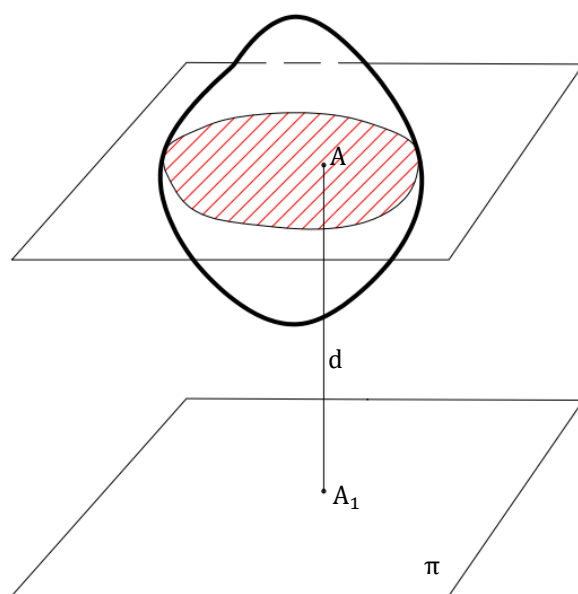


Figura 1.24

Mișcarea se raportează la un sistem de referință fix și la un sistem de referință mobil, care se mișcă o dată cu corpul (fig.1.25).

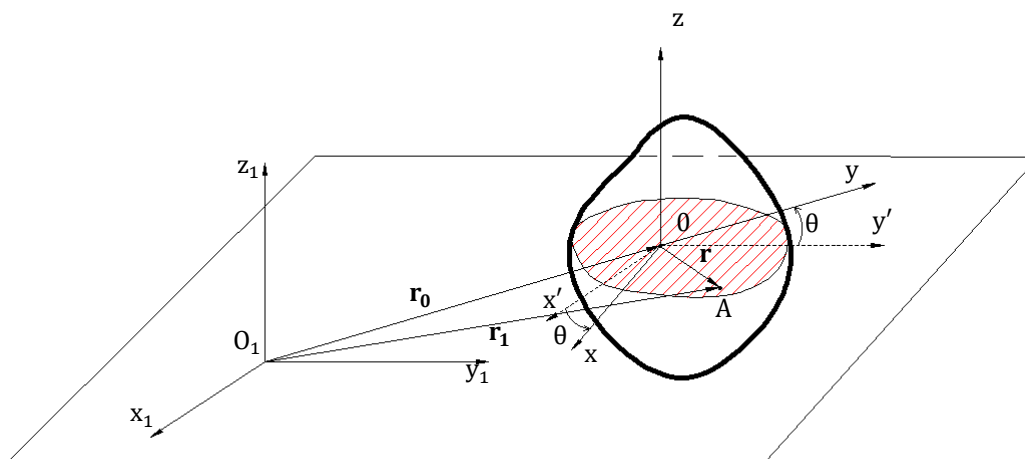


Figura 1.25

Din definiția mișcării rezultă proprietățile mișcării

- (i) toate punctele ce aparțin corpului situate pe o dreaptă normală la planul fix execută mișcări identice
- (ii) toate punctele ce aparțin corpului situate în plane paralele cu planul fix execută mișcări identice. Pentru a studia mișcarea solidului, este suficient să se studieze mișcarea unui plan ce aparține corpului, paralel cu planul fix.

Grade de libertate

În această mișcare corpul are 3 grade de libertate cinematică

Mișcarea plană este compusă dintr-o translație instantanee într-un plan paralel cu planul fix (în fig.1.25 planul $x_{10}y_{10}$) și o rotație instantanee în jurul unei axe perpendiculară pe planul fix (oz)

În continuare se studiază mișcarea unui plan mobil al solidului din planul xOy , în planul fix $x_{10}y_{10}$, adică mișcarea unei plăci mobile pe o placă fixă.

Ecuatiile finite ale mișcării plane sunt:

$$\begin{aligned} x_{10} &= x_{10}(t) \\ y_{10} &= y_{10}(t) \\ \theta &= \theta(t) \end{aligned} \quad (1.139)$$

Ecuatiile (1.139) exprimă gradele de libertate al corpului rigid în mișcarea plană

Elementele mișcării

• Traectorii

trajectoriile punctelor ce aparțin corpului rigid, în mișcarea plană sunt curbe situate în plane paralele cu planul fix.

• Viteze

viteza unghiulară

viteza cu care se rotește corpul în jurul unei axe perpendiculară pe planul mișcării este viteza unghiulară ω .

Vectorul vitezei unghiulare este un vector dirijat după axa de rotație astfel încât se poate scrie:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}_1 = \omega \mathbf{k} \quad (1.140)$$

Relația (1.140) este valabilă atunci când axa de rotație este oz .

Viteza unghiulară ω este aceeași indiferent în ce punct se alege polul O .

viteza în mișcarea plană

$\mathbf{r}_1$ este vectorul de poziție al punctului A (punct oarecare ce aparține corpului) în sistemul de referință fix, iar $\mathbf{r}$ în sistemul de referință mobil.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r} \quad (1.141)$$

$$\mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}} \quad (1.142)$$

Dacă

$\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_0$ este viteza polului O și $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

Relația (1.142) se scrie

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (\text{fig 1.26}) \quad (1.143)$$

Sau Mecanica – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

34

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{A(0)} \quad (1.144)$$

unde $\mathbf{v}_{A(0)}$ reprezintă viteza corpului în mișcarea sa în raport cu punctul O.

Relația (1.144) reprezintă formula lui Euler pentru viteze în mișcarea plană.

Axele sistemului de referință $x'Oy'$ sunt paralele cu axele sistemului fix de referință.

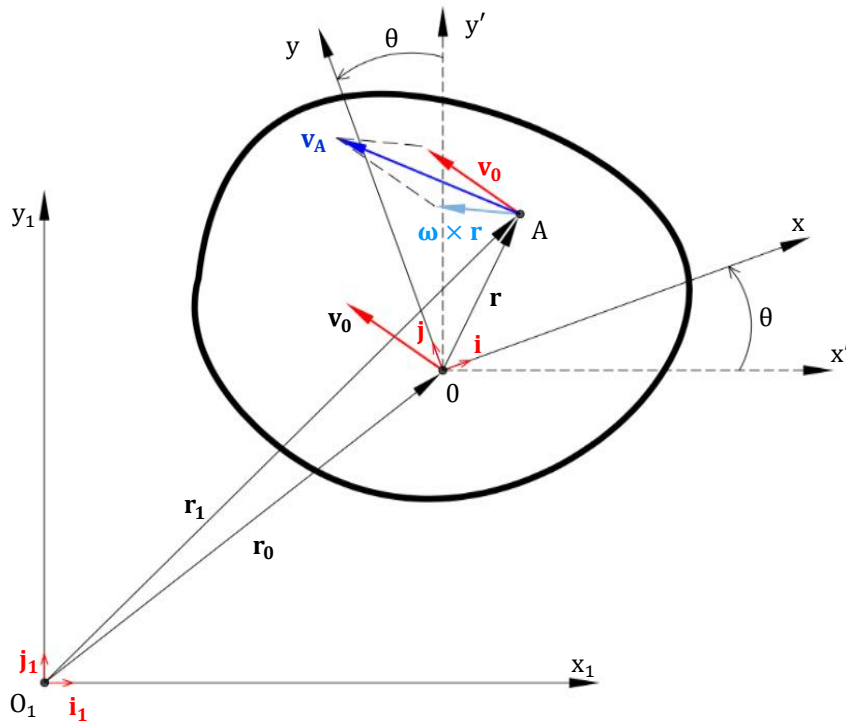


Figura 1.26

componentele scalare ale vectorului viteză

Dacă $x'oy'$ este sistemul de axe paralele cu axele din sistemul fix vectorul $\mathbf{r}$ se scrie

$$\mathbf{r} = x' \mathbf{i}_1 + y' \mathbf{j}_1 \quad (1.145)$$

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x_1} \mathbf{i}_1 + v_{0y_1} \mathbf{j}_1 \quad (1.146)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ x' & y' & 0 \end{vmatrix} = -\omega y' \mathbf{i}_1 + \omega x' \mathbf{j}_1 \quad (1.147)$$

$$\mathbf{v}_A = v_x \mathbf{i}_1 + v_y \mathbf{j}_1 \quad (1.148)$$

Relația (1.148), reprezintă expresia analitică a vectorului viteză în mișcarea plană Ținând seama de relațiile (1.146),(1.147) și (1.148), componentele scalare ale vectorului viteză a punctului A în sistemul de referință fix sunt:

$$\begin{aligned} v_{x_1} &= v_{0x_1} - \omega y' \\ v_{y_1} &= v_{0y_1} + \omega x' \end{aligned} \quad (1.149)$$

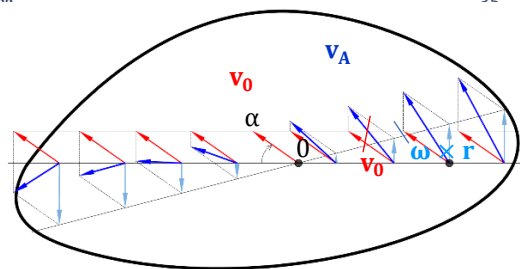
x' și y' sunt componentele scalare ale vectorului $\mathbf{r}$ în sistemul de referință fix.

Viteza punctului A $\mathbf{v}_A$ este aceeași indiferent în ce punct se alege polul O.

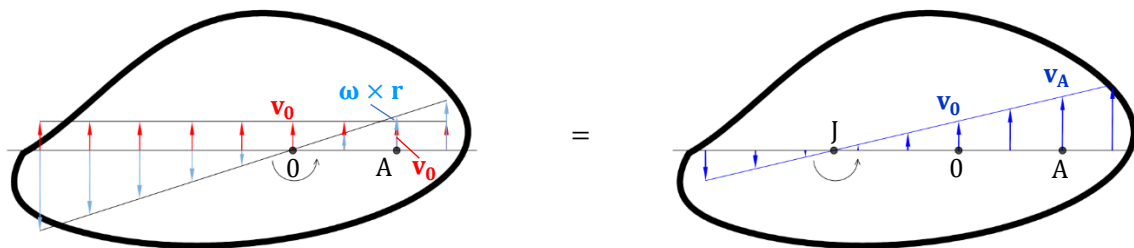
câmpul vitezelor

Câmpul vitezelor se poate genera pe baza relației (1.143) (fig.1.27) Vectorul $\mathbf{v}_A$ este un vector tangent la traiectorie în punctul A.

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică



a)



b)

Figura 1.27

În figura 1.27 se prezintă două cazuri:

- vectorul viteză $\mathbf{v}_0$ face un unghi $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ cu segmentul de dreaptă pe care se găsește punctul A.
- vectorul viteză $\mathbf{v}_0$ face un unghi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ cu segmentul de dreaptă pe care se găsește punctul A.

proprietățile câmpului vitezelor (fig.1.27)

- câmpul vectorilor viteză se obține prin însumarea câmpului constant de viteze $\vec{v}_0$ din mișcarea de translație cu cel al vectorilor $\vec{\omega} \times \vec{r}$ din mișcarea de rotație (fig.1.27 a)
- câmpul vectorilor viteză $\vec{\omega} \times \vec{r}$ din mișcarea de rotație având o variație liniară atunci și câmpul vectorilor viteză din mișcarea plană are o variație liniară
- în mișcarea plană viteza unghiulară ω este aceeași pentru toate punctele plăcii mobile
- dacă se studiază variația vectorilor viteză pe o dreaptă perpendiculară pe vectorul viteză $\vec{v}_0$ se observă că cele două componente ale vectorului viteză $\vec{v}$, $\vec{v}_0$ și $\vec{\omega} \times \vec{r}$ sunt coliniare având același sens sau sensuri contrarii (fig.1.27 b)
- punctul în care cele două componente ale vectorului viteză $\vec{v}$, $\vec{v}_0$ și $\vec{\omega} \times \vec{r}$ sunt egale și de sensuri contrarii are viteza egală cu 0
- acest punct se notează cu J și se numește **centru instantaneu de rotație** (CIR) sau **polul vitezelor** și se găsește în placa mobilă pe dreapta perpendiculară pe $\vec{v}_0$
- dacă mișcarea se raportează la punctul J, viteza punctului A se scrie conform relației (1.143). $\vec{v}_A = \vec{v}_J + \vec{\omega} \times \vec{JA}$, dar $\vec{v}_J = \vec{0}$ iar:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{JA} \quad (\text{fig. 1.29}) \quad (1.150)$$

- studiind distribuția vitezelor după relația (1.150) se observă că distribuția instantanee a vitezelor este identică cu cea a unei rotații în jurul punctului J, cu viteza unghiulară ω ca și cum punctul J ar fi fix.

Determinarea poziției centrului instantaneu de rotație (CIR)

Poziția CIR se poate determina pe cale analitică sau pe cale grafică

- analitic

se determină vectorul de poziție al punctului J în cele două sisteme de referință mobil și fix (fig.1.28)

Se scrie expresia vitezei CIR conform relației (1.143)

$$\vec{v}_J = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{OJ} = \vec{0} \quad (1.151)$$

Dacă se notează $\vec{OJ} = \vec{r}_J$,

Relația (1.150) devine

$$\vec{v}_J = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_J = \vec{0} \quad (1.152)$$

Se înmulțește relația (1.152) la stânga cu vectorul $\vec{\omega}$ și se obține:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_J) = \vec{0} \quad (1.153)$$

Ținând seama de formula dublului produs vectorial relația (1.153) devine

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_0 + (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_J)\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{r}_J = \vec{0} \quad (1.154)$$

Deoarece $\vec{\omega} \perp \vec{r}_J$, produsul scalar $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_J = 0$ și, deoarece $\vec{\omega} \cdot \vec{\omega} = \omega^2$ relația (1.154) devine:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_0 - \omega^2 \vec{r}_J = \vec{0}, \text{ iar}$$

$$\vec{r}_J = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_0}{\omega^2} \quad (1.155)$$

ceea ce reprezintă vectorul de poziție al CIR în sistemul de axe mobil, în raport cu punctul O.

$$\vec{r}_{1J} = \vec{r}_0 + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_0}{\omega^2} \quad (1.156)$$

ceea ce reprezintă vectorul de poziție al CIR în sistemul de axe fix este conform fig. 1.28

Dacă

$$\mathbf{r}_J = x_J \mathbf{i} + y_J \mathbf{j}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$$

iar

$$\mathbf{V}_0 = v_{0x} \mathbf{i} + v_{0y} \mathbf{j} \quad \text{Mecanică – Cinematica, dinamica și mecanică analitică}$$

37

(1.157)

Atunci relația (1.155), se scrie

$$x_J \mathbf{i} + y_J \mathbf{j} = \frac{1}{\omega^2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_{0x} & v_{0y} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{v_{0y}}{\omega} \mathbf{i} + \frac{v_{0x}}{\omega} \mathbf{j} \quad (1.158)$$

Din relația rezultă coordonatele CIR în sistemul de referință mobil

$$\begin{aligned} x_J &= -\frac{v_{0y}}{\omega} \\ y_J &= \frac{v_{0x}}{\omega} \end{aligned} \quad (1.159)$$

Coordonatele CIR în sistemul de referință fix sunt

$$\begin{aligned} x_{1J} &= x_{1,0} - \frac{v_{0y}}{\omega} \\ y_{1J} &= y_{1,0} + \frac{v_{0x}}{\omega} \end{aligned} \quad \text{(fig 1.28)} \quad (1.160)$$

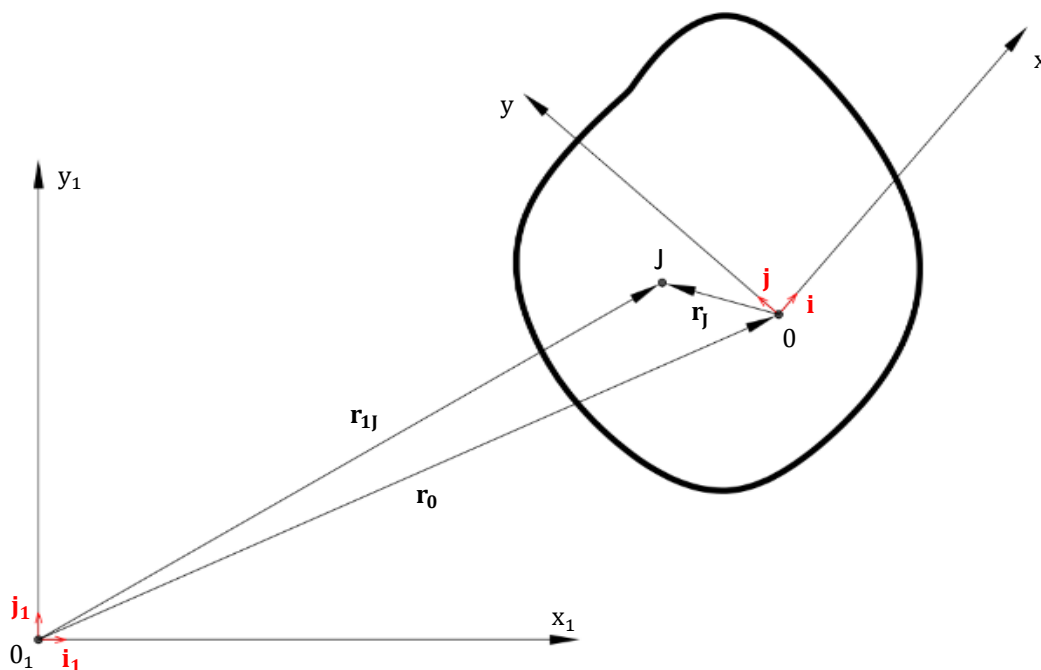


Figura 1.28

- grafic (geometric) (fig.1.29)

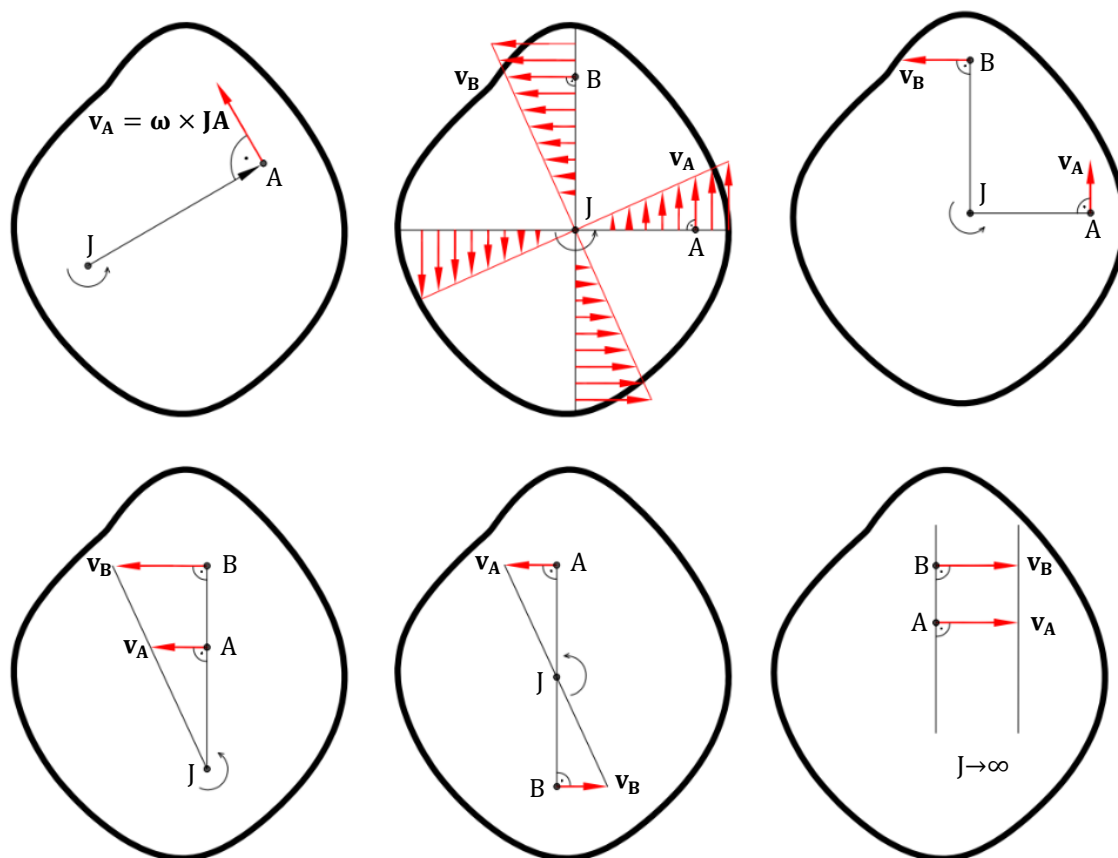


Figura 1.29

Se observă din fig 1.29. că vitezele v_A și v_B sunt perpendiculare pe direcțiile JA și JB . Din această observație rezultă că CIR se află la intersecția perpendicularelor pe vectorii vitezelor a două puncte de pe placa mobilă (fig 1.29).

Dacă vectorii viteze ai celor două puncte A și B sunt paraleli CIR se află la intersecția dintre perpendiculara comună a celor doi vectori și dreapta care unește vârfurile celor doi vectori (fig1.29).

Dacă vectorii viteze ale celor două puncte sunt egali atunci CIR se află la infinit iar corpul execută o mișcare de translație.

Traectoriile CIR

Coordonatele CIR în cele două sisteme de referință sunt funcții de timp. Locul geometric al pozițiilor succesive ale CIR (traectoria) este o curbă care se mișcă împreună cu planul mobil și se numește **centroidă mobilă sau rostogolitoare** (fig.1.30).

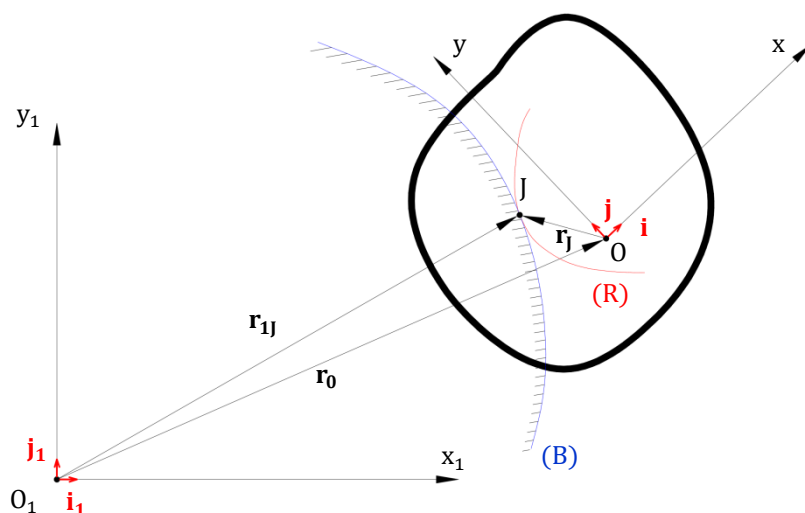


Figura 1.30

Dacă se elimină parametrul timp din relațiile (1.159) se obține ecuația rostogolitoarei de forma $\Phi(x, y) = 0$.

Locul geometric al pozițiilor succesive ale CIR (traectoria) în raport cu sistemul fix este o curbă fixă care se numește **centroidă fixă sau bază**.

Dacă se elimină parametrul timp din relațiile (1.160) se obține ecuația bazei de forma: $\Phi_1(x_1, y_1) = 0$.

Baza și rostogolitoarea sunt două curbe plane tangente în CIR. Curba plană- rostogolitoarea se rostogolește peste cea fixă – baza, în timpul mișcării solidului. (fig.1.30)

Acceleerații

Acceleerația de rotație a corpului este acceleerația unghiulară ε .

Vectorul acceleerație unghiulară este un vector dirijat după axa de rotație astfel încât se poate scrie:

$$\varepsilon = \varepsilon \mathbf{k}_1 = \varepsilon \mathbf{k} \quad (1.161)$$

Relația (1.161) este valabilă atunci când axa de rotație este o_1z_1 .

Acceleerația unui punct oarecare de pe placa mobilă

Acceleerația punctului A se exprimă prin relația:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A = \dot{\mathbf{v}}_A = \dot{\mathbf{v}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{a}_0 + \varepsilon \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \\ &= \mathbf{a}_0 + \varepsilon \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{fig. 1.31}) \quad (1.162)$$

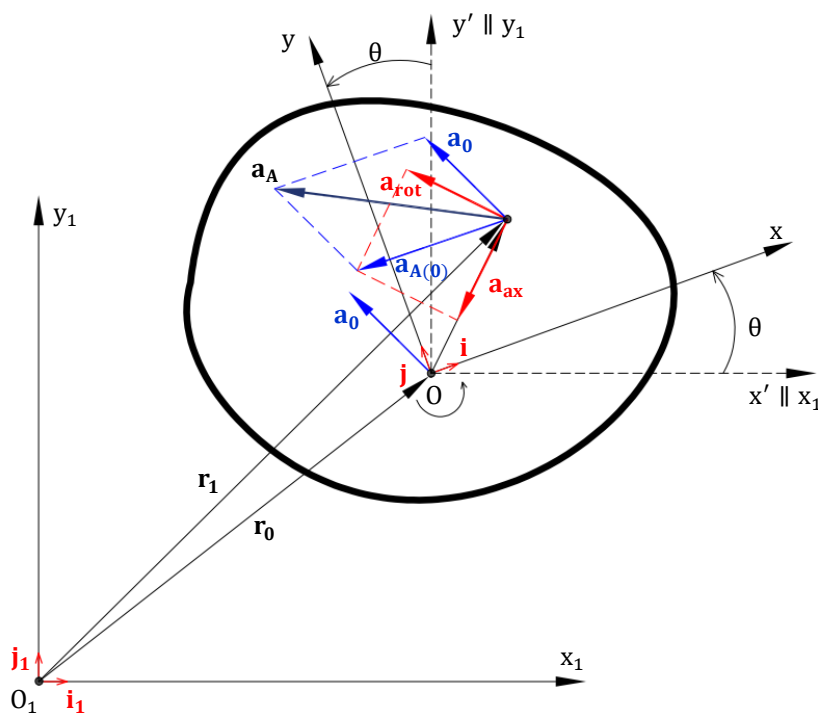


Figura 1.31

Acceleerația unui punct ce aparține solidului are 3 componente:

- acceleerația de translație $\mathbf{a}_0$
- acceleerația de rotație

$$\mathbf{a}_{\text{rot}} = \varepsilon \times \mathbf{r} \quad (1.124)$$

- accelerația axipetă

$$\mathbf{a}_{ax} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (1.163)$$

Componentele $\mathbf{a}_{ax}$ și $\mathbf{a}_{rot}$ sunt perpendiculare.

Accelerația punctului A se mai poate exprima prin relația:

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

40

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_{rot} + \mathbf{a}_{ax} \quad (1.164)$$

sau

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_{A(0)} \quad (1.165)$$

$$\mathbf{a}_{rot} + \mathbf{a}_{ax} = \mathbf{a}_{A(0)} \quad (1.166)$$

reprezintă accelerația corpului în mișcarea sa în raport cu punctul O.

Relația (1.165) reprezintă formula lui Euler pentru accelerații.

Componentele scalare ale vectorului accelerație

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} &= a_{0x_1} \mathbf{i}_1 + a_{0y_1} \mathbf{j}_1 + \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x' & y' & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y' & \omega x' & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (a_{0x_1} - \varepsilon y' - \omega^2 x') \mathbf{i}_1 + (a_{0y_1} + \varepsilon x' - \omega^2 y') \mathbf{j}_1 \end{aligned} \quad (1.167)$$

Relația (1.167) reprezintă expresia analitică a vectorului accelerație în mișcarea plană.

Dar,

$$\mathbf{a}_A = a_{x_1} \mathbf{i}_1 + a_{y_1} \mathbf{j}_1 \quad (1.168)$$

Ținând seama de relația (1.167) și (1.168), componentele scalare ale vectorului accelerație ale punctului A în sistemul de referință fix sunt:

$$\begin{aligned} a_{x_1} &= a_{0x_1} - \varepsilon y' - \omega^2 x' \\ a_{y_1} &= a_{0y_1} + \varepsilon x' - \omega^2 y' \end{aligned} \quad (1.169)$$

Componentele scalare ale vectorului accelerație ale punctului A în sistemul de referință mobil sunt:

$$\begin{aligned} a_x &= a_{0x} - \varepsilon y - \omega^2 x \\ a_y &= a_{0y} + \varepsilon x - \omega^2 y \end{aligned} \quad (1.170)$$

Câmpul accelerațiilor din mișcarea plană se obține compunând câmpul vectorilor accelerație dintr-o mișcare de translație cu accelerația $\mathbf{a}_0$ cu câmpul vectorilor accelerație dintr-o mișcare de rotație în jurul unei axe ce trece prin punctului O.

Distribuția vectorilor accelerație ai punctele situate pe o dreaptă care trece prin O este liniară.

Există un punct pe placa mobilă a cărui accelerație este egală cu 0 la un moment dat al mișcării. Acest punct se numește **polul accelerațiilor** se notează cu P. Coordonatele punctului P se determina din relațiile 1.169 și 1.170 punând condiția pentru componentele vectorului accelerație a punctului P în cele două sisteme de referință sa fie nule.

$$\begin{aligned} a_{0x_1} - \varepsilon y'_P - \omega^2 x'_P &= 0 \\ a_{0y_1} - \varepsilon x'_P - \omega^2 y'_P &= 0 \end{aligned} \quad (1.171)$$

$$\begin{aligned} a_{0x} - \varepsilon y_P - \omega^2 x_P &= 0 \\ a_{0y} - \varepsilon x_P - \omega^2 y_P &= 0 \end{aligned} \quad (1.172)$$

Distribuția vectorilor accelerație, ținând seama de polul P este data în fig.1.32

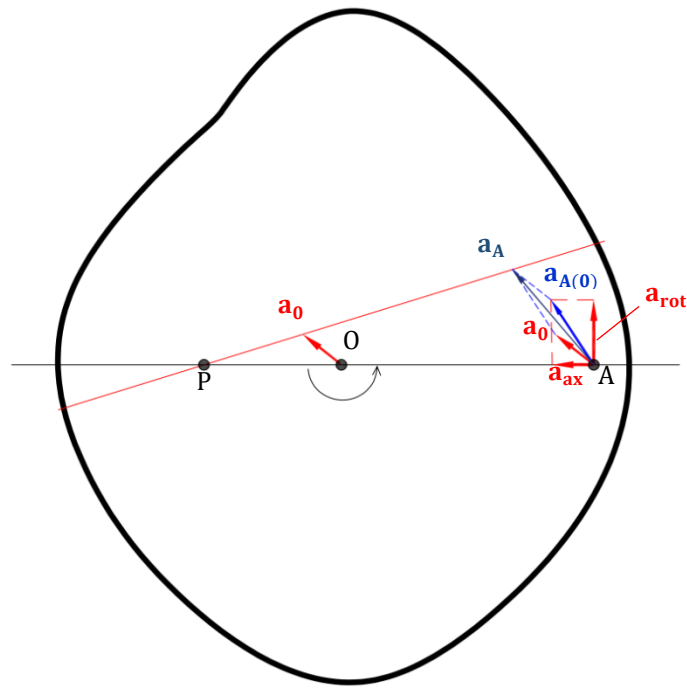


Figura 1.32

Deplasări elementare

Câmpul deplasărilor elementare se poate reprezenta în două moduri diferite

(i) mișcarea se raportează la un pol oarecare O din plan

Într-un interval de timp elementar dt punctele solidului efectuează deplasări elementare $d\mathbf{r}$

Știind că $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \times \mathbf{r}$ atunci deplasarea elementară:

$$d\mathbf{r}_A = d\mathbf{r}_0 + d\theta \times \mathbf{r} \quad (1.173)$$

Câmpul vectorilor deplasărilor elementare se obține compunând câmpul deplasărilor elementare $d\mathbf{r}_0$ dintr-o mișcare de translație cu câmpul rotațiilor elementare $d\theta$ în jurul punctului O. (fig.1.33)

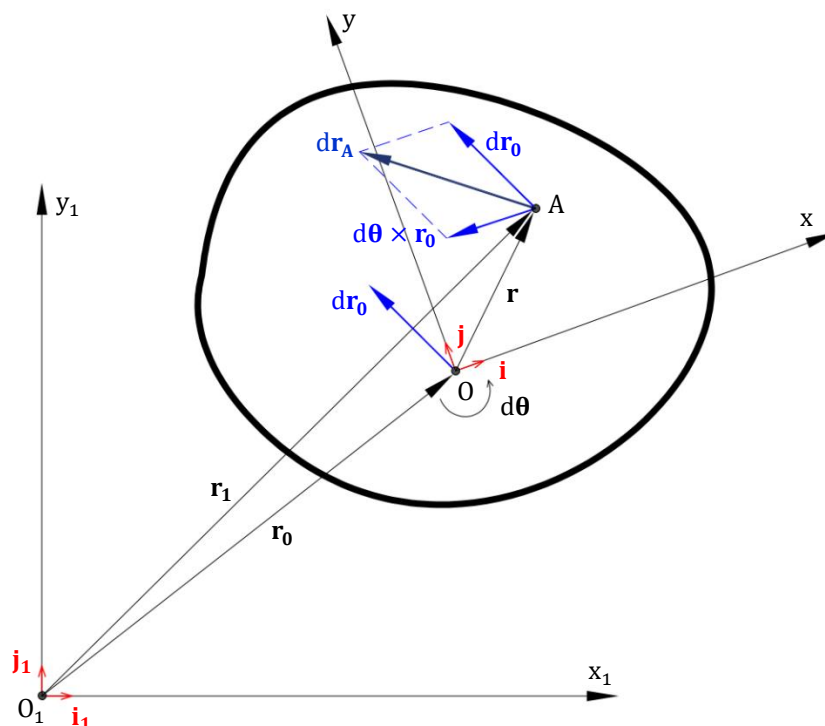


Figura 1.33

(ii) mișcarea se raportează la centrul instantaneu de rotație J

Câmpul vectorilor deplasări elementare se obține din câmpul rotațiilor elementare $d\theta$ în jurul punctului J (fig.1.34).

$$d\mathbf{r} = d\theta \times \mathbf{J}\mathbf{A}$$

Relația (1.174) se folosește pentru reprezentările deplasărilor elementare simple denumite și diagrame de deplasări (fig.1.35).

Dacă se alege un reper cu originea în J și cu axele J_x și J_y din relația (1.174), rezultă:

$$dx \mathbf{i}_1 + dy \mathbf{j}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & d\theta \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -y d\theta \mathbf{i} + x d\theta \mathbf{j}$$

sau

$$\begin{aligned} dx &= -y d\theta \\ dy &= x d\theta \end{aligned} \quad (1.175)$$

Deplasările elementare dx și dy variază liniar cu y și x .

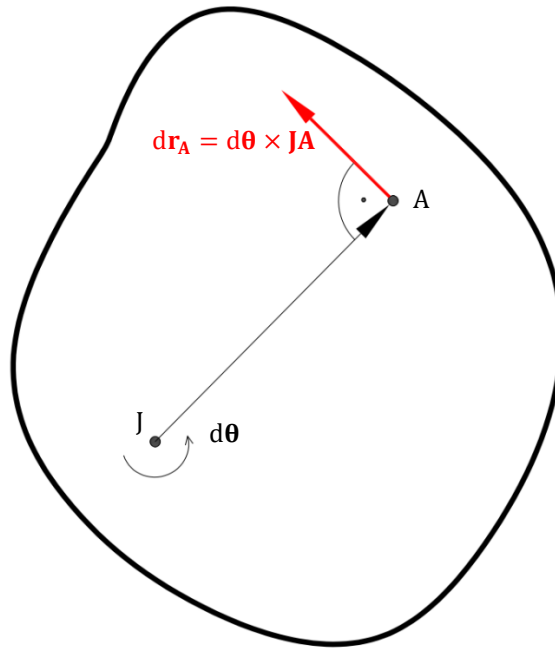


Figura 1.34

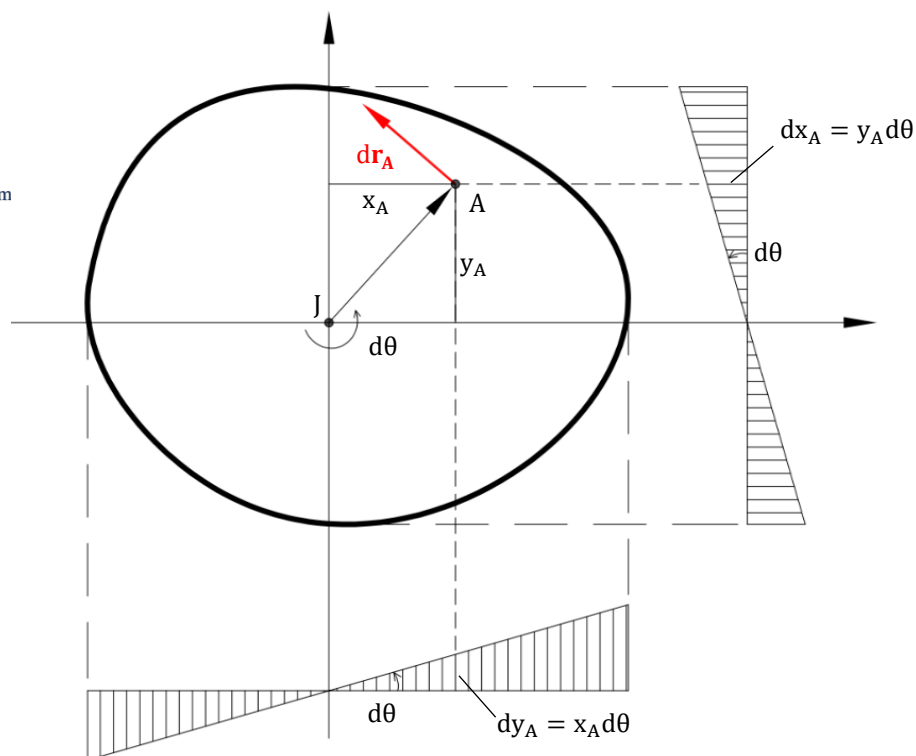


Figura 1.35

Mișcarea plan-paralelă a sistemelor de plăci

Mișcarea plan-paralelă a două plăci

Mișcarea fiecărei plăci se poate realiza prin mișcări de pură rotație în jurul centrelor de rotație J_1 și J_2 ale celor două plăci cu viteze unghiulare ω_1 și ω_2 (fig.1.36).

Punctele J_1 și J_2 sunt puncte cu viteza nulă în raport cu cele două sisteme de referință și se numesc *centre absolute de rotație*. Punctul comun celor două plăci care are vitezele egale atât pe o placă cât și pe cealaltă (are viteza relativă nulă) se numește centru relativ de rotație J_{12}

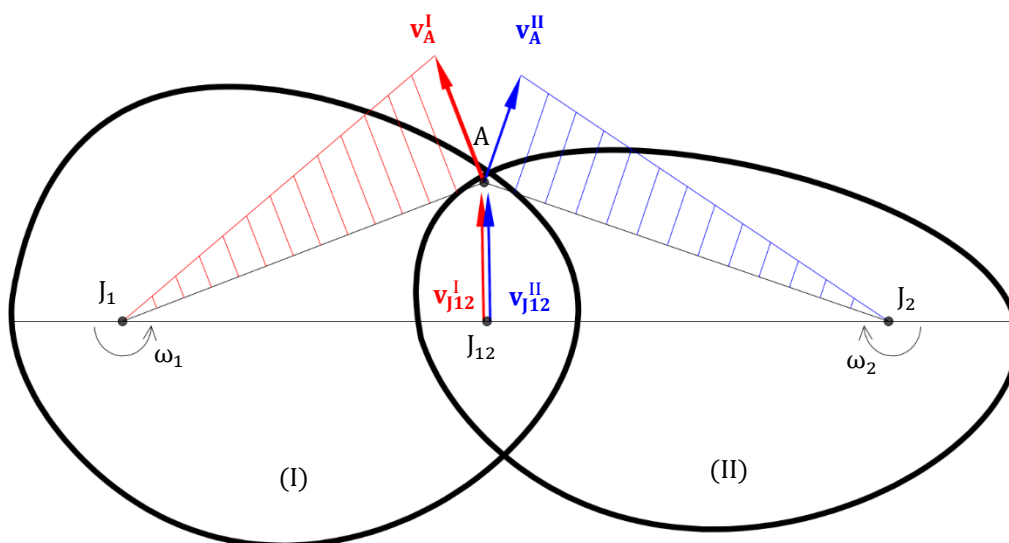


Figura 1.36

Distribuția vitezelor pentru fiecare placă este arătată în figura 1.36. Aceeași distribuție este și pentru deplasările elementare $d\mathbf{r}$.

În punctul J_{12} vitezele celor două plăci sunt egale:

$$\mathbf{v}_{J_{12}}^I = \mathbf{v}_{J_{12}}^{II} \quad (1.176)$$

deci și modulele celor doi vectori sunt egale:

$$\begin{aligned} v_{J_{12}}^I &= \omega_1 J_1 J_{12} \\ v_{J_{12}}^{II} &= \omega_2 J_2 J_{12} \\ \omega_1 J_1 J_{12} &= \omega_2 J_2 J_{12} \end{aligned} \quad (1.177)$$

Din relația 1.177 rezultă:

$$\frac{J_1 J_{12}}{J_2 J_{12}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (1.178)$$

Relația 1.178 reprezintă prima teorema a centrelor instantanee de rotație care se enunță astfel:

În mișcarea plan-paralelă a două plăci centrele absolute de rotație J_1 și J_2 sunt coliniare cu centrul relativ de rotație J_{12} .

Centrul relativ de rotație J_{12} împarte segmentul de dreaptă $J_1 J_2$ în părți invers proporționale cu mărimile vitezelor unghiulare ω_1 și ω_2 .

Dacă vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 au sensuri contrarii centrul J_{12} se găsește în interiorul segmentului, $J_1 J_2$ în caz contrar J_{12} se găsește în exteriorul segmentului $J_1 J_2$ de partea centrului cu viteza unghiulară mai mare.

Mișcarea plan-paralelă a trei plăci

Mișcarea fiecărei plăci se realizează ca o mișcare de pură rotație în jurul centrelor lor absolute de rotație (J_1 , J_2 , J_3). Fiecare pereche de plăci determină câte un centru relativ de rotație (J_{12} , J_{13} , J_{23}) (fig.1.37)

Din prima teorema aplicată perechilor de plăci rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{J_1 J_{12}}{J_2 J_{12}} &= \frac{\omega_2}{\omega_1} \\ \frac{J_2 J_{23}}{J_3 J_{23}} &= \frac{\omega_3}{\omega_2} \\ \frac{J_3 J_{13}}{J_1 J_{13}} &= \frac{\omega_1}{\omega_3} \end{aligned}$$

Înmulțind cele trei relații membru cu membru rezultă:

$$\frac{J_1 J_{12}}{J_2 J_{12}} \cdot \frac{J_2 J_{23}}{J_3 J_{23}} \cdot \frac{J_3 J_{13}}{J_1 J_{13}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_3} = 1 \quad (1.179)$$

Conform teoremei lui Menelaus în triunghiul J_1 , J_2 , J_3 cele trei puncte J_{12} , J_{13} , J_{23} sunt coliniare.

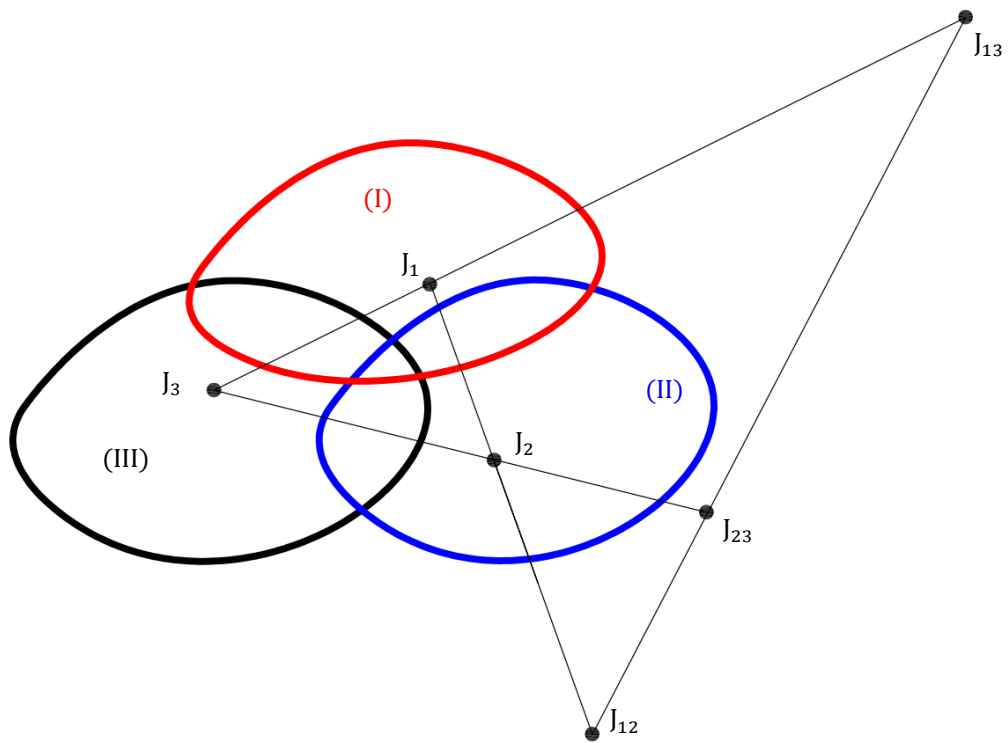


Figura 1.37

De aici rezultă a doua teoremă de coliniaritate a centrelor instantanee de rotație:

În mișcarea plan-paralelă a trei plăci centrele relative de rotație J_{12} , J_{13} , J_{23} sunt coliniare.

Observații:

- dacă un corp este articulat de corpul de reazem aceasta articulație este centru absolut de rotație, iar dacă corpul este simplu rezemat pe corpul de reazem centrul său absolut de rotație se găsește pe dreapta perpendiculară dusă pe suprafața de reazem (fig.1.38)

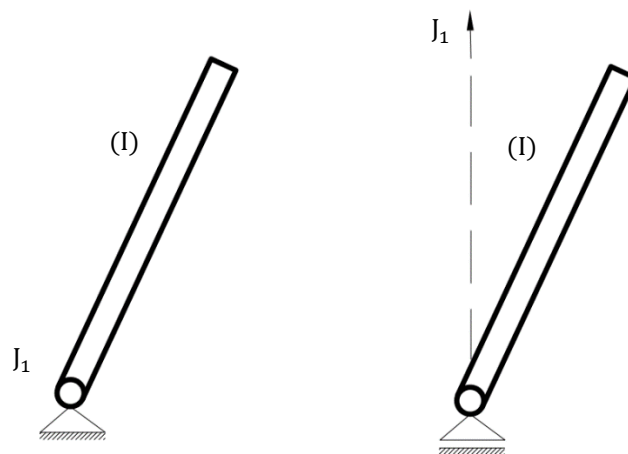


Figura 1.38

- dacă două corpuri sunt articulate între ele punctul de articulație este centru relativ de rotație (fig .1.39)

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică ana

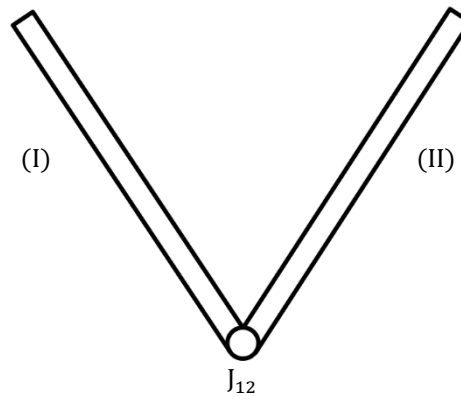


Figura 1.39

- dacă două corpuri sunt legate între ele prin doi pendule punctul de intersecție al direcțiilor pendulilor este centrul relativ de rotație (fig.1.40). Dacă cei doi penduli sunt paraleli centrul relativ de rotație se găsește la infinit.

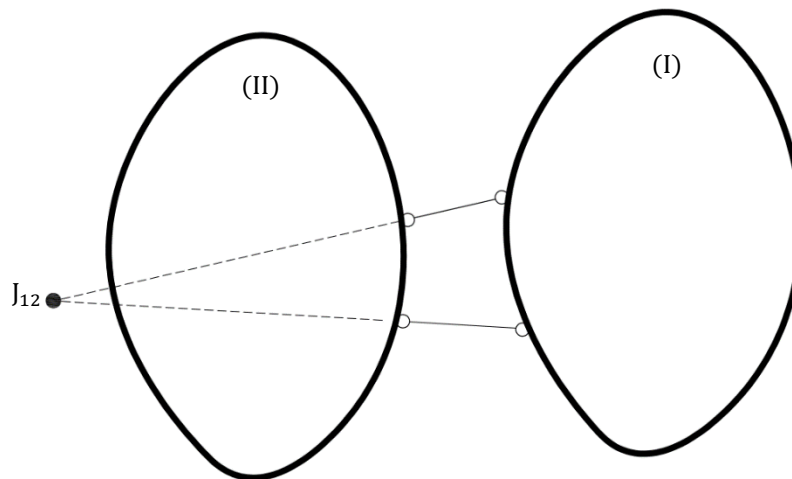


Figura 1.40

- dacă un centru relativ de rotație este la infinit corpurile care formează centrul respectiv execută unul față de celălalt o mișcare de translație
- un sistem cu n corpuri are n centre absolute de rotație și C_n^2 centre relative de rotație

Diagrame de deplasări

O aplicație a mișcării plan-paralele a sistemelor de corpuri o constituie trasarea diagramelor de deplasări elementare verticale și orizontale sistemele aflate în mișcare plană. Aceste diagrame reprezintă variația deplasărilor elementare verticale, respectiv orizontale ale sistemului de corpuri aflat în mișcare plan paralelă. Diagramele se trasează cu ușurință dacă se respectă ordinea operațiilor:

- se determină pozițiile centrelor absolute și relative de rotație conform observațiilor de mai sus și a teoremelor de coliniaritate
- se proiectează pe liniile de referință orizontală și verticală centrele relative și absolute de rotație

Mecanică – Cinematică – Mișcarea sferică

• se imprimă o mișcare compatibilă cu legăturile, sistemului de corpuri cu 1 grad de libertate cinematic (configurația deplasată a sistemului se exprimă în funcție de un parametru geometric care este rotirea elementară $d\theta$ a unuia din corpuri)

- se trasează diagramele deplasărilor elementare verticale respectiv orizontale ale sistemului de corpuri respectând următoarele (fig.1.41):
- în dreptul centrelor absolute deplasările sunt nule
- în dreptul centrelor relative deplasările celor două corpuri care formează centrul relativ sunt egale
- dacă un centru relativ este la infinit diagramele de deplasări ale celor două corpuri sunt paralele

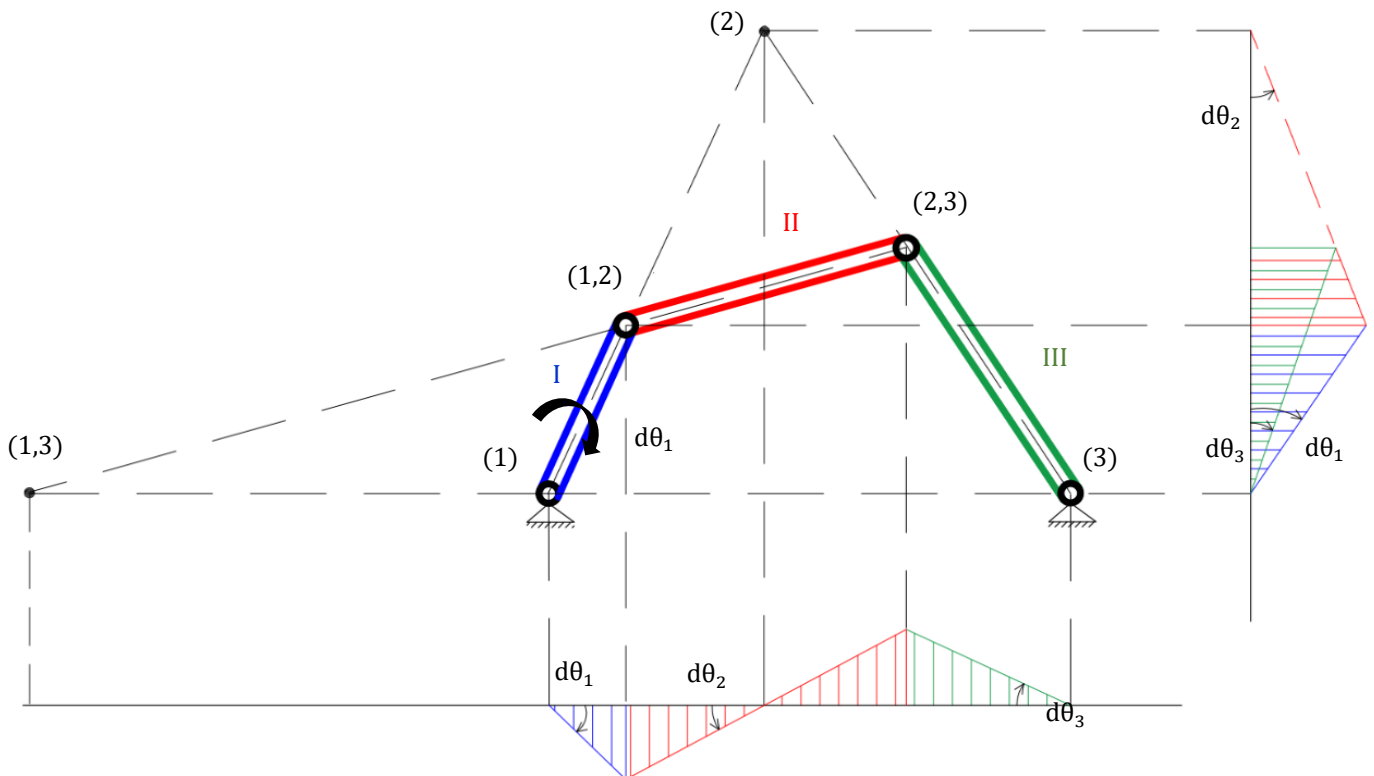


Figura 1.41

Mișcarea de rotație în jurul unui punct fix (mișcarea sferică)

Definiția mișcării

Mișcarea sferică este mișcarea în care un punct al corpului solid rigid rămâne fix în tot timpul mișcării. Mișcarea se raportează la un sistem de referință fix și la un sistem de axe mobil, care se rotește o dată cu corpul. Punctul fix O se alege originea celor două sisteme de referință la care se raportează mișcarea (fig.1.42).

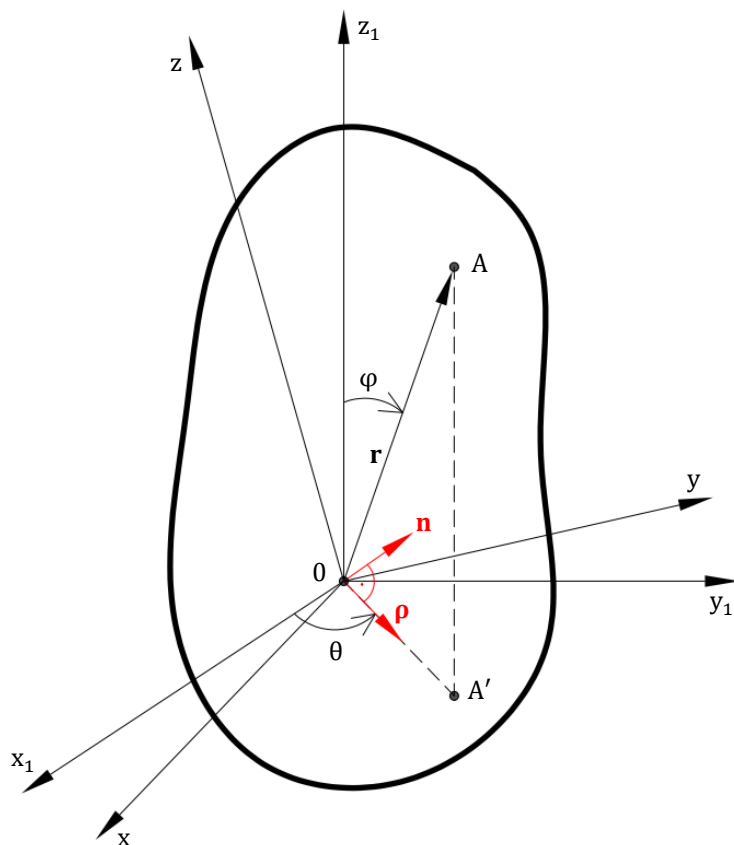


Figura 1.42

Grade de libertate

În această mișcare corpul are trei grade de libertate cinematică. Punctul fix este o articulație sferică care anulează cele trei grade de libertate deplasări lăsând libere rotirile.

Mișcarea sistemului de referință mobil reprezintă mișcarea solidului rigid. Versorii $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sunt vectori care își schimbă orientarea în timp, în schimb modulul rămâne constant.

$$\begin{aligned}\mathbf{i} &= \mathbf{i}(t) \\ \mathbf{j} &= \mathbf{j}(t) \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}(t)\end{aligned}\tag{1.180}$$

Relațiile 1.180 reprezintă ecuațiile finite ale mișcării sferice.

Elementele mișcării

Traectorii

Traectoriile punctelor ce aparțin corpului rigid, în mișcarea sferică sunt curbe situate pe o sferă cu centrul în punctul fix O.

Viteze

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{OA} = OA (\sin \varphi \cos \theta \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{j}_1 + \cos \varphi \mathbf{k}_1)$$

în care $\varphi = \varphi(t), \theta = \theta(t)$.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} = & OA(\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta) \mathbf{i}_1 + \\ & + (\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi \cos \theta) \mathbf{j}_1 + \dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{k}_1\end{aligned}\quad (1.181)$$

Vectorul viteză unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ rezultă din variația ambelor unghiuri $\varphi = \varphi(t)$, $\theta = \theta(t)$ și se scrie într-o primă formă prin relația:

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

49

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{k}_1 + \frac{d\theta}{dt} \mathbf{j}_1 \quad (1.182)$$

Componenta vectorului $\boldsymbol{\omega}$, $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ este orientată după versorul $\mathbf{n}$ (fig 1.42), iar componenta $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ este orientată după versorul $\mathbf{k}_1$ astfel încât vectorul $\boldsymbol{\omega}$ se poate scrie:

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{i}_1 + \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{j}_1 + \dot{\theta} \mathbf{k}_1$$

Efectuând produsul $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OA}$ se obține:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OA} = OA \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ -\dot{\varphi} \sin \theta & \dot{\varphi} \cos \theta & \dot{\theta} \\ \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \end{vmatrix} = \quad (1.183)$$

$$= OA [(\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta) \mathbf{i}_1 + (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi \cos \theta) \mathbf{j}_1 - \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{k}_1]$$

Datorită identității membrului drept din relația (1.182) cu membrul drept din relația (1.183) rezultă că:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{OA}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OA} \quad (1.184)$$

Toate punctele corpului solid rigid au aceeași viteză unghiulară $\boldsymbol{\omega}$, iar relația (1.184) este valabilă pentru orice punct al corpului solid rigid.

Dreapta suport a vectorului $\boldsymbol{\omega}$ se numește axa instantanee de rotație. Vitezele punctelor de pe această axă sunt nule.

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP} = \mathbf{0}$$

deoarece cei doi vectori $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{OP}$ sunt coliniari.

A doua relație pentru vectorul $\boldsymbol{\omega}$:

Versorii variabili $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ se scriu în sistemul de referință fix:

$$\begin{aligned}\mathbf{i} &= \alpha_{11} \mathbf{i}_1 + \alpha_{12} \mathbf{j}_1 + \alpha_{13} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{j} &= \alpha_{21} \mathbf{i}_1 + \alpha_{22} \mathbf{j}_1 + \alpha_{23} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k} &= \alpha_{31} \mathbf{i}_1 + \alpha_{32} \mathbf{j}_1 + \alpha_{33} \mathbf{k}_1\end{aligned}\quad (1.185)$$

În care α_{ij} sunt cosinuşii directori ai axelor mobile în raport cu cele fixe.

Matricea care are ca elemente α_{ij} se numește matrice de rotație.

Matricea de rotație este o matrice unitară ($\det \alpha = 1$).

Relația (1.185) se mai poate scrie sub formă matriceală astfel:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{k}_1 \end{bmatrix} \quad (1.186)$$

Relația este valabilă pentru scrierea oricărui vector $\mathbf{v}$ din sistemul mobil de referință în sistemul fix de referință.

$$\mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v}_1$$

Exprimarea vectorului $\mathbf{v}_1$ funcție de $\mathbf{v}$ se face prin:

$$\mathbf{v}_1 = \alpha^{-1} \mathbf{v}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{i}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} \\ \dot{\mathbf{j}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} \\ \dot{\mathbf{k}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}\end{aligned} \quad (\text{formulele lui Poisson}) \quad (1.187)$$

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

Vectorul viteză se mai poate scrie:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = x \dot{\mathbf{i}} + y \dot{\mathbf{j}} + z \dot{\mathbf{k}} \quad (1.188)$$

$$v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = x \dot{\mathbf{i}} + y \dot{\mathbf{j}} + z \dot{\mathbf{k}} \quad (1.189)$$

Relația se înmulțește succesiv cu $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.
Și se obține:

$$\begin{aligned} v_x &= x \dot{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{i} + y \dot{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{i} + z \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{i} \\ v_y &= x \dot{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{j} + y \dot{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{j} + z \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{j} \\ v_z &= x \dot{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{k} + y \dot{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{k} + z \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.190)$$

Deoarece

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{i}} &\perp \mathbf{i} \\ \dot{\mathbf{j}} &\perp \mathbf{j} \\ \dot{\mathbf{k}} &\perp \mathbf{k} \\ \dot{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{i} &= 0 \\ \dot{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{j} &= 0 \\ \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} &= 0 \end{aligned}$$

Matriceal relația (1.187) se scrie:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{i} & \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{i} \\ \dot{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{j} & 0 & \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{j} \\ \dot{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{k} & \dot{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{k} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.191)$$

în formula vitezelor (1.184), ținând seama că

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$$

obținem

$$v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Astfel rezultă

$$\begin{aligned} v_x &= -y\omega_z + z\omega_y \\ v_y &= x\omega_z - z\omega_x \\ v_z &= -x\omega_y + y\omega_x \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_x & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.192)$$

Comparând relațiile (1.191) și (1.192) rezultă componentele scalare ale vectorului $\boldsymbol{\omega}$,

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{k} = -\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{j} \\ \omega_y &= \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{i} = -\dot{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{k} \\ \omega_z &= \dot{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{j} = -\dot{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{i} \end{aligned} \quad (1.193)$$

Astfel încât rezultă cea de a doua relație pentru vectorul $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{i} + (\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{j} + (\dot{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{k} \quad (1.194)$$

Unghiurile lui Euler

Unghiurile Euler sunt trei unghiuri introduse de către Leonhard Euler pentru a descrie orientarea unui corp solid rigid. Pentru a descrie o astfel de orientare în spațiu sunt necesari trei parametri. Ei pot fi reprezentați în mai multe moduri, unghiurile lui Euler fiind unul dintre ele.

Unghiurile lui Euler reprezintă, trei rotații elementare (rotații în jurul unei singure axe) cu care se mișcă sistemul de referință mobil în raport cu cel fix. Orice rotație poate fi realizată prin compunerea a trei rotații elementare, precum și invers orice rotație poate fi descompusă ca o sumă de trei rotații elementare.

Unghiurile lui Euler sunt:

$$\begin{aligned}\psi &= \psi(t) \\ \theta &= \theta(t) \\ \varphi &= \varphi(t)\end{aligned}\tag{1.195}$$

În care :

ψ se numește unghi de precesie
Mecanica – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

51

θ se numește unghi de nutație

φ se numește unghi de rotație (fig.1.43).

Direcția O_1N se numește linia nodurilor.

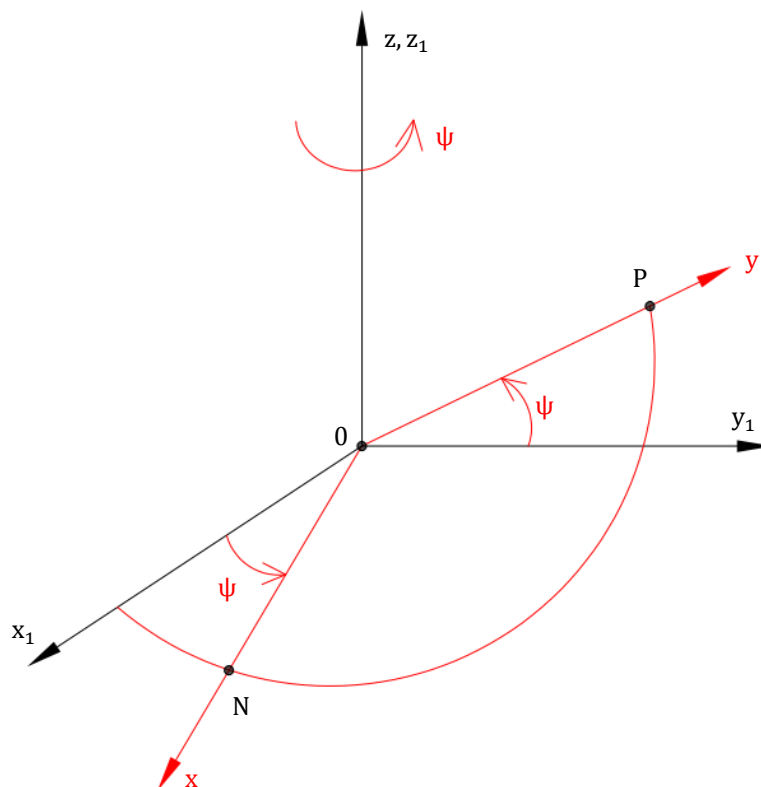
Relațiile 1.195 constituie ecuațiile finite ale mișcării solidului în jurul unui punct fix exprimate în funcție de unghiurile lui Euler.

Vectorul viteză unghiulară ω poate fi scris în funcție de unghiurile lui Euler considerând vitezele unghiulare componente datorate variației acestor unghiuri:

$$\omega = \omega_\psi + \omega_\theta + \omega_\varphi\tag{1.196}$$

în care:

$$\begin{aligned}\omega_\psi &= \dot{\psi} \mathbf{k}_1 \\ \omega_\theta &= \dot{\theta} \mathbf{u}_N \\ \omega_\varphi &= \dot{\varphi} \mathbf{k}\end{aligned}\tag{1.197}$$



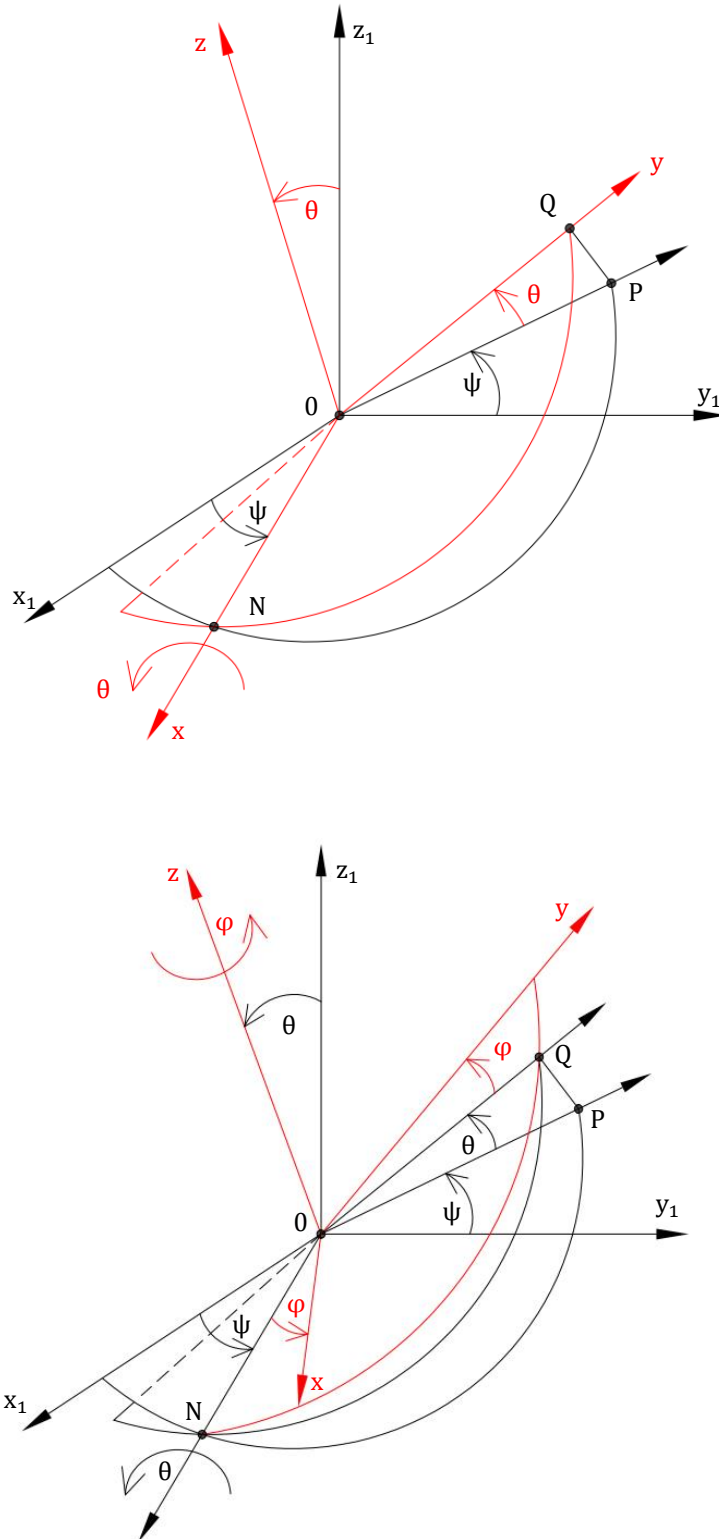


Figura 1.43

Considerând relațiile, (1.197) relația (1.196) se poate scrie :

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{\psi} \mathbf{k}_1 + \omega_{\theta} \mathbf{u}_N + \omega_{\varphi} \mathbf{k} \quad (1.198)$$

Relația (1.198) reprezintă a treia relație analitică pentru vectorul $\boldsymbol{\omega}$ în mișcarea sferică.

Proiectând relația (1.198) pe axele sistemului mobil de referință se obțin componentele scalare ale vectorului $\boldsymbol{\omega}$ în acest sistem.

Se înmulțește scalar relația (1.198) cu versorii $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ succesiv și se obține:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\psi} \mathbf{k}_1 \mathbf{i} + \dot{\theta} \mathbf{u}_N \mathbf{i} + \dot{\phi} \mathbf{k} \mathbf{i} \\
\omega_y &= \dot{\psi} \mathbf{k}_1 \mathbf{j} + \dot{\theta} \mathbf{u}_N \mathbf{j} + \dot{\phi} \mathbf{k} \mathbf{j} \\
\omega_z &= \dot{\psi} \mathbf{k}_1 \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{u}_N \mathbf{k} + \dot{\phi} \mathbf{k} \mathbf{k}
\end{aligned}
\tag{1.199}$$

Știind că,

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

53

$$\mathbf{k} \mathbf{i} = \mathbf{k} \mathbf{j} = \mathbf{u}_N \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{k} \mathbf{k} = 1$$

relațiile (1.199) devin:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\psi} \mathbf{k}_1 \mathbf{i} + \dot{\theta} \mathbf{u}_N \mathbf{i} \\
\omega_y &= \dot{\psi} \mathbf{k}_1 \mathbf{j} + \dot{\theta} \mathbf{u}_N \mathbf{j} \\
\omega_z &= \dot{\psi} \mathbf{k}_1 \mathbf{k} + \dot{\phi}
\end{aligned}
\tag{1.200}$$

Proiectând relația (1.198) pe axele sistemului fix de referință se obțin componentele scalare ale vectorului ω în acest sistem.

Se înmulțește scalar relația cu versorii $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$ succesiv și se obține:

$$\begin{aligned}
\omega_{x_1} &= \dot{\psi} \mathbf{k}_1 \mathbf{i}_1 + \dot{\theta} \mathbf{u}_N \mathbf{i}_1 + \dot{\phi} \mathbf{k} \mathbf{i}_1 \\
\omega_{y_1} &= \dot{\psi} \mathbf{k}_1 \mathbf{j}_1 + \dot{\theta} \mathbf{u}_N \mathbf{j}_1 + \dot{\phi} \mathbf{k} \mathbf{j}_1 \\
\omega_z &= \dot{\psi} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1 + \dot{\theta} \mathbf{u}_N \mathbf{k}_1 + \dot{\phi} \mathbf{k} \mathbf{k}_1
\end{aligned}
\tag{1.201}$$

Știind că

$$\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1 = 1$$

$$\mathbf{u}_N \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1 \mathbf{i}_1 = \mathbf{k}_1 \mathbf{j}_1 = 0$$

relațiile (1.201) devin:

$$\begin{aligned}
\omega_{x_1} &= \dot{\theta} \mathbf{u}_N \mathbf{i}_1 + \dot{\phi} \mathbf{k} \mathbf{i}_1 \\
\omega_{y_1} &= \dot{\theta} \mathbf{u}_N \mathbf{j}_1 + \dot{\phi} \mathbf{k} \mathbf{j}_1 \\
\omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \mathbf{k} \mathbf{k}_1
\end{aligned}
\tag{1.202}$$

distribuția vitezelor

distribuția vitezelor la un moment dat al mișcării este identică cu distribuția vitezelor din mișcarea de rotație în jurul axei instantanee de rotație Δ .

Ecuatiile axei instantanee de rotație Δ sunt:

- în sistemul de referință fix:

$$\frac{x_1}{\omega_{x_1}} = \frac{y_1}{\omega_{y_1}} = \frac{z_1}{\omega_{z_1}} \tag{1.203}$$

- în sistemul de referință mobil:

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \tag{1.204}$$

Vectorul ω fiind variabil în timp ca mărime și orientare rezultă că și axa Δ își modifică poziția în timp.

Locul geometric al pozițiilor succesive ale axei instantanee de rotație Δ în raport cu reperul fix este o suprafață conică cu vârful în O numită axoidă fixă sau con herpolodic, iar locul geometric al pozițiilor succesive ale axei instantanee de rotație Δ în raport cu reperul mobil este tot o suprafață conică cu vârful în O numită axoidă mobilă sau con polodic, a căror ecuații se determină prin eliminarea parametrului t în ecuațiile 1.203 și 1.204 (fig.1.44).

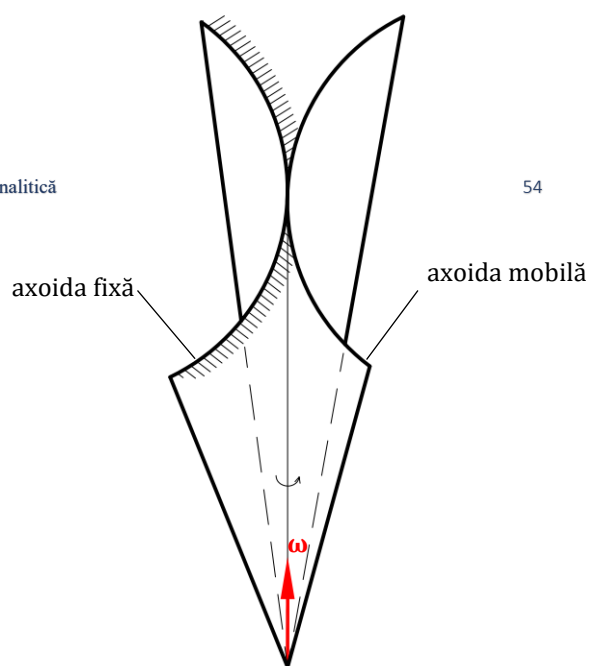


Figura 1.44

Accelerații

Vectorul accelerație unghiulară ϵ este derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului viteză unghiulară ω și va fi dirijat după direcția tangentei la curba traiectoriei vârfului vectorului viteză unghiulară (curba hodograf) (fig.1.45).

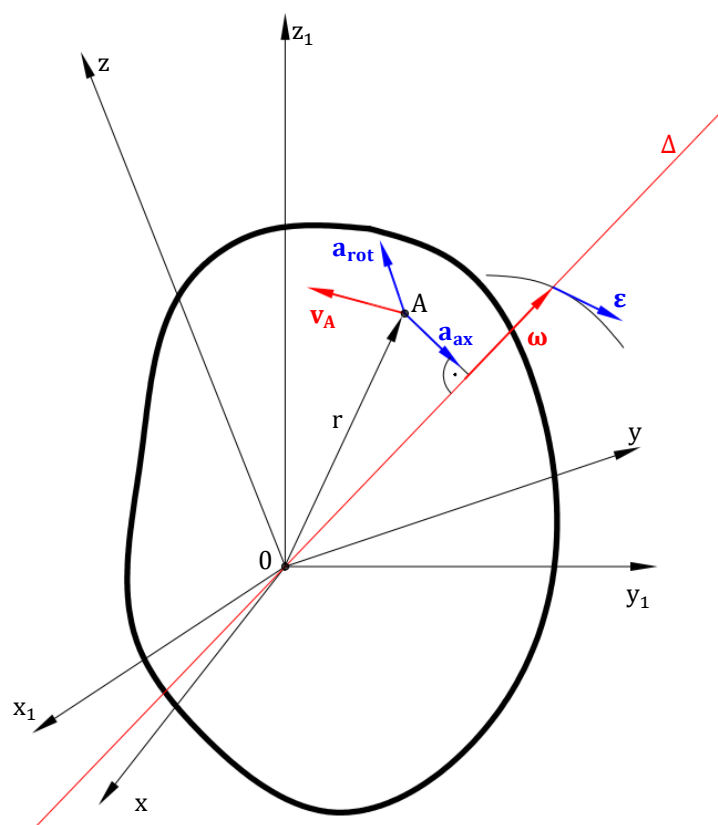


Figura 1.45

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$$

Accelerația punctului A se exprimă prin relația:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{v}_A = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (1.205)$$

Accelerația unui punct ce aparține solidului are 2 componente:
accelerația de rotație

$$\mathbf{a}_{\text{rot}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$$

și accelerația axipetă

$$\mathbf{a}_{\text{ax}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (1.206)$$

Accelerația punctului A se mai poate exprima prin relația:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{\text{rot}} + \mathbf{a}_{\text{ax}} \quad (1.207)$$

Vectorul accelerație nu mai este conținut în planul normal la axa de rotație. Punctele situate pe axa instantanee de rotație nu au accelerațiile nule deoarece pentru ele $\mathbf{a}_{\text{rot}} \neq \mathbf{0}$, dar $\mathbf{a}_{\text{ax}} = \mathbf{0}$. Singurul punct de accelerație nulă este punctul O.

Mișcarea generală

Definiția mișcării

Mișcarea în care solidul poate ocupa orice poziție în spațiu în tot timpul mișcării se numește mișcare generală sau oarecare. Mișcarea se raportează la un sistem de referință fix și la un sistem de axe mobil, legat de corpul în spațiu în mișcare (fig.1.46).

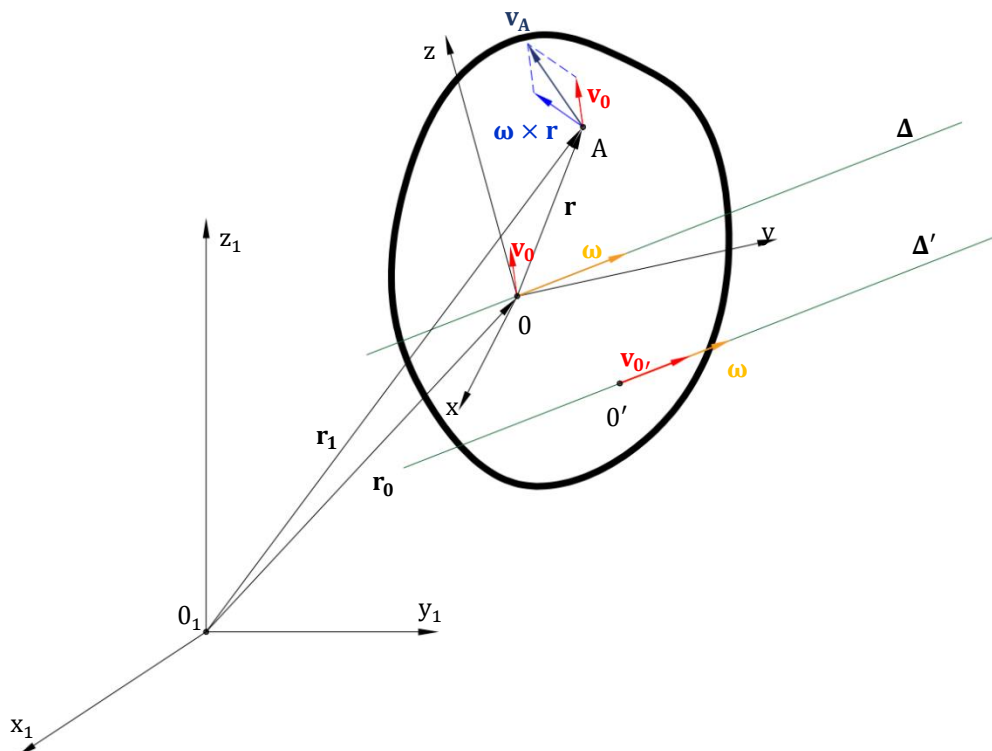


Figura 1.46

Grade de libertate

În această mișcare corpul are 6 grade de libertate cinematică.

Poziția solidului în spațiu în raport cu reperul fix este determinată de poziția punctului O și de orientarea axelor reperului mobil.

Știind că vectorul de poziție al punctului O este $\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{i}_1 + y_0 \mathbf{j}_1 + z_0 \mathbf{k}_1$.

Ecuatiile finite a mișcării generale sunt în acest caz:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0(t) & \mathbf{i} &= \mathbf{i}(t) \\ y_0 &= y_0(t) & \mathbf{j} &= \mathbf{j}(t) \\ z_0 &= z_0(t) & \mathbf{k} &= \mathbf{k}(t) \end{aligned} \quad (1.208)$$

Orientarea axelor reperului mobil se poate exprima și prin unghiurile lui Euler.

În acest caz ecuațiile finite a mișcării generale sunt :

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0(t) & \psi &= \psi(t) \\ y_0 &= y_0(t) & \theta &= \theta(t) \\ z_0 &= z_0(t) & \varphi &= \varphi(t) \end{aligned} \quad (1.209)$$

Elementele mișcării

Traectorii

Traectoriile punctelor ce aparțin corpului rigid, în mișcarea generală sunt curbe oarecare în spațiu.

Viteze

Din figura 1.47 se observă că:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}$$

Iar

$$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (1.210)$$

viteza unghiulară

Vectorul viteză unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ se poate exprima cu relațiile de la mișcarea solidului cu punct fix:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$$

în care

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{k} = -\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{j} \\ \omega_y &= \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{i} = -\dot{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{k} \\ \omega_z &= \dot{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{j} = -\dot{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{i} \end{aligned} \quad (1.211)$$

în sistemul de referință fix vectorul viteză unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ se poate exprima astfel:

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{bmatrix} = \alpha^T \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (1.212)$$

în care α^T este transpusa matricei de rotație.

distribuția vitezelor

vitezele punctele solidului rigid care nu aparțin axei suport a vectorului $\boldsymbol{\omega}$ se calculează după relația (1.210). Din această relație rezultă că distribuția vectorilor viteză din mișcarea generală se obține compunând vectorii viteză $\mathbf{v}_0$ dintr-o mișcare instantanee de translație a corpului solid, cu vectorii viteză $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ dintr-o mișcare instantanee de rotație a corpului solid, în jurul unei axe instantanee ce trece prin O.

Vitezele punctele Q ale solidului rigid care aparțin axei suport a vectorului $\boldsymbol{\omega}$ au vitezele egale cu $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OQ}$, dar cei doi vectori $\boldsymbol{\omega}$ și $\mathbf{OQ}$ fiind coliniari, produsul vectorial $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OQ} = \mathbf{0}$.

Există puncte O' situate într-un plan perpendicular pe vectorul $\boldsymbol{\omega}$ care au vitezele coliniare cu vectorul $\boldsymbol{\omega}$ astfel încât $\mathbf{v}_{Q'} = \lambda \boldsymbol{\omega}$. Dreapta suport a vectorului $\boldsymbol{\omega}$, se numește în acest caz **axa instantanee de rototranslație Δ'** .

$$\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OO'} = \lambda \boldsymbol{\omega}$$

Înmulțind vectorial relația anterioară la stânga cu $\boldsymbol{\omega}$ se obține:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OO'}) = \boldsymbol{\omega} \times \lambda \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{OO'} = \mathbf{0}$$

De unde se obține vectorul de poziție al punctului O'

$$\mathbf{OO'} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0}{\omega^2} \quad (1.213)$$

Ecuția vectorială a axei (Δ) este:

$$\mathbf{r} = \mathbf{OO'} + \lambda \boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0}{\omega^2} + \lambda \boldsymbol{\omega} \quad (1.214)$$

Toate punctele care aparțin suportului vectorului $\boldsymbol{\omega}$ ce trece prin O' au vitezele egale cu viteza punctului O', coliniare cu vectorul $\boldsymbol{\omega}$.

Alegând polul corpului într-un punct O', al axei de rototranslație, distribuția vectorilor viteză din mișcarea generală poate fi reprezentată prin câmpul vectorilor viteză într-o mișcare instantanee de rototranslație a corpului solid.

Accelerații

Accelerația unui punct A oarecare aparținând solidului este

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_{\text{rot}} + \mathbf{a}_{\text{ax}}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (1.215)$$

În care $\mathbf{a}_0$ este vectorul accelerație a polului O, $\mathbf{a}_{\text{rot}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$ este accelerația de rotație, $\mathbf{a}_{\text{ax}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ este accelerația axipetă. Cele două componente $\mathbf{a}_{\text{rot}}$ și $\mathbf{a}_{\text{ax}}$ sunt identice cu componentele vectorului accelerație din mișcarea solidului cu punct fix. Vectorul $\boldsymbol{\varepsilon}$ este vectorul accelerație unghiulară dirijat după tangenta la curba hodograf (traectoria vârfului vectorului $\boldsymbol{\omega}$) a vectorului $\boldsymbol{\omega}$ (fig.1.47).

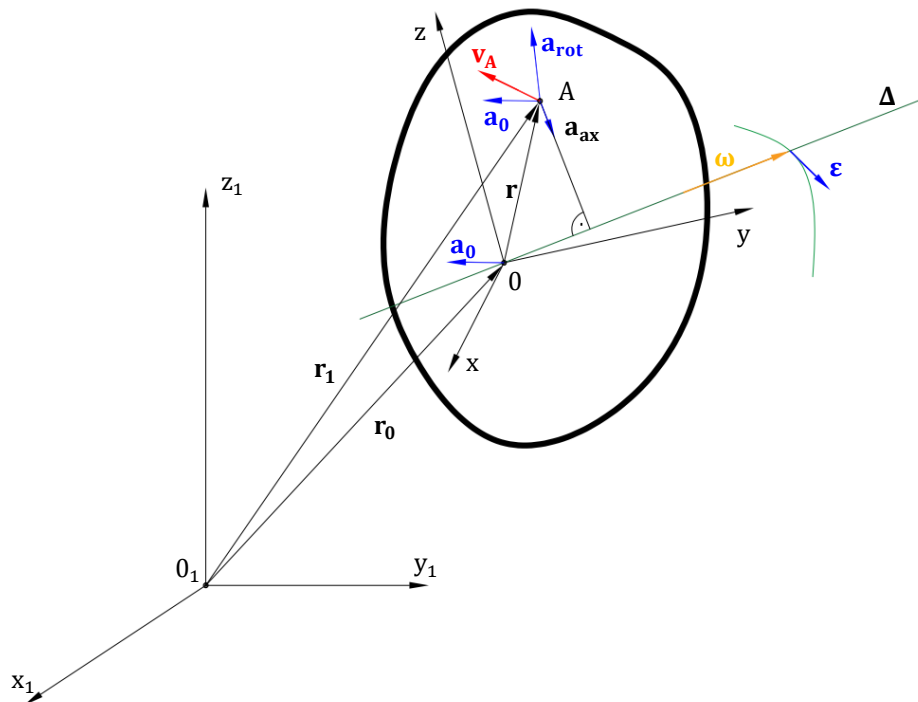


Figura 1.47

distribuția accelerațiilor

Distribuția vectorilor accelerații din mișcarea generală se obține compunând vectorii viteză $\mathbf{a}_0$ dintr-o mișcare instantanee de translație a corpului solid, cu vectorii accelerații $\mathbf{a}_{\text{rot}}$ și $\mathbf{a}_{\text{ax}}$ dintr-o mișcare instantanee de rotație a corpului solid, în jurul unui punct fix, considerând polul O la un moment dat al mișcării punctul fix.

Există un singur punct de accelerație nulă numit **polul accelerațiilor**.

Deplasări elementare

Scriind expresia vitezei unui punct oarecare conform relației (1.209) avem:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Relația (1.216) se mai poate scrie

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \mathbf{r} \text{ sau}$$

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

58

$$d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}_0 + d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \quad (1.216)$$

Relația (1.216) se mai numește relația lui Chasles² și arată că mișcarea generală instantanee poate fi reprezentată ca o succesiune de două mișcări instantanee simple: o translație instantanee și o rotație instantanee în jurul punctului O.

Mișcarea compusă a punctului material

Mișcarea punctului material se raportează la un sistem de referință fix sau absolut $O_1x_1y_1z_1$ și la un sistem de referință mobil sau relativ $Oxyz$.

Mișcarea punctului material față de sistemul de referință fix sau absolut se numește **mișcare absolută**, iar mișcarea punctului material față de sistemul de referință mobil sau relativ se numește **mișcare relativă**, iar **mișcarea de transport** este mișcarea pe care o are punctul material când este considerat ca fiind fix în sistemul de referință mobil.

Mișcarea absolută (compusă), rezultă din **compunerea** mișcării relative, cu mișcarea de transport (fig.1.48).

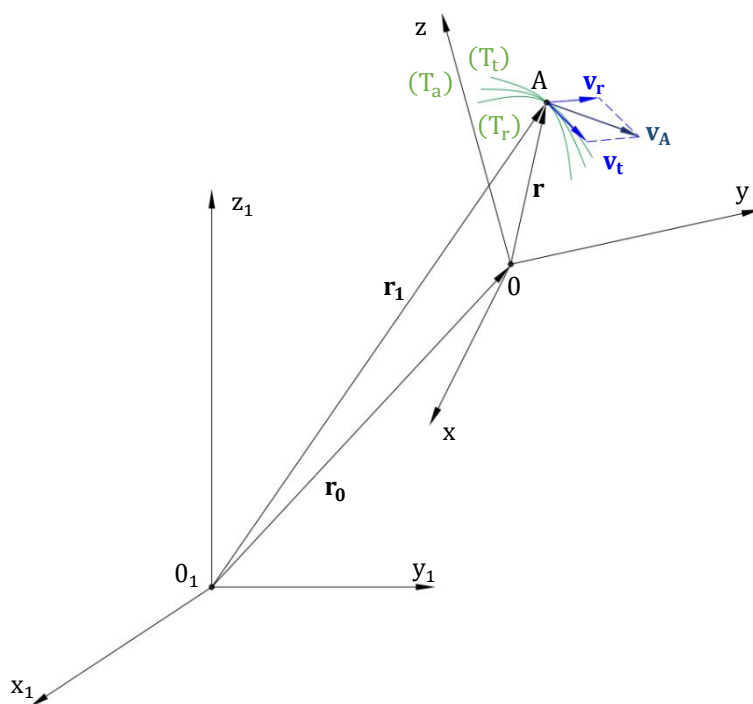


Figura 1.48

Viteze

Numim **viteză absolută** $\mathbf{v}_A$, viteza punctului material viteza în raport cu sistemul de referință $O_1x_1y_1z_1$, **viteză relativă** $\mathbf{v}_r$, viteza punctului material în raport cu sistemul de referință $Oxyz$, iar **viteza de transport** $\mathbf{v}_t$, este viteza punctului material când este considerat ca fiind fix în sistemul de referință mobil (în poziție de repaus relativ). Din figura (1.48) se observă că:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}$$

iar

² Michel Floréal Chasles (1793 – 1880) mathematician francez

$$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (1.217)$$

în care
Mecanica – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

59

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_0$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{v}_r$$

$$\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_t$$

Cu notațiile de mai sus relația (1.217) devine:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_t \quad (1.218)$$

Viteza absolută a punctului material, este egală cu suma dintre viteza relativă și viteza de transport în fiecare moment al mișcării.

Accelerații

Accelerația absolută a punctului material se obține derivând vectorul viteză absolută, ținând seama că vectorii $\mathbf{r}$ și $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$ se derivează după regula de derivare a vectorilor variabili.

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right) \quad (1.219)$$

în care

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{a}_0$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{a}_t$$

$$2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = \mathbf{a}_c$$

Vectorul $\mathbf{a}_c$ se numește accelerația Coriolis³

Accelerația Coriolis este nulă dacă:

- mișcarea de transport este o mișcare de translație ($\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$)
- punctul material este fix în sistemul de referință mobil (repaus relativ, $\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$)
- vectorul $\mathbf{v}_r$ este paralel cu vectorul $\boldsymbol{\omega}$.

Cu notațiile de mai sus relația (1.219) devine:

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c \quad (1.220)$$

Accelerația absolută a punctului material, este egală cu suma dintre accelerația relativă, accelerația de transport și accelerația Coriolis în fiecare moment al mișcării.

³ Gaspard-Gustave de Coriolis sau Gustave Coriolis (1792 – 1843)

Capitolul II - DINAMICĂ

INTRODUCERE ÎN DINAMICĂ

Dinamica este partea mecanicii care studiază, bazându-se pe rezultatele cinematicii, mișcările mecanice ale punctelor materiale, sistemelor de puncte materiale, corpurilor solide, sau ale sistemelor de corpuri, luând în considerare proprietățile lor inerțiale (mase, momente statice, momente de inerție), forțele și momentele care acționează asupra lor sau care rezultă ca efect al mișcării.

Dynamics, branch of physical science and subdivision of mechanics that is concerned with the motion of material objects in relation to the physical factors that affect them: force, mass, momentum, energy. (Encyclopædia Britannica)

Cuvântul dinamică derivă din substantivele grecești δυναμικός - dynamikos (puternic) sau δύναμις - dynamis (putere, energie)

Mișcarea este o proprietate intrinsecă a materiei în sensul că nu exista materie în repaus absolut, după cum nu poate fi concepută mișcarea fără suport material.

Mecanica clasică este constituită pe baza a trei principii fundamentale, numite lex (legi), descrise de I. Newton⁴ în 1687 în lucrarea "Principiile matematice ale filozofiei naturale"

Principiul inerției (lex prima).

Orice corp își menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă atât timp cât asupra sa nu acționează alte forțe sau suma forțelor care acționează asupra sa este nulă. Acest principiu a fost dat inițial, într-o formulare asemănătoare, de Galileo Galilei⁵(1632)

Experiența arată că un corp material se opune acțiunilor exterioare menite să-i schimbe starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă descrisă de principiul inerției.

Această opoziție la schimbarea stării de mișcare sau de repaus reprezintă inerția corpurilor materiale.

Principiul fundamental al dinamicii (lex secunda).

Accelerația unui punct material este proporțională cu forța aplicată și este îndreptată în direcția după care acționează forța.

Newton a introdus masa m a punctului material pentru a exprima această proporționalitate între forță și accelerație:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$$

În teoria sa, Newton consideră masa drept măsură a cantității de materie conținută în corpul material, și element caracteristic al existenței acestuia.

În comentariul făcut de Newton, principiului fundamental al dinamicii, comentariu denumit **Corolarul I**, este precizată modalitatea de compunere a forțelor care acționează asupra unui punct material, și anume regula paralelogramului.

Aceasta era cunoscută în statica încă din antichitate (Heron⁶), dar o formulare precisă a sa a fost data abia de Stevin⁷ (1586)

Principiul paralelogramului (independenței acțiunii forțelor):

⁴ Isaac Newton (1643 – 1727) mathematician, fizician, astronom, alchimist, teolog englez

⁵ Galileo Galilei (1564 – 1642) fizician, matematician, astronom și filosof italian

⁶ Heron din Alexandria (10 - 70 d.Hr.) matematician, enciclopedist grec

⁷ Simon Stevin (1548 - 1620) matematician și inginer flamand

Un punct material aflat sub acțiunea simultană a două forțe descrie (pornind din repaus) diagonala unui paralelogram, având ca laturi aceste forțe, în același timp în care ar descrie separat fiecare latura sub acțiunea forței corespunzătoare.

Principiul acțiunii și reacțiunii (lex tertia).

Oricărei acțiuni îi corespunde întotdeauna o reacțiune egală, și contrară, sau acțiunile reciproce a două puncte materiale sunt întotdeauna egale și îndreptate în sens contrar.

Cu alte cuvinte, fiind date punctele materiale M_1 , M_2 , aflate suficient de departe de alte puncte materiale pentru ca acestea să nu le influențeze mișcarea, dacă M_1 acționează asupra lui M_2 cu forța $\mathbf{F}_{12}$, atunci, și M_2 acționează asupra lui M_1 cu forța $\mathbf{F}_{21}$, astfel încât vectorii $\mathbf{F}_{12}$ și $\mathbf{F}_{21}$ sunt coliniari cu segmentul M_1M_2 , și $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{0}$. $\mathbf{F}_{12}$ este acțiunea respectiv $\mathbf{F}_{21}$ este reacțiunea.

Se cuvine subliniat faptul că avem de a face cu o interacțiune, forțele $\mathbf{F}_{12}$ și $\mathbf{F}_{21}$ fiind aplicate simultan.

Problema fundamentală a dinamicii este următoarea: cunoscând sistemul material (masă, momente de inerție), sistemul de forțe care acționează în orice moment pe sistemul material și condițiile inițiale ale mișcării se cere să se determine mișcarea lui (ecuațiile finite ale mișcării, traiectoria, viteza și accelerația).

Dinamica punctului material

Punctul material (particula), este o noțiune prin care este desemnat un corp material ale cărui dimensiuni și rotații instantanee proprii sunt neglijabile. (vezi cap 1.2.1. introducerea în cinematica punctului material)

De asemeni, prin punct material înțelegem și cea mai "mică" diviziune dintr-un corp material care are proprietățile fizice ale acestuia. El este și cel mai simplu model fizic din mecanica.

Punctul material poate ocupa orice poziție în spațiu și se numește **liber**, sau are restricții de mișcare și se numește **legat**.

Restricțiile se numesc legături, iar legăturile sunt echivalente cu forțe de legătură sau reacțiuni.

Dinamica punctului material liber

Punctul $A(m)$ se mișcă pe traiectorie și este acționat de o forță $\mathbf{F}$ sau de vectorul rezultat al unui sistem de forțe concurente.

Problema fundamentală a punctului material liber este următoarea: fiind dat punctul material de masă m , sistemul de forțe care acționează în orice moment pe punctul material și condițiile inițiale ale mișcării se cere să se determine mișcarea lui (ecuațiile finite ale mișcării, traiectoria, viteza și accelerația).

Scriind relația principiului fundamental al dinamicii rezultă:

$$m \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \quad (2.1)$$

în care $t \geq t_0$.

Relația (2.1) este o ecuație diferențială de ordinul al II-lea, care se integrează ținând cont de condițiile inițiale ale mișcării:

$$t = t_0$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0$$

Aceasta reprezintă o problemă Cauchy⁸ din care rezultă ecuația vectorială finită a mișcării punctului.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (2.2)$$

2.2.1.1 proiectarea relației (2.1) pe axele unui sistem cartezian triortogonal de referință

Dacă

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{y} \mathbf{j} + \ddot{z} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = X \mathbf{i} + Y \mathbf{j} + Z \mathbf{k}$$

⁸ Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) matematician francez.

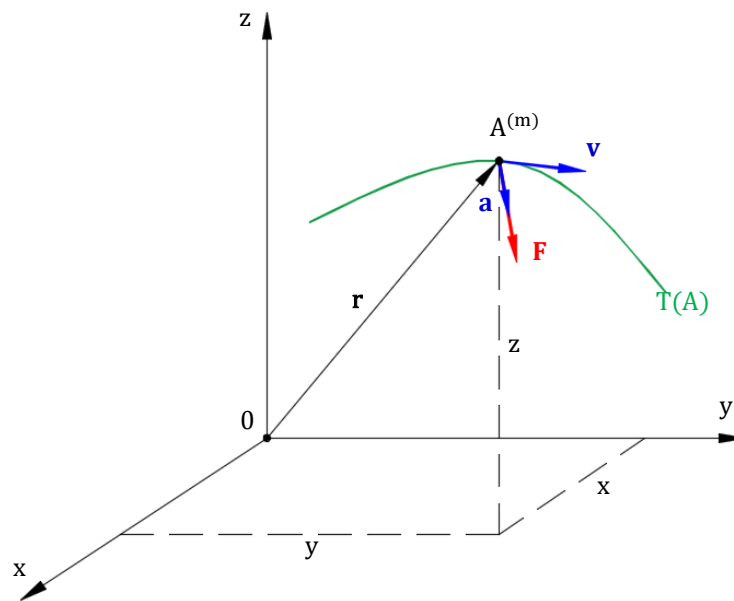


Figura 2.1

Proiectând relația (2.1) pe axele sistemului de referință cartezian triortogonal, se obțin ecuațiile diferențiale ale lui Newton:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{1}{m}X(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m}Y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ \ddot{z} &= \frac{1}{m}Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ t &= t_0, x = x_0, y = y_0, z = z_0 \\ \dot{x} &= v_{0x}, \dot{y} = v_{0y}, \dot{z} = v_{0z}\end{aligned}\tag{2.3}$$

După integrarea relațiilor (2.3) rezultă ecuațiile carteziene finite ale mișcării:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)\tag{2.4}$$

Proiectarea relației (2.1) pe axele sistemului cilindric de coordonate (fig.2.2)

Dacă

$$\mathbf{r}' = r \boldsymbol{\rho} + z \mathbf{k}$$

$$\dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{v} = \dot{r} \boldsymbol{\rho} + r\dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{z} \mathbf{k}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \boldsymbol{\rho} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \mathbf{n} + \ddot{z} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F_\rho \boldsymbol{\rho} + F_n \mathbf{n} + F_z \mathbf{k}$$

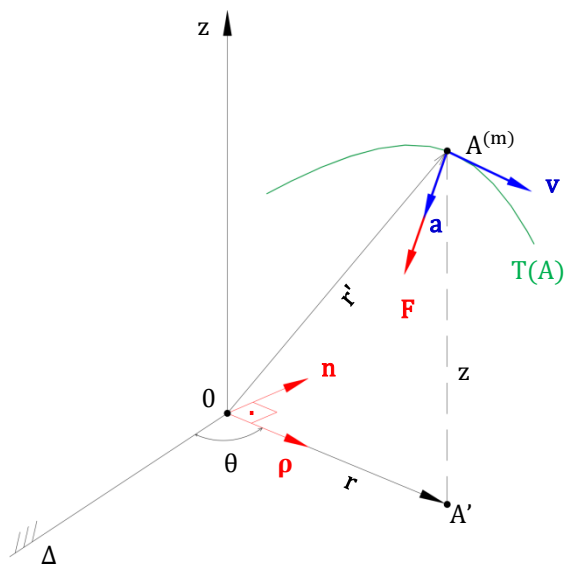


Figura 2.2

Proiectând relația (2.1) pe axele sistemului de referință cilindric rezultă:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= \frac{1}{m}F_{\rho}(t, r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} &= \frac{1}{m}F_{\theta}(t, r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) \\ \ddot{z} &= \frac{1}{m}F_z(t, r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$t = t_0, r = r_0, \theta = \theta_0, z = z_0$$

$$\dot{r} = \dot{r}_0, \dot{\theta} = \dot{\theta}_0, \dot{z} = v_{0z}$$

După integrarea relațiilor (2.5) rezultă ecuațiile finite ale mișcării punctului în coordonate cilindrice:

$$r = r(t), \theta = \theta(t), z = z(t) \quad (2.6)$$

Proiectarea relației (2.1) pe axele triedrului lui Frenet (coordonați intrinseci) (fig.2.3):

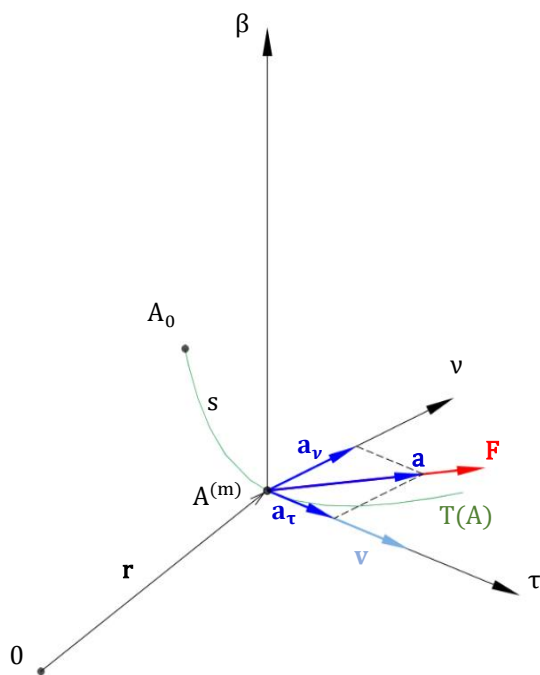


Figura 2.3

Dacă :

$$s = s(t)$$

$$\mathbf{v} = \dot{s} \boldsymbol{\tau}$$

$$\mathbf{a} = \ddot{s} \boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \mathbf{v}$$

$$\mathbf{F} = F_{\tau} \boldsymbol{\tau} + F_{\nu} \mathbf{v} + F_{\beta} \boldsymbol{\beta}$$

Proiectând relația (2.1) pe axele triedrului lui Frenet avem:

$$\begin{aligned} \ddot{s} &= \frac{1}{m} F_{\tau}(t, s, \dot{s}) \\ \frac{\dot{s}^2}{\rho} &= \frac{1}{m} F_{\nu}(t, s, \dot{s}) \\ 0 &= \frac{1}{m} F_{\beta}(t, s, \dot{s}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$t = t_0, s = s_0, \dot{s} = v_0$$

După integrarea relațiilor (2.7) rezultă ecuația finită a mișcării punctului material în coordonate intrinseci:

$$s = s(t) \quad (2.8)$$

Dinamica mișcării centrale a punctului material

Mișcarea centrală este mișcarea pe care o execută un punct material sub acțiunea unei forțe centrale. Forța centrală $\mathbf{F}$, este forța a cărei direcție trece tot timpul printr-un punct fix O. Vectorul de poziție al punctului material A(m) este $\mathbf{r}$. Ecuația diferențială vectorială 2.1 devine:

$$m \ddot{\mathbf{r}} = F \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.9)$$

în care vectorii $\mathbf{F}$ și $\mathbf{r}$ au aceeași direcție, la fel și vectorii $\mathbf{F}$ și $\ddot{\mathbf{r}}$.

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}$$

de unde rezultă că traiectoria punctului material în mișcarea centrală este plană.

Dacă se proiectează relația (2.9) pe axele unui sistem de coordonate polare rezultă:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= \pm \frac{1}{m} F \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Din a două ecuație a sistemului de ecuații (2.10) rezultă:

$$\frac{1}{r} (r^2 \dot{\theta})' = 0 \Rightarrow r^2 \dot{\theta} = C \quad (2.11)$$

Relația (2.11) este valabilă și în momentul inițial al mișcării

$$r_0^2 \dot{\theta}_0 = C$$

Sistemul de ecuații (2.10) se scrie:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= \pm \frac{F}{m} \\ r^2 \dot{\theta} &= C \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \cdot \frac{dr}{d\theta} = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta} = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta} \left[-C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta} \left[-C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \dot{\theta} = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Înlocuind pe $\ddot{r}$ și $\dot{\theta}$ în prima ecuație din sistemul de ecuații (2.12) rezultă:

$$-\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) - r \left(\frac{C}{r^2} \right)^2 = \pm \frac{F}{m}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \mp \frac{Fr^2}{mC^2}$$
(2.13)

Relația reprezintă ecuația diferențială, în coordonate polare a traiectoriei punctului material supus unei forțe centrale numita ecuația lui Binet⁹.

65

Semnul + corespunde unei forțe centrale atractive. Iar semnul - corespunde unei forțe centrale de respingere.

Necunoscuta acestei ecuații este $\frac{1}{r}$. Condițiile inițiale de determinare a constantelor de integrare sunt:

$$\theta = \theta_0$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)_{(\theta=\theta_0)}$$

Se determină astfel ecuația traiectoriei în coordonate polare $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta)$.

Dinamica punctului material sub acțiunea unei forțe elastice

O forță centrală exercitată de un punct (pol) ca forță de atracție asupra punctului material și având mărimea direct proporțională cu distanța de la punct la pol se numește forță elastică (fig.2.4)

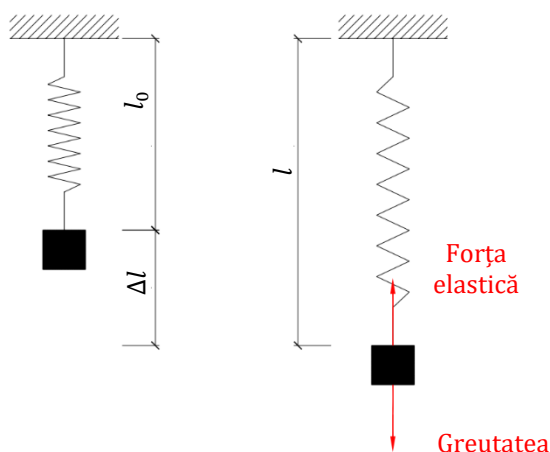


Figura 2.4

$$\mathbf{F} = -k \mathbf{r}$$
(2.14)

în care

$\mathbf{F}$ - este forța elastică

k - este coeficientul de proporționalitate

$\mathbf{r}$ - este vectorul de poziție al punctului material

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -k \mathbf{r}$$

$$m \ddot{\mathbf{r}} + k \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

Dacă se împarte relația cu m și se notează $\frac{k}{m} = \omega^2$ se obține:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega^2 \mathbf{r} = \mathbf{0}$$
(2.15)

Ecuația este o ecuație diferențială vectorială liniară cu coeficienți constanți de ordinul al II-lea, omogenă care se rezolvă căutând soluții de forma:

⁹ Jacques Philippe Marie Binet (1786 - 1856) matematician și astronom francez.

$$\mathbf{r} = \mathbf{C} \cdot e^{\lambda t} \quad (2.16)$$

Înlocuind relația (2.16) în ecuația (2.15) se obține ecuația caracteristică:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad (2.17)$$

Cu rădăcinile:

$$\lambda_{1,2} = \pm i \omega \quad (2.18)$$

Soluția ecuației diferențiale (2.15) se scrie:

$$\mathbf{r} = \mathbf{C}_1 \cdot e^{i\omega t} + \mathbf{C}_2 \cdot e^{-i\omega t} \quad (2.19)$$

Conform formulelor lui Euler¹⁰

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$$

Înlocuind aceste formule în relația (2.19) și schimbând constantele de integrare se obține

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{A}} \cos \omega t + \bar{\mathbf{B}} \sin \omega t \quad (2.20)$$

Constantele de integrare A și B se obțin din condițiile inițiale ale mișcării

La $t = t_0 = 0$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0$$

Și rezultă

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{r}_0$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \quad (2.21)$$

Înlocuind expresiile în obținem ecuația vectorială finită a mișcării:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \cos \omega t + \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (2.22)$$

Proiectând relația pe axele unui sistem de referință obținem componentele scalare ale vectorului $\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \omega t + \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t \\ y &= y_0 \cos \omega t + \frac{v_{0y}}{\omega} \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.23)$$

Proprietățile mișcării

- traiectoria este o curbă plană închisă
- traiectoria nu trece prin polul 0
- mișcarea punctului este periodică

perioada mișcării:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

frecvența mișcării:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

frecvența circulară sau pulsația mișcării este:

$$\omega = 2\pi\nu$$

Dacă $\mathbf{r}_0$ și $\mathbf{v}_0$ sunt doi vectori coliniari mișcarea este rectilinie oscilatorie având traiectoria după direcția comună a celor doi vectori.

¹⁰ Leonhard Euler (1707 – 1783)

Dinamica punctului material legat

Punctul material este în mișcare și este supus la legături care îi suprimă din gradele de libertate.

Problema fundamentală a punctului material legat este următoarea: fiind dat punctul material de masă m , sistemul de forțe care acționează în orice moment pe punctul material, legăturile la care este supus și condițiile inițiale ale mișcării, se cere să se determine mișcarea lui (ecuațiile finite ale mișcării, traiectoria, viteza și accelerația) precum și reacțiunea dinamică.

Ecuația mișcării punctului material legat, rezultă din ecuația fundamentală a dinamicii pentru acest caz:

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{T} \quad (2.24)$$

în care:

$\mathbf{N}$ este forța de legătură, iar $\mathbf{T}$ este forța de frecare.

$|\mathbf{T}| = -\mu' |\mathbf{N}|$ în care μ' este coeficientul de frecare dinamic.

Studiind acest caz în coordonate intrinseci rezultă:

$$\begin{aligned} \ddot{s} &= \frac{1}{m} F_\tau + T \\ \frac{\dot{s}^2}{\rho} &= \frac{1}{m} (F_v + N) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Se obține astfel un sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi cu necunoscutele $s = s(t)$, și $N = N(t)$.

2.2.3. Dinamica mișcării relative a punctului material

Din cinematica mișcării compuse a punctului material se știe că:

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c \quad (2.26)$$

Din principiul al doilea al dinamicii avem:

$$m \cdot \mathbf{a}_a = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{T} \quad (2.27)$$

Înlocuind expresia accelerației absolute în relația rezultă:

$$\begin{aligned} m \cdot (\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c) &= \mathbf{F} \\ m \mathbf{a}_r &= \mathbf{F} - m \mathbf{a}_t - m \mathbf{a}_c = \mathbf{F} + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_c \\ \text{sau} \\ m \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{F} + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_c \end{aligned} \quad (2.28)$$

în care s-a notat:

$\mathbf{F}_t = -m \mathbf{a}_t$ - forța complementară de transport

$\mathbf{F}_c = -m \mathbf{a}_c$ - forța complementară Coriolis¹¹.

Prin integrarea ecuației se obține ecuația finită a mișcării punctului $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

MOMENTE DE INERȚIE

Proprietățile inerțiale ale corpurilor sunt: masa, momentul static și momentul de inerție.

Momentul de inerție este o mărime fizică tensorială care exprimă măsura prin care un corp se opune modificării stării sale de repaus relativ sau de mișcare de rotație uniformă la acțiunea unui moment al forței. Conceptul a fost introdus de Leonhard Euler în lucrarea sa "*Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*" în 1765. Deoarece privește rotația corpurilor, termenul este uneori interpretat ca *inerție rotațională*.

Prima lege a lui Newton, care descrie inerția unui corp în mișcarea rectilinie, poate fi extinsă la inerția unui corp care se rotește în jurul unei axe utilizând momentul de inerție. Astfel, un corp care se rotește cu viteză unghiulară constantă în jurul unei axe va rămâne în această mișcare cu excepția cazului când va fi acționat de un moment exterior.

¹¹ Gaspard-Gustave de Coriolis sau Gustave Coriolis (1792 – 1843)

Momentul de inerție este analog masei (*masă inertială*) din mișcarea rectilinie, care măsoară rezistența (inerția) corpurilor în această mișcare.

Tensorul este o entitate matematică definită în cadrul algebrei și geometriei, frecvent utilizat în fizică, pentru a extinde noțiunile de scalar, vector și matrice.

Pentru a descrie mișcarea unui corp ce nu-și modifică structura în timp, abstract, fizica folosește conceptul de vector.^{Mec.} Pentru corpurile, care își schimbă structura în timp, nu mai este posibilă descrierea mișcării lor prin intermediul vectorilor, deoarece nu mai pot fi reduse la un singur punct reprezentativ, iar pentru care își modifică structura în timp este nevoie să se introducă o nouă noțiune care să păstreze și informația despre structura obiectului. Tensorul este noțiunea care permite descrierea nu doar a traiectoriei corpului, ci și a structurii sale pe parcursul mișcării.

Un tensor poate fi reprezentat ca o matrice multi-dimensională de valori numerice care depinde de sistemul de referință.

Tensorii sunt entități geometrice introduse în domeniile matematicii și al fizicii. Se consideră un corp raportat la un sistem de referință Oxyz.

Se adoptă modelul mecanic al corpului solid rigid de continuu material având masa distribuită în mod continuu și se asociază punctului oarecare A elementul diferențial de masă dm (fig.2.5).

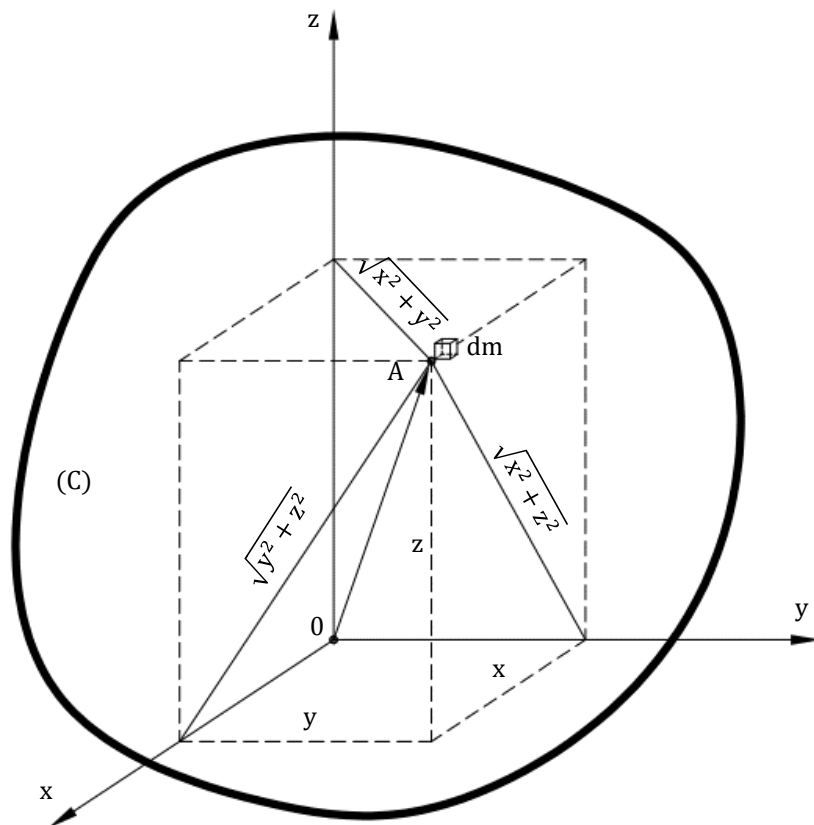


Figura 2.5

Momente de inerție masice

Vectorul de poziție are expresia :

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

căruia i se asociază tensorul de poziție:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Se definesc momentele statice ale corpului în raport cu planele de coordonate:

$$\begin{aligned} S_{y0z} &= \int_C x \, dm \\ S_{x0z} &= \int_C y \, dm \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$S_{x0y} = \int_C z \, dm$$

Tensorul moment static al corpului în raport cu polul O va fi:

$$\mathbf{S}_0 = \int_C \mathbf{r} \, dm = \begin{bmatrix} 0 & -S_{x0y} & S_{x0z} \\ S_{x0y} & 0 & -S_{y0z} \\ -S_{x0z} & S_{y0z} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Teorema momentelor statice are în acest caz expresia:

$$\mathbf{S}_0 = M \cdot \mathbf{r}_c \quad (2.32)$$

unde $\mathbf{r}_c$ este tensorul de poziție al centrului de masă C.

$$\mathbf{r}_c = \begin{bmatrix} 0 & -z_c & y_c \\ z_c & 0 & -x_c \\ -y_c & x_c & 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Și M masa totală a corpului:

$$M = \int_C dm$$

Dacă $O \equiv C$ atunci $\underline{S}_c = \underline{0}$. În sistemul de referință ales se definesc momentele de inerție axiale în raport cu axele de coordonate x, y, z și momentele de inerție centrifugale.

Momente de inerție axiale;

$$\begin{aligned} I_x &= \int_C (y^2 + z^2) \, dm \\ I_y &= \int_C (x^2 + z^2) \, dm \\ I_z &= \int_C (x^2 + y^2) \, dm \end{aligned} \quad (2.34)$$

Momente de inerție centrifugale

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = \int_C xy \, dm \\ I_{xz} &= I_{zx} = \int_C xz \, dm \\ I_{yz} &= I_{zy} = \int_C yz \, dm \end{aligned} \quad (2.35)$$

Tensorul moment de inerție în raport cu polul O este:

$$\mathbf{J}_0 = \int_C \mathbf{r} \mathbf{r}^T \, dm = \int_C \mathbf{r}^T \mathbf{r} \, dm = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Momentele de inerție axiale sunt pozitive, iar momente de inerție centrifugale pot fi și pozitive și negative

Variația tensorului moment de inerție la translația axelor sistemului de referință

Cunoscând tensorul moment de inerție J_0 , se determină tensorul moment de inerție al corpului în raport cu un alt sistem de referință cu originea în punctul O' a cărei axe sunt paralele cu axele sistemului de referință cu originea în punctul O . (fig2.6) Vectorul de poziție al punctului A în sistemul de referință translatat este:

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

70

$$\mathbf{r}' = x' \mathbf{i} + y' \mathbf{j} + z' \mathbf{k}$$

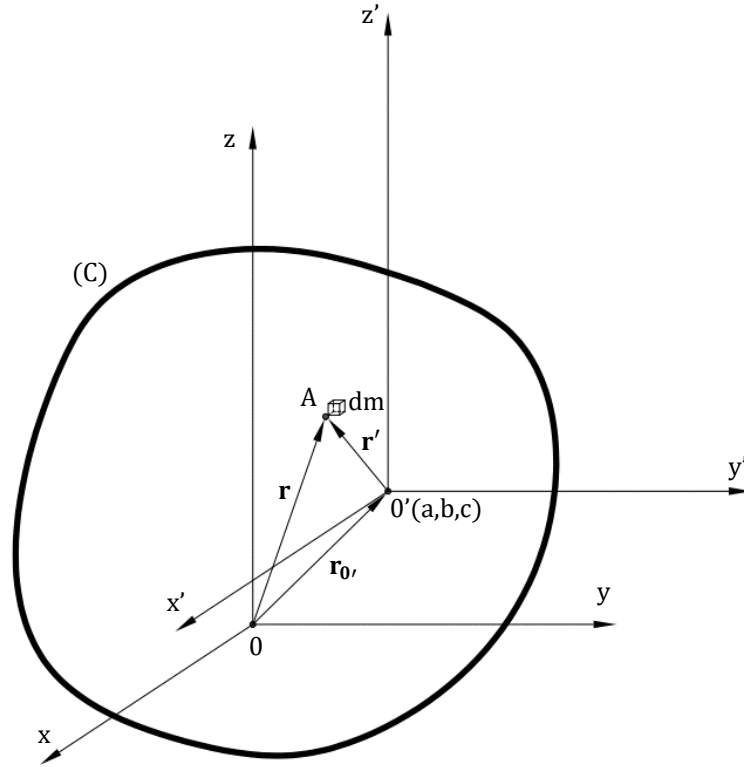


Figura 2.6

Coordonatele punctului O' fiind a, b, c vectorul de poziție al punctului O' este

$$\mathbf{r}_{0'} = a \mathbf{i} + b \mathbf{j} + c \mathbf{k}$$

Tensorii corespunzători celor doi vectori sunt

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{r}_{0'} = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Relațiile între cei trei vectori ca și între tensorii corespunzători sunt

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{0'} + \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{0'}$$

$$J_0 = \int_C \mathbf{r}' (\mathbf{r}')^T dm = \int_C (\mathbf{r}')^T \cdot \mathbf{r}' dm = \begin{bmatrix} J_{x'} & -J_{x'y'} & -J_{x'z'} \\ -J_{y'x'} & J_{y'} & -J_{y'z'} \\ -J_{z'x'} & -J_{z'y'} & J_{z'} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$J_{0'} = \int_C (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0'})^T \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0'}) dm = \int_C (\mathbf{r}^T - \mathbf{r}_{0'}^T) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0'}) dm = \quad (2.40)$$

$$= \int_C \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{r} \, d\mathbf{m} - \left(\int_C \mathbf{r}^T \, d\mathbf{m} \right) \cdot \mathbf{r}_{0'} - \mathbf{r}_{0'}^T \left(\int_C \mathbf{r} \, d\mathbf{m} \right) - \mathbf{r}_{0'}^T \left(\int_C \mathbf{r} \, d\mathbf{m} \right) \cdot \mathbf{r}_{0'}$$

Știind că:

$$\mathbf{S}_0 = \int_C \mathbf{r} \, d\mathbf{m}$$

71

$$\mathbf{S}_0 = \int_C \mathbf{r} \, d\mathbf{m} \quad (2.41)$$

$$M = \int_C d\mathbf{m}$$

Relația 2.41 se scrie

$$\mathbf{J}_{0'} = \mathbf{J}_0 - \mathbf{S}_0^T \cdot \mathbf{r}_{0'} - \mathbf{r}_{0'}^T \cdot \mathbf{S}_0 + \mathbf{r}_{0'}^T \cdot M \cdot \mathbf{r}_{0'} \quad (2.42)$$

Dacă

$O \equiv C$ atunci $\mathbf{S}_C = \mathbf{0}$

Și relația devine

$$\mathbf{J}_{0'} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{r}_{0'}^T \cdot M \cdot \mathbf{r}_{0'} \quad (2.43)$$

Scriind expresiile termenilor ce intervin în relația se obține

$$\begin{bmatrix} J_{x'} & -J_{x'y'} & -J_{x'z'} \\ -J_{y'x'} & J_{y'} & -J_{y'z'} \\ -J_{z'x'} & -J_{z'y'} & J_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -c & -b \\ -c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$$

Identificând termenii din ambii membri ai relației obținem:

$$\begin{aligned} J_{x'} &= J_x + M(b^2 + c^2) \\ J_{y'} &= J_y + M(c^2 + a^2) \\ J_{z'} &= J_z + M(a^2 + b^2) \\ J_{x'y'} &= J_{xy} + Mab \\ J_{y'z'} &= J_{yz} + Mbc \\ J_{z'x'} &= J_{zx} + Mca \end{aligned} \quad (2.44)$$

În general, dacă momentul de inerție al unui corp în raport cu o axă oarecare Δ este J_Δ iar Δ' este o axă paralelă cu Δ , iar distanța dintre cele două axe este d , atunci:

(fig 2.7)

$$J_{\Delta'} = J_\Delta + M \cdot d^2 \quad (\text{fig 2.7})$$

Relația se numește formula lui Steiner¹² pentru translația axelor

¹² Jakob Steiner (1796 – 1863)

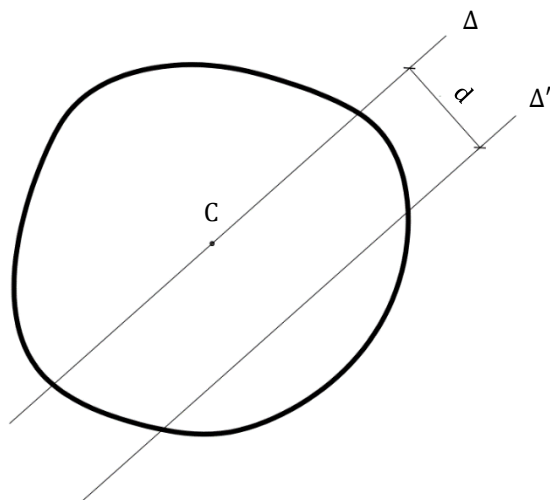


Figura 2.7

Variația tensorului moment de inerție la rotația axelor sistemului de referință

Cunoscând tensorul moment de inerție J_0 , se determină tensorul moment de inerție al corpului în raport cu un alt sistem de referință cu originea în punctul O' a cărui axe x', y', z' sunt rotite în raport cu axele sistemului de referință cu originea în punctul O . (fig. 2.8).

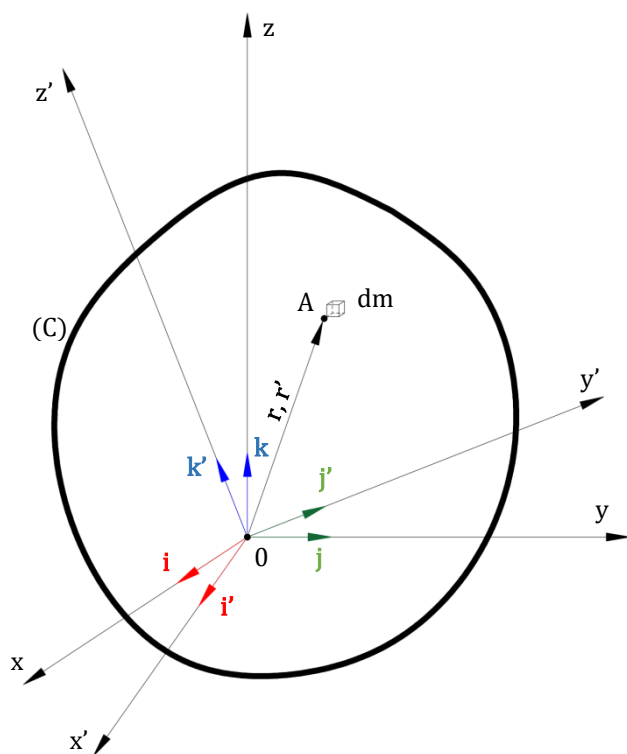


Figura 2.8

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

Versorii axelor de coordonate x, y, z sunt $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ iar ai axelor x', y', z' sunt $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$. Trecerea de la sistemul de referință $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ la sistemul de referință $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ se face utilizând matricea de rotație:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

ale cărei elemente sunt cosinușii directori ai celor două sisteme de axe. Astfel,

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos(i', i) & \alpha_{21} &= \cos(j', i) & \alpha_{31} &= \cos(k', i) \\ \alpha_{12} &= \cos(i', j) & \alpha_{22} &= \cos(j', j) & \alpha_{32} &= \cos(k', j) \\ \alpha_{13} &= \cos(i', k) & \alpha_{23} &= \cos(j', k) & \alpha_{33} &= \cos(k', k) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Astfel

$$\begin{bmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Și coordonatele

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Proprietățile matricei de rotație:

- (i) matricea $\underline{\alpha}$ este unitară $\det(\underline{\alpha}) = 1$.
- (ii) $\alpha^T = \alpha^{-1}$
- (iii) $\alpha^T = \alpha^*$

Unde α^* este matricea adjuncată.

Tensorul de poziție al punctului A în sistemul de axe rotit este:

$$\mathbf{r}' = \alpha \cdot \mathbf{r} \cdot \alpha^T \quad (2.49)$$

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{J}_0 = \int_c (\mathbf{r}')^T \cdot \mathbf{r}' \, dm = \int_c (\alpha \cdot \mathbf{r} \cdot \alpha^T)^T (\alpha \cdot \mathbf{r} \cdot \alpha^T) \, dm = \alpha \left(\int_c \mathbf{r}^T \mathbf{r} \, dm \right) \alpha^T = \alpha \mathbf{J}_0 \alpha^T \quad (2.51)$$

Scriind expresiile termenilor ce intervin în relația se obține:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} J_{x'} & -J_{x'y'} & -J_{x'z'} \\ -J_{y'x'} & J_{y'} & -J_{y'z'} \\ -J_{z'x'} & -J_{z'y'} & J_{z'} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \\ J_{x'} &= J_x \alpha_{11}^2 + J_y \alpha_{12}^2 + J_z \alpha_{13}^2 - 2(J_{xy} \alpha_{11} \alpha_{12} + J_{yz} \alpha_{12} \alpha_{13} + J_{xz} \alpha_{13} \alpha_{11}) \\ J_{y'} &= J_x \alpha_{21}^2 + J_y \alpha_{22}^2 + J_z \alpha_{23}^2 - 2(J_{xy} \alpha_{21} \alpha_{22} + J_{yz} \alpha_{22} \alpha_{23} + J_{xz} \alpha_{23} \alpha_{21}) \\ J_{z'} &= J_x \alpha_{31}^2 + J_y \alpha_{32}^2 + J_z \alpha_{33}^2 - 2(J_{xy} \alpha_{31} \alpha_{32} + J_{yz} \alpha_{32} \alpha_{33} + J_{xz} \alpha_{33} \alpha_{31}) \\ J_{x'y'} &= -(J_x \alpha_{11} \alpha_{12} + J_y \alpha_{12} \alpha_{22} + J_z \alpha_{13} \alpha_{23}) + J_{xy} (\alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{21} \alpha_{12}) + \\ &\quad + J_{yz} (\alpha_{12} \alpha_{23} + \alpha_{31} \alpha_{22}) + J_{xz} (\alpha_{13} \alpha_{21} + \alpha_{21} \alpha_{13}) \text{ etc.} \end{aligned} \quad (2.52)$$

În general, dacă momentul de inerție al unui corp în raport cu polul O este J_0 , iar Δ este o axă oarecare, având cosinușii directori l, m, n în raport cu axele x, y, z :

$$J_\Delta = J_x l^2 + J_y m^2 + J_z n^2 - 2(J_{xy} lm + J_{yz} mn + J_{xz} nl) \quad (2.53)$$

în care

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

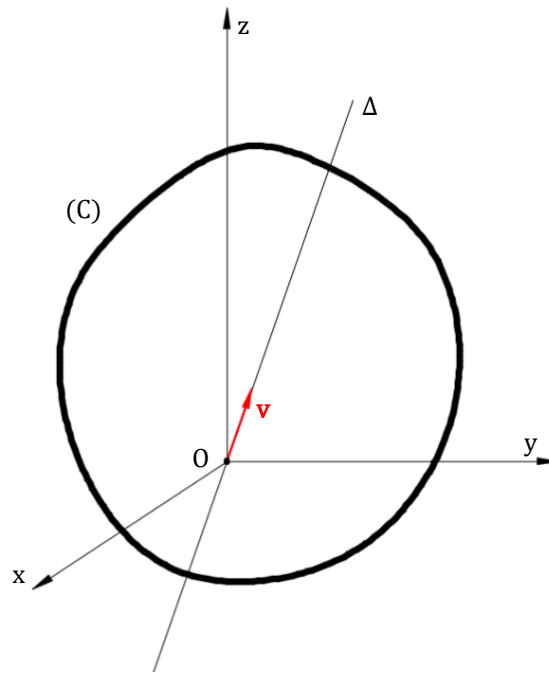


Figura 2.9

Momente de inerție principale. Direcții principale de inerție

Axele pentru care momentele de inerție au valori extreme (maxime sau minime) se numesc axe principale de inerție, iar momentele de inerție în raport cu aceste axe se numesc momente de inerție principale. Planele determinate de axele principale de inerție se numesc plane principale de inerție. (fig.2.10)

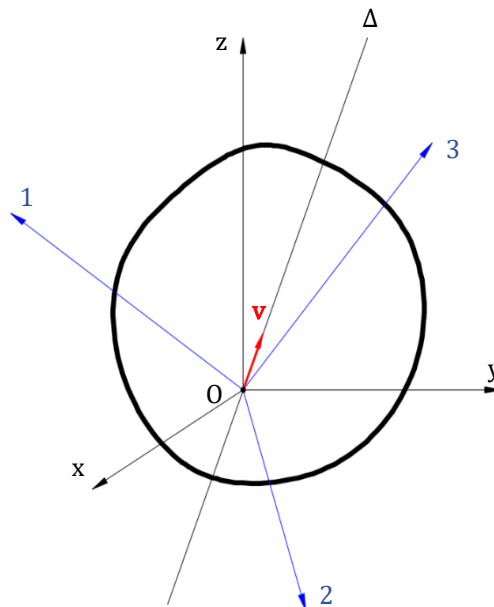


Figura 2.10

Determinarea momentelor de inerție principale se face utilizând teoria multiplicatorilor lui Lagrange:

$$L(l, m, n) = J_{\Delta} - \lambda(l^2 + m^2 + n^2 - 1) \quad (\text{multiplicatorul lui Lagrange}) \quad (2.54)$$

Extremele expresiei coincid cu extremele lui J_{Δ} . Pentru a determina aceste extreme se pun condițiile:

$$\frac{\partial L}{\partial l} = 0, \frac{\partial L}{\partial m} = 0, \frac{\partial L}{\partial n} = 0 \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = \frac{\partial J_{\Delta}}{\partial l} - 2\lambda l = 2J_x l - 2J_{xy} m - 2J_{xz} n - 2\lambda l = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial m} = \frac{\partial J_{\Delta}}{\partial m} - 2\lambda m = 2J_{xy} l - 2J_{yz} n - 2\lambda m = 0 \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial L}{\partial n} = \frac{\partial J_{\Delta}}{\partial n} - 2\lambda n = 2J_{yz} m - 2J_{xz} l - 2\lambda n = 0$$

Se formează sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} (J_x - \lambda) l - J_{xy} m - J_{xz} n = 0 \\ -J_{xy} l + (J_y - \lambda) m - J_{yz} n = 0 \\ -J_{xz} l - J_{yz} m + (J_z - \lambda) n = 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

care mai poate fi scris

$$\begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Notând cu:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Avem

$$\mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} \quad (2.60)$$

Problema extremelor lui J_{Δ} este o problemă de valori proprii¹³. Valorile proprii ale matricei $\mathbf{J}_0$ sunt momentele de inerție principale, iar vectorii proprii asociați vor determina direcțiile principale de inerție. Dacă se notează cu 1,2,3 direcțiile principale și cu J_1, J_2, J_3 momentele de inerție principale atunci:

$$\begin{aligned} J_1 &= \lambda_1 && \text{cu vectorul propriu } \mathbf{v}_1 \\ J_2 &= \lambda_2 && \text{cu vectorul propriu } \mathbf{v}_2 \\ J_3 &= \lambda_3 && \text{cu vectorul propriu } \mathbf{v}_3 \end{aligned} \quad (2.61)$$

Momentele de inerție principale se determină din condiția ca sistemul de ecuații să admită soluții nebanale $l, m, n \neq 0$ și ca urmare determinantul sistemului trebuie să fie egal cu 0.

$$\det(\mathbf{J}_0 - \lambda \cdot \mathbf{I}) = 0 \quad (2.62)$$

$$\begin{vmatrix} (J_x - \lambda) & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & (J_y - \lambda) & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & (J_z - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Dezvoltând determinantul se obține o ecuație de gradul 3 cu necunoscuta λ

$$P(\lambda) = c_1 \lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_3 \lambda + c_4 = 0 \quad (2.63)$$

Numită și ecuația caracteristică a matricei $\mathbf{J}_0$, iar funcția polinomială $P_3(\lambda)$ este polinomul caracteristic.

Soluțiile acestei ecuații $\lambda_1 = J_1, \lambda_2 = J_2, \lambda_3 = J_3$ sunt momentele de inerție principale.

Se rezolvă sistemul de ecuații (2.56) înlocuind succesiv valorile λ_i și se obțin valorile l_i, m_i, n_i .

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, 3 \\ l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 &= 1 \end{aligned}$$

Vectorii proprii sunt reprezentați de versorii $\mathbf{v}_i$ care dau direcțiile principale

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= l_1 \mathbf{i} + m_1 \mathbf{j} + n_1 \mathbf{k} \\ \mathbf{v}_2 &= l_2 \mathbf{i} + m_2 \mathbf{j} + n_2 \mathbf{k} \\ \mathbf{v}_3 &= l_3 \mathbf{i} + m_3 \mathbf{j} + n_3 \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Componentele scalare ale vectorilor proprii sunt elementele matricei spectrale $\underline{V}$

¹³ Fie $\mathbf{A}$ o matrice pătratică de ordinul n cu elemente reale. $\lambda \in \mathbb{C}$ este valoarea proprie a matricei $\mathbf{A}$ dacă $\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ astfel încât $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Unde $\mathbf{I}$ este matricea unitate de ordinul n , iar $\mathbf{x}$ se numește vector propriu al matricei $\mathbf{A}$ asociat valorii proprii λ .

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Matricea spectrală este o matrice unitară ($\det(\mathbf{V}) = 1$).

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

76

Matricea de inerție principală

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{V}$$

Momentul de inerție față de o axă Δ de cosinușii directori l, m, n este în raport cu axele principale:

$$J_\Delta = J_1 l^2 + J_2 m^2 + J_3 n^2 \quad (2.67)$$

Ortogonalitatea axelor principale este dată de ortogonalitatea vectorilor proprii ai matricei.

Momentele de inerție ale unei plăci plane

Se consideră că planul plăcii este xOy ($z = 0$) și că $dm = \rho dA$ cu ρ constant (fig.2.11)

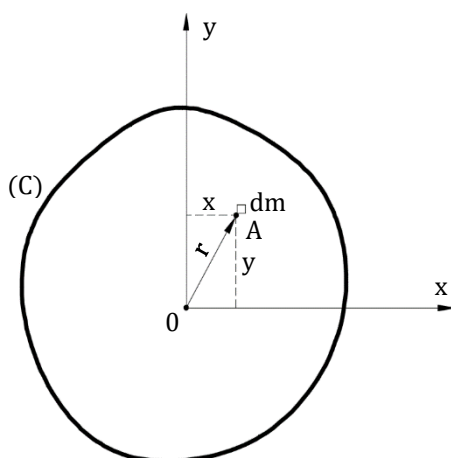


Figura 2.11

$$\begin{aligned} J_x &= \int_C y^2 dm = \rho \int_C y^2 dA \\ J_y &= \int_C x^2 dm = \rho \int_C x^2 dA \\ J_z &= \int_C (x^2 + y^2) dm = J_0 = J_x + J_y \\ J_{xy} &= \int_C xy dm = \rho \int_C xy dA \end{aligned} \quad (2.68)$$

Relațiile (2.67) se pot scrie în general sub forma:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{I} \quad (2.69)$$

în care $\mathbf{I}$ se numește moment de inerție geometric și are următoarele expresii:

$$I_x = \int_C y^2 dA$$

$$I_y = \int_C x^2 dA$$

$$I_z = \int_C (x + y)^2 dA = I_0 = I_x + I_y$$

$$I_{xy} = \int_C xy dA$$

(2.70)

Tensorul moment de inerție geometric:

$$\mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & 0 \\ -I_{yx} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \text{ sau } \mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Variația tensorului moment de inerție la translația axelor sistemului de referință

Translația axelor se face cu vectorul $\mathbf{v} = a \mathbf{i} + b \mathbf{j}$ și considerând pe $c = 0$ în relațiile (2.44) și $O = C$ (centrul de masă) obținem:

$$\begin{aligned} I_{x'} &= I_x + Ab^2 \\ I_{y'} &= I_y + Aa^2 \\ I_{x'y'} &= I_{xy} + Aab \end{aligned} \quad (2.72)$$

unde A este aria suprafeței plane.

Dacă momentul de inerție al unei suprafețe în raport cu o axă oarecare Δ este I_Δ , Δ' este o axă paralelă cu Δ , iar distanța dintre cele două axe este d , atunci

$$I_{\Delta'} = I_\Delta + Ad^2 \quad (2.73)$$

Relația se numește formula lui Steiner pentru translația axelor.

Variația tensorului moment de inerție la rotația axelor sistemului de referință

Particularizând relația (2.51) pentru cazul momentelor de inerție geometrice avem:

$$\mathbf{I}_{0'} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{I}_0 \cdot \boldsymbol{\alpha}^T \quad (2.74)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} - \text{matricea de rotație} \quad (2.75)$$

Înlocuind expresiile termenilor în relația (2.74) obținem:

$$\begin{bmatrix} I_{x'} & -I_{x'y'} \\ -I_{x'y'} & I_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} I_{x'} &= I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2 \cdot I_{xy} \sin \theta \cdot \cos \theta \\ I_{y'} &= I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta - 2 \cdot I_{xy} \sin \theta \cdot \cos \theta \\ I_{x'y'} &= (I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta + I_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Momente de inerție principale. Direcții principale de inerție

Considerând relația (2.51) corespunzătoare momentelor de inerție geometrice rezultă:

$$\mathbf{I}_0 \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad (2.78)$$

unde

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

$$\det(\mathbf{I}_0 - \lambda \cdot \mathbf{I}) = 0 \quad (2.80)$$

$$\begin{vmatrix} I_x - \lambda & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.81)$$

Rezultă ecuația de gradul doi în λ .
Mecanica – Cinematică, dinamica și mecanică analitică

78

$$\lambda^2 - (I_x + I_y)\lambda + I_x I_y - I_{xy}^2 = 0 \quad (2.82)$$

$$\lambda_{1,2} = I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (2.83)$$

Direcțiile principale rezultă din rezolvarea sistemelor:

$$\begin{cases} (I_x - I_1) \cos \alpha_1 - I_{xy} \sin \alpha_1 = 0 \\ -I_{xy} \cos \alpha_1 - (I_y - I_1) \sin \alpha_1 = 0 \end{cases} \quad (2.84)$$

Și

$$\begin{cases} (I_x - I_2) \cos \alpha_2 - I_{xy} \sin \alpha_2 = 0 \\ -I_{xy} \cos \alpha_2 - (I_y - I_2) \sin \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (2.85)$$

Soluțiile sistemelor sunt:

$$\begin{aligned} \tan \alpha_1 &= \frac{I_{xy}}{I_y - I_1} = \frac{I_x - I_1}{I_{xy}} \\ \tan \alpha_2 &= \frac{I_{xy}}{I_y - I_2} = \frac{I_x - I_2}{I_{xy}} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Ortogonalitatea axelor principale este dată de ortogonalitatea vectorilor proprii ai matricei.

Teoremele generale ale dinamicii

Teoremele generale ale dinamicii enunță variația mărimilor cinetice impuls, moment cinetic și energie cinetică atât pentru punctul material cât și pentru sistemele de puncte materiale și corpul solid rigid (CSR) Teoremele generale se deduc din legea a lui Newton exprimând principiul acțiunii forței sub o altă formă.

Teorema de variație a impulsului

Impuls

Punct material

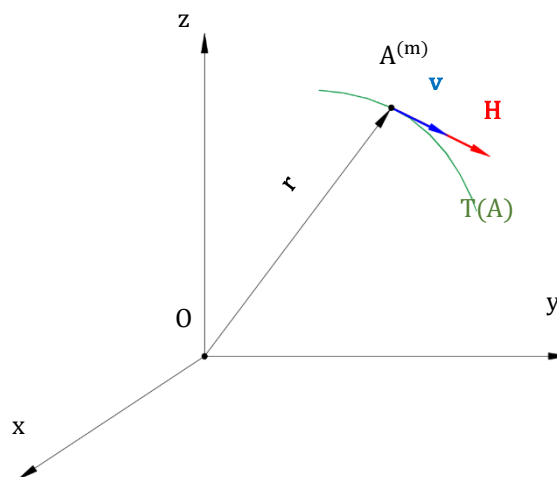


Figura 2.12

Impulsul unui punct material este un vector de expresie:

$$\mathbf{H} = m \cdot \mathbf{v} \quad (2.87)$$

în care

- m este masa punctului material,
- $\mathbf{v}$ este viteza punctului material.

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

Vectorul impuls are aceeași direcție și același sens ca și vectorul viteză (fig. 2.12)⁷⁹

Dacă

$$\mathbf{H} = H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k} \quad (2.88)$$

și

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k} \quad (2.89)$$

atunci:

$$\begin{aligned} H_x &= m \dot{x} \\ H_y &= m \dot{y} \\ H_z &= m \dot{z} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Modulul vectorului impuls al punctului material este:

$$|\mathbf{H}| = m \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (2.91)$$

Dimensional

$$[\mathbf{H}] = M \cdot L \cdot T^{-1} \quad (2.92)$$

- **Sistem de puncte materiale:**

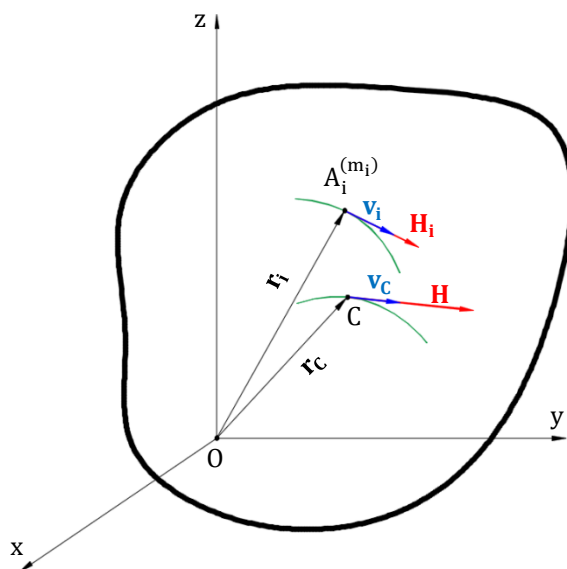


Figura 2.13

Impulsul total al unui sistem de puncte materiale este egal cu suma impulsurilor punctelor din sistem:

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\dot{x}_i \mathbf{i} + \dot{y}_i \mathbf{j} + \dot{z}_i \mathbf{k}) \quad (\text{fig. 2.13}) \quad (2.93)$$

Componentele scalare ale vectorului impuls total al sistemului de puncte materiale sunt în acest caz:

$$\begin{aligned} H_x &= \sum m_i \cdot \dot{x}_i \\ H_y &= \sum m_i \cdot \dot{y}_i \\ H_z &= \sum m_i \cdot \dot{z}_i \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt} M \cdot \mathbf{r}_c = M \cdot \mathbf{v}_c \quad (2.95)$$

$$\mathbf{H} = M \cdot \mathbf{v}_c$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{r}_i = M \cdot \mathbf{r}_c \text{ — din teorema momentelor statice (Mecanică I)} \quad (2.96)$$

Mecanică – Cinergetică, dinamică și mecanică analitică

80

în care

- M este masa sistemului de puncte materiale
- $\mathbf{v}_c$ este viteza centrului de masă al sistemului de puncte materiale

Pentru orice sistem de puncte materiale impulsul total este egal cu impulsul centrului său de masă. Relația este valabilă și pentru CSR.

Componentele scalare ale vectorului impuls total al sistemului de puncte materiale sunt în acest caz:

$$\begin{aligned} H_x &= M \dot{x}_c \\ H_y &= M \dot{y}_c \\ H_z &= M \dot{z}_c \end{aligned} \quad (2.97)$$

Modulul vectorului impuls total al sistemului de puncte materiale este:

$$|\mathbf{H}| = M \sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2} \quad (2.98)$$

Teorema de variație a impulsului

- Punct material

Pornind de la ecuația fundamentală a dinamicii

$$m \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F} \Rightarrow m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \Rightarrow \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} \Rightarrow \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{F}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{F} \quad (2.99)$$

Derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului impuls al unui punct material de masă m este egală, tot timpul mișcării cu forța sau vectorul rezultat al sistemului de forțe care acționează pe punctul material.

- Sistem de puncte materiale

$$\dot{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (2.100)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0} \text{ — vectorul rezultat al forțelor interioare este nul}$$

Derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului impuls total al unui sistem de puncte materiale de masă M este egală, tot timpul mișcării, cu forța rezultantă a sistemului de forțe exterioare care acționează pe sistemul de puncte materiale.

Dacă se ține seama de relația:

$$\mathbf{H} = M \cdot \mathbf{v}_c$$

$$\dot{\mathbf{H}} = M \cdot \mathbf{a}_c = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (2.101)$$

Relația (2.100) exprimă teorema mișcării centrului de masă.

Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale (sau CSR) are legea de mișcare a unui punct în care se consideră concentrată toată masa sistemului acționat de forța rezultantă a sistemului de forțe exterioare.

Teorema de conservare a impulsului

- Punct material

Dacă $\mathbf{F} = \mathbf{0}$,

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{H} = m \cdot \mathbf{v} = \text{constant} \quad (2.102)$$

Dacă forța care acționează punctul material este nulă impulsul punctului se conservă pe toată durata mișcării. Relația (2.102) arată că mișcarea punctului este rectilinie și uniformă.

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

81

Dacă

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{H} = \text{constant} \quad (2.103)$$

Dacă forța rezultantă care acționează sistemul de puncte materiale este nulă, impulsul total al sistemului de puncte materiale se conservă pe toată durata mișcării.

Teorema de variație a momentului cinetic

Moment cinetic

- Punct material:

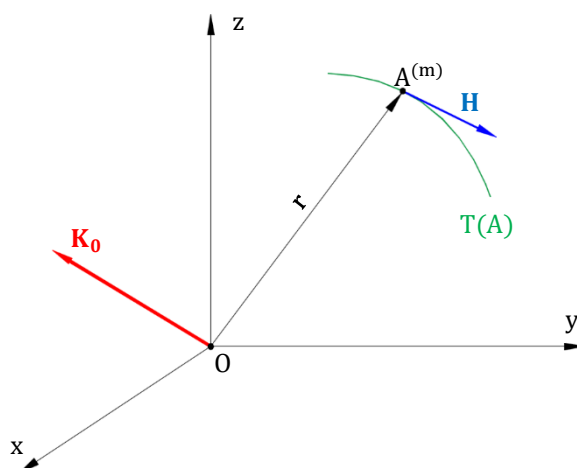


Figura 2.14

Momentul cinetic în raport cu un punct fix O al unui punct material este un vector de expresie:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{H} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} \quad (2.104)$$

în care

$\mathbf{r}$ este vectorul de poziție în raport cu punctul fix O al punctului material,

m este masa punctului material,

$\mathbf{v}$ este viteza punctului material (fig.2.14).

Dacă

$$\mathbf{K}_0 = K_{0x} \mathbf{i} + K_{0y} \mathbf{j} + K_{0z} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} \quad (2.105)$$

și

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k}$$

atunci

$$\begin{aligned} K_{0x} &= m (y\dot{z} - z\dot{y}) \\ K_{0y} &= m (z\dot{x} - x\dot{z}) \\ K_{0z} &= m (x\dot{y} - y\dot{x}) \end{aligned} \quad (2.106)$$

Modulul vectorului moment cinetic al punctului material este:

$$|\mathbf{H}| = m \sqrt{(y\dot{z} - z\dot{y})^2 + (z\dot{x} - x\dot{z})^2 + (x\dot{y} - y\dot{x})^2} \quad (2.107)$$

Dimensional

$$[K_0] = M \cdot L^2 \cdot T^{-1} \quad (2.108)$$

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

82

- sistem de puncte materiale

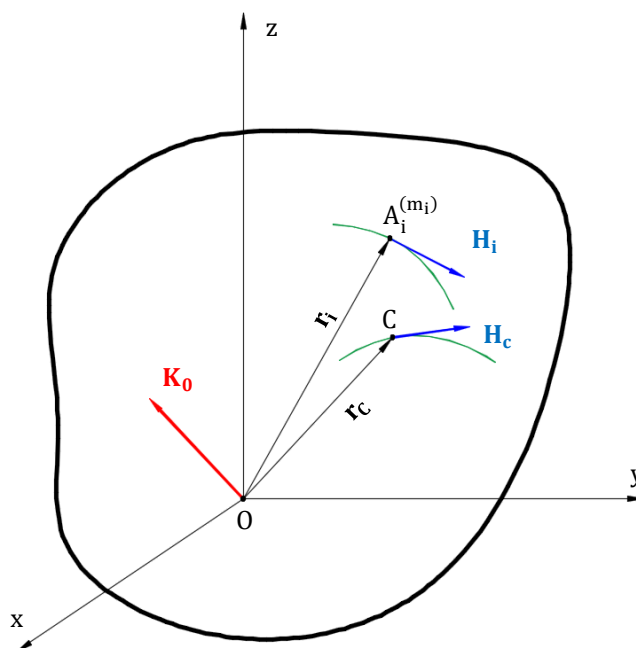


Figura 2.15

Mișcarea este raportată la un sistem de referință inerțial $Oxyz$ și la un sistem de referință mobil $Cx'y'z'$ cu originea în centrul de masă al sistemului de puncte materiale (C) și care este traslatat în raport cu primul sistem de referință.

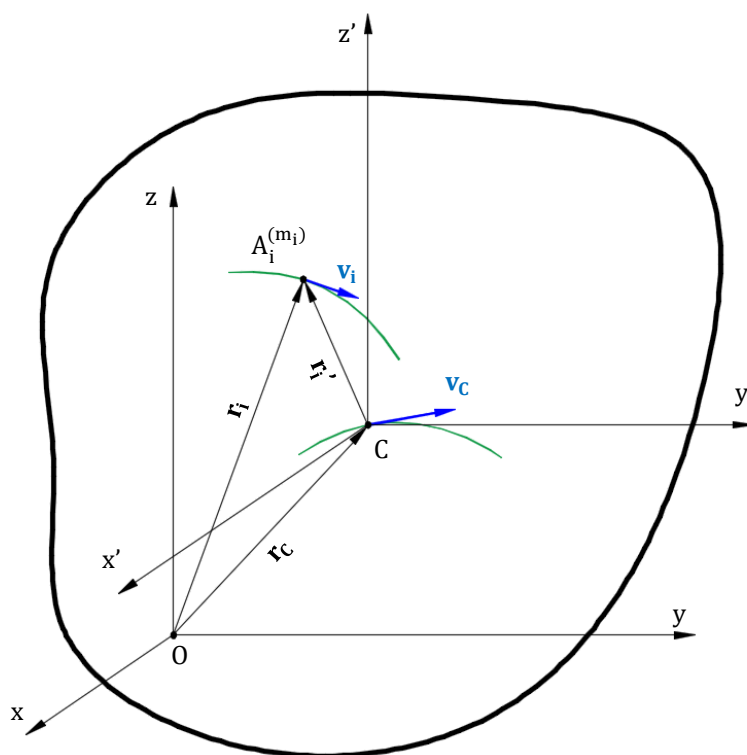


Figura 2.16

Se observă din figura 2.16 că:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_i' \quad (2.109)$$

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică
Derivând relația 2.108 se obține:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_c + \frac{\partial \mathbf{r}_i'}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i' \quad (2.110)$$

Deoarece sistem de referință mobil C x'y'z' se află în mișcare de translație față de primul sistem de referință $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ și relația (2.109) devine

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_c + \dot{\mathbf{r}}_i' \text{ sau}$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i' \quad (2.111)$$

în care $\mathbf{v}_i'$ este viteza punctului A_i în raport cu centrul de masă C.

Momentul cinetic total al sistemului de puncte materiale este:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_{0i} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i') = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_c + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i' \\ \mathbf{K}_0 &= \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{v}_c + \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_c + \mathbf{r}_i') \times \mathbf{v}_i' = \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{v}_c + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_c \times \mathbf{v}_i' + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i' \\ \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i &= M \mathbf{r}_c \\ \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i' &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{r}_i'}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i' = \mathbf{0} \\ S_c &= \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i' \text{ este momentul static al sistemului de puncte în raport cu centrul său de masă;} \\ \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i' &= \mathbf{0} . \\ \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i' &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i' = \mathbf{K}_c \end{aligned}$$

unde $\mathbf{K}_c$ este momentul cinetic total al sistemului de puncte în raport cu centrul său de masă.

Astfel momentul cinetic total al sistemului de puncte $\mathbf{K}_0$ devine:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{r}_c \times M \mathbf{v}_c + \mathbf{K}_c \quad (2.112)$$

Relația exprimă teorema lui Kőnig¹⁴ pentru moment cinetic.

Momentul cinetic total al unui sistem de puncte materiale, în mișcare, în raport cu un pol O este egal cu momentul cinetic al centrului său de masă la care se adaugă momentul cinetic al sistemului în mișcarea sa în raport cu centrul său de masă $\mathbf{K}_c$.

Mișcarea sistemului de puncte materiale față de centrul de masă este o mișcare sferică respectiv o mișcare instantanee în jurul axei instantanee de rotație.

Calculul momentului cinetic al CSR în diferite mișcări

- mișcarea de translație

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c$$

¹⁴ Johann Samuel Kőnig (1712 – 1757) mathematician si teolog german

$$\mathbf{K}_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_c = \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{v}_c = M \mathbf{r}_c \times \mathbf{v}_c = \mathbf{r}_c \times M \mathbf{v}_c$$

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{r}_c \times M \mathbf{v}_c \quad (2.113)$$

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \quad (2.114)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)] = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i] \end{aligned} \quad (2.115)$$

Dacă scriem expresiile analitice ale vectorilor $\boldsymbol{\omega}$ și $\mathbf{r}_i$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} \\ \mathbf{r} &= x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.116)$$

Relația (2.114) devine:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot [(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \cdot (\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}) - \\ &\quad - (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \cdot (x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k})] \end{aligned} \quad (2.117)$$

Scriind expresia analitică pentru $\mathbf{K}_0$ rezultă:

$$\mathbf{K}_0 = K_{0x} \mathbf{i} + K_{0y} \mathbf{j} + K_{0z} \mathbf{k} \quad (2.118)$$

Și efectuând calculele în membrul drept al relației (2.116) rezultă componentele scalare ale vectorului $\mathbf{K}_0$ în mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe.

$$\begin{aligned} K_{0x} &= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z \\ K_{0y} &= -J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z \\ K_{0z} &= -J_{zx} \omega_x - J_{yz} \omega_y + J_z \omega_z \end{aligned} \quad (2.119)$$

Dacă axa de rotație este Oz,

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_y = 0 \\ \omega_z &= \omega \end{aligned}$$

relațiile devin:

$$\begin{aligned} K_{0x} &= -J_{xz} \omega \\ K_{0y} &= -J_{yz} \omega \\ K_{0z} &= J_z \omega \end{aligned} \quad (2.120)$$

Dacă axa Oz este și axă principală de inerție

$$\begin{aligned} J_{xz} &= J_{yz} = 0 \\ K_{0z} &= J_z \omega \end{aligned} \quad (2.121)$$

În general dacă CSR are o mișcare de rotație în jurul unei axe principale de inerție Δ , momentul cinetic este un vector dirijat după axa Δ și are expresia:

$$K_{\Delta} = J_{\Delta} \omega \quad (2.122)$$

Teorema de variație a momentului cinetic

- punct material

$$\dot{\mathbf{K}}_0 = \dot{\mathbf{r}} \times m \mathbf{v} + \mathbf{r} \times m \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r} \times m \mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_0(\mathbf{F}) \quad (2.123)$$

Derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului moment cinetic al unui punct material de masă m aflat în mișcare, în raport cu punctul fix O este egală, tot timpul mișcării cu momentul forței care acționează pe punctul material, în raport cu același punct fix O .

- sistem de puncte materiale

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{K}}_0 &= \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_0, \\
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} &= 0 - \text{momentul forțelor interioare este nul.}
 \end{aligned}
 \tag{2.124}$$

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică 85

Derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului moment cinetic în raport cu punctul fix O al unui sistem de puncte materiale aflat în mișcare, este egală, tot timpul mișcării cu momentul resultant al sistemului de forțe care acționează pe sistemul de puncte materiale, în raport cu același punct fix O.

Teorema de conservare a momentului cinetic

- punct material

Dacă

$$\mathbf{M}_0(\mathbf{F}) = \mathbf{0},$$

$$\dot{\mathbf{K}}_0 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K}_0 - \text{constant} \tag{2.125}$$

Dacă momentul forței care acționează pe punctul material, în raport cu punctul fix O, este nul atunci momentul cinetic al punctului material se conservă pe toată durata mișcării.

- sistem de puncte materiale

Dacă

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K}_0 - \text{constant} \tag{2.126}$$

Dacă momentul resultant al sistemului de forțe exterioare, care acționează sistemul de puncte materiale, este nul în raport cu punctul O, atunci momentul cinetic total al sistemului de puncte materiale se conservă pe toată durata mișcării.

Lucrul mecanic

Lucrul mecanic¹⁵ este o mărime fizică definită ca produsul dintre componenta forței care acționează asupra unui corp în direcția deplasării punctului ei de aplicație și mărimea acestei deplasări. E o mărime ce caracterizează schimbarea stării dinamice a sistemului.

Formula dimensională pentru lucru mecanic se scrie sub forma:

$$[F] = [F] [s] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

În Sistemul Internațional de măsuri forța se măsoară în newtoni și lungimea în metri, rezultă că unitatea de măsură pentru lucru mecanic este:

$$[L] = Nm = J \text{ (joule)}$$

¹⁵Termenul de "lucru" (în limba franceză "travail") al unei forțe a fost utilizat pentru prima oară într-un articol din 1826 al matematicianului și inginerului mecanic francez Gaspard-Gustave Coriolis și apoi în cartea "Du calcul de l'effet des machines" din 1829 a aceluiași autor. Înainte de denumirea dată de Coriolis, Carnot se referea la acest concept cu numele "putere motrice" în lucrarea sa din 1824 "Despre puterea motrice a focului" (Sur la puissance motrice du feu). Denumirea de "lucru mecanic" a fost introdusă de Jean-Victor Poncelet

- **Lucrul mecanic al unei forțe constante**

Se consideră un punct material, care sub acțiunea unei forțe constante $\mathbf{F}$ efectuează o deplasare rectilinie A_1A_2 . Fie $\mathbf{r}_1$ și $\mathbf{r}_2$ vectorii de poziție ai punctelor A_1 și A_2 în raport cu un reper O și $\mathbf{r} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ vectorul deplasare.

Prin definiție L , lucrul mecanic al forței constante $\mathbf{F}$ corespunzător deplasării $\mathbf{r}$, este produsul scalar dintre vectorul forță $\mathbf{F}$ și vectorul deplasare $\mathbf{r}$:

$$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{r}| \cdot \cos(\mathbf{F}, \mathbf{r}) = F \cdot \text{pr}_{\mathbf{F}} \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \text{pr}_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \quad (2.127)$$

Din relația (2.126) se observă că lucrul mecanic al forței constante $\mathbf{F}$ corespunzător deplasării $\mathbf{r}$, este produsul scalar dintre modulul vectorului forță $\mathbf{F}$ și proiecția vectorului deplasare $\mathbf{r}$ pe direcția forței sau produsul scalar dintre modulul vectorului deplasare $\mathbf{r}$ și proiecția vectorului forță $\mathbf{F}$ pe direcția vectorului deplasare $\mathbf{r}$.

- **Lucrul mecanic al unei forțe variabile**

Se consideră un punct material, care sub acțiunea unei forțe variabile $\mathbf{F}$ se deplasează pe o curbă oarecare (C) . Vectorii $\mathbf{r}$ și $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ definesc pozițiile instantanee ale punctului A într-un sistem de axe triortogonal cartezian $Oxyz$. Deplasarea elementară $d\mathbf{r}$ se efectuează în intervalul elementar de timp dt .

Prin definiție dL , lucrul mecanic elementar al forței variabile $\mathbf{F}$ corespunzător deplasării elementare $d\mathbf{r}$ este produsul scalar dintre vectorul forță $\mathbf{F}$ și vectorul deplasare elementară $d\mathbf{r}$:

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.128)$$

În baza relației (1.8) din cinematică

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$$

Formula (2.127) devine:

$$dL = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \quad (2.129)$$

Dacă se scriu expresiile analitice ale vectorilor din formulele (2.127) și (2.128):

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k} \\ d\mathbf{r} &= dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.130)$$

Relația (2.127) devine

$$\begin{aligned} dL &= X dx + Y dy + Z dz \\ dL &= (X \dot{x} + Y \dot{y} + Z \dot{z}) dt \end{aligned} \quad (2.131)$$

Lucrul mecanic total efectuat de forța variabilă $\mathbf{F}$ prin mișcarea punctului A pe curba (C) din poziția A_1 în poziția A_2 este:

$$L = \int_{A_1A_2} dL = \int_{A_1A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A_1A_2} (X dx + Y dy + Z dz) = \int_{A_1A_2} (X \dot{x} + Y \dot{y} + Z \dot{z}) dt \quad (2.132)$$

Un caz special al forței variabile $\mathbf{F}$ îl constituie forța conservativă ¹⁶.

Un câmp de forțe se numește conservativ (potențial) dacă există un câmp scalar U astfel încât:

$$\mathbf{F} = \text{grad } U \quad (2.133)$$

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.134)$$

¹⁶ O forță conservativă ce acționează asupra unui sistem închis efectuează un lucru mecanic, prin care energia este convertită doar între formele cinetică și potențială. Aceasta înseamnă că, pentru un sistem închis, energia mecanică totală se conservă întotdeauna când o forță conservativă acționează asupra sistemului. Deci forța este legată direct de diferența de energie potențială dintre două locuri din spațiu, [a] și poate fi considerată o mărime caracteristică a câmpului potențial, la fel cum direcția și debitul de curgere a unui râu poate fi considerată a fi o mărime caracteristică a unei zone cu relief denivelat. [b]

Forțe conservative sunt gravitația, forța electromagnetică, și forța elastică

$$L = \int_{A_1 A_2} dL = \int_{A_1 A_2} \text{grad } U \, d\mathbf{r} = \int_{A_1 A_2} dU = U_2 - U_1 \quad (2.135)$$

În acest caz lucrul mecanic total depinde numai de poziția inițială și finală a punctului.

- [Lucrul mecanic al unui sistem de puncte materiale](#)

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

87

Lucrul mecanic elementar total al unui sistem de puncte materiale este:

$$dL = dL_{\text{ext}} + dL_{\text{int}} \quad (2.136)$$

în care dL_{ext} este lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare și dL_{int} este lucrul mecanic elementar al forțelor interioare, care în cazul CSR este nul.

Lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare care acționează pe un CSR este:

$$dL_{\text{ext}} = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{r}_c + \mathbf{M}_c \cdot d\boldsymbol{\theta} \quad (2.137)$$

în care $\mathbf{R}$ și $\mathbf{M}_c$ este torsorul în punctul C (centrul de masă al CSR) al sistemului forțelor exterioare care acționează pe CSR.

Și $d\mathbf{r}_c$, $d\boldsymbol{\theta}$ sunt deplasarea respectiv rotația elementară a centrului de masă al CSR.

Energia cinetică¹⁷

- [Punct material](#)

Energia cinetică sau energia de mișcare a unui punct material de masă m , aflat în mișcare de translație cu viteza $\mathbf{v}_i$ în raport cu un sistem de referință inerțial, este o mărimea fizică scalară definită de relația:

$$E = \frac{m v^2}{2} \quad (2.138)$$

- [Sistem de puncte materiale](#)

Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale A_i de mase m_i , aflat în mișcare de translație cu vitezele $\mathbf{v}_i$ în raport cu un sistem de referință inerțial, este o mărimea fizică scalară definită de relația:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 \quad (2.139)$$

Mișcarea este raportată la un sistem de referință inerțial Oxyz și la un sistem de referință mobil Cx'y'z' cu originea în centrul de masă al sistemului de puncte materiale (C) și care este translatat în raport cu primul sistem de referință.

¹⁷ Expresi "energia cinetică" i se atribuie Lordului Kelvin. Adjectivul cinetică provine din substantivul grecesc "kinesis" care înseamnă mișcare

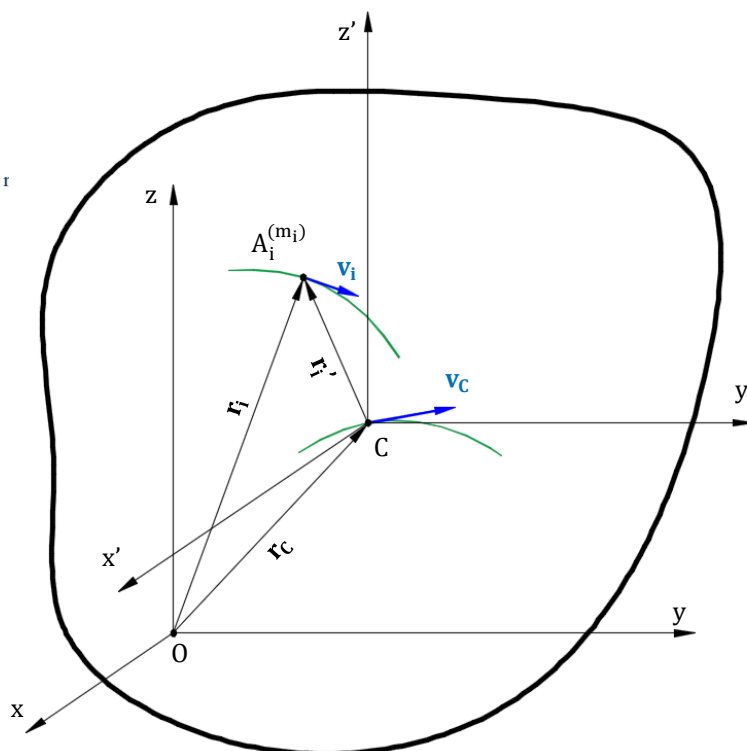


Figura 2.17

Se observă din figura 2.17 că:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i \quad (2.140)$$

Derivând relația (2.122) se obține:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_c + \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \quad (2.141)$$

Deoarece sistem de referință mobil $Cx'y'z'$ se află în mișcare de translație față de primul sistem de referință $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ și relația (2.140) devine:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_i &= \dot{\mathbf{r}}_c + \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial t} \text{ sau} \\ \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_c + \mathbf{v}'_i \end{aligned} \quad (2.142)$$

În care $\mathbf{v}'_i$ este viteza punctului A_i în raport cu centrul de masă C .

Ținând seama de relația (2.141) relația (2.138) devine:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}'_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_c^2 + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}'_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i{}^2 \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_c^2 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \mathbf{v}_c^2 = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_c^2 \\ \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}'_i &= \mathbf{v}_c \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_c \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = 0 \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i{}^2 &= E' \\ \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i &= S_C = 0 \end{aligned}$$

Cu notațiile de mai sus energia cinetică a unui sistem de puncte materiale devine:

$$E = \frac{1}{2} M v_c^2 + E' \quad (2.143)$$

Relația (2.142) reprezintă expresia teoremei lui Kőnig pentru energia cinetică.

Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale, aflat în mișcare, este egală cu energia cinetică a centrului său de masă la care se adaugă energia cinetică al sistemului în mișcarea sa în raport cu centrul său de masă.

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

89

- Calculul energiei cinetice al CSR în diferite mișcări
- mișcarea de translație

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_c^2 = \frac{1}{2} M v_c^2 \quad (2.144)$$

- mișcarea de rotație în jurul unei axe

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 \quad (2.145)$$

Dacă scriem expresiile analitice ale vectorilor $\boldsymbol{\omega}$ și $\mathbf{r}_i$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = (\omega_y z_i - \omega_z y_i) \mathbf{i} + (\omega_z x_i - \omega_x z_i) \mathbf{j} + (\omega_x y_i - \omega_y x_i) \mathbf{k}$$

Relația (2.144) devine:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i [(\omega_y z_i - \omega_z y_i)^2 + (\omega_z x_i - \omega_x z_i)^2 + (\omega_x y_i - \omega_y x_i)^2]$$

După efectuarea calculelor relația (2.145) devine

$$E = \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2) - (J_{xy} \omega_x \omega_y + J_{yz} \omega_y \omega_z + J_{zx} \omega_z \omega_x) \quad (2.146)$$

Dacă axa de rotație este Oz

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_y = 0 \\ \omega_z &= \omega \end{aligned} \quad (2.147)$$

Relația (2.146) devine

$$E = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \quad (2.148)$$

- mișcarea plan paralelă

$$E = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 \quad (2.149)$$

În care J_Δ este momentul de inerție al plăcii în raport cu o axă Δ perpendiculară pe planul mișcării.

- Teorema de variație a energiei cinetice
- punct material

$$E = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$\dot{E} = \frac{1}{2} m \cdot 2 \cdot \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = m \cdot \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = m \cdot \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = m \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Rightarrow dE = \mathbf{F} d\mathbf{r} = dL$$

$$dE = dL \quad (2.150)$$

Variația energiei cinetice a unui punct material de masă m aflat în mișcare, este egală, tot timpul mișcării, cu lucrul mecanic elementar al forței care acționează pe punctul material, prin deplasarea sa elementară $d\mathbf{r}$.

- sistem de puncte materiale

În cazul unui sistem de puncte materiale teorema de variație a energiei cinetice este:

$$dE = dL_{\text{int}} + dL_{\text{ext}} \quad (2.151)$$

în cazul CSR $dL_{\text{int}} = 0$.

Mecanică – Cinematică, dinamică și mecanică analitică

90

$$dE = dL_{\text{ext}} = R \cdot dr_c + M_c \cdot d\theta \quad (2.152)$$

Variația energiei cinetice a unui CSR aflat în mișcare, este egală, tot timpul mișcării, cu lucrul mecanic elementar al tursorului în C (centrul de masă) al sistemului de forțe exterioare care acționează pe CSR.

Expresia integrală a teoremei de variație a energiei cinetice este:

$$E_2 - E_1 = L_{12} \quad (2.153)$$

Diferența energiilor cinetice, ale unui sistem material în mișcare, în două poziții (1) și (2) este egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele exterioare aplicate sistemului prin trecerea acestuia din poziția (1) în poziția (2).

MECANICĂ ANALITICĂ

În anul 1788 Joseph Louis Lagrange (1736-1813) a publicat la Paris lucrarea „Mécanique analytique”, care conține atât contribuțiile lui, cât și sinteza principalelor contribuții ale înaintașilor săi, dintre care amintim pe Jean Bernoulli (1654-1705), Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), Leonhard Euler (1707-1783) și Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). Aceasta poate fi considerată prima lucrare de mecanică analitică, contribuții semnificative fiind aduse apoi și de către Karl Gustav Jacobi (1804-1851), Rowan Hamilton (1805-1865), Jules Henri Poincaré (1854-1912) ș.a.

Mecanica analitică este rezultatul îmbinării conceptelor din mecanica newtoniană cu concepte ale matematicii (calcul diferențial, calcul variațional, ecuații diferențiale, etc). Mecanica analitică este forma cea mai concisă și mai cuprinzătoare a legilor mecanicii, în care se stabilesc metode foarte generale de studiu ale mișcării sistemelor de corpuri, sisteme caracterizate de un număr foarte mare de coordonate.

Astfel mecanica analitică reformulează problema mișcării acestor sisteme reducând numărul necunoscutelor.

Ecuațiile de mișcare din mecanica analitică se exprimă diferit față de cele ale mecanicii newtoniene, dar rezultatul aplicării lor în studiul unui sistem fizic dat este identic cu cel obținut când se utilizează ecuațiile mecanicii newtoniene.

Principiile mecanicii analitice se exprimă într-un mod complex, conținutul lor fizic fiind mai puțin evident față de cel al principiilor mecanicii newtoniene. Marele avantaj al acestor principii este că pot cuprinde nu numai legile mecanicii newtoniene ci și alte legi din fizică.

Legături aplicate sistemelor materiale

Fie un sistem de puncte materiale A_i . Dacă în orice moment t al mișcării, vectorii de poziție ai celor n puncte materiale $\mathbf{r}_i(t)$ ($i = 1, n$) și vitezele lor $\dot{\mathbf{r}}_i(t)$ pot lua valori arbitrare atunci spunem că sistemul este liber. În caz contrar sistemul este supus la legături.

Numim *legătură*, orice condiție de ordin geometric sau cinematic care limitează posibilitățile de mișcare ale unui corp.

Din punct de vedere matematic, o legătură se poate exprima sub forma cea mai generală, astfel:

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n, t) = 0$$

Relația (3.1) reprezintă o condiție de ordin geometric (prin intermediul vectorilor de poziție $\mathbf{r}_i$) și cinematic (prin intermediul vectorilor viteză $\dot{\mathbf{r}}_i$) care limitează posibilitățile de mișcare ale punctelor materiale din sistem.

Orice legătură este echivalentă cu forțe de legătură. Aceste forțe de legătură obligă sistemul material, să se miște pe o anumită curbă sau pe o anumită suprafață, fără a părăsi curba sau suprafața respectivă.

Clasificarea legăturilor

Legăturile pot fi clasificate pe baza a cel puțin trei criterii, și anume:

1. după modul în care sunt exprimate - prin *egalități* sau prin *inegalități*,
2. în funcție de absența sau prezența explicită a *timpului* în expresiile lor;
3. în funcție de absența sau prezența explicită a *vitezei* în expresiile lor;

1. Din punctul de vedere al primului criteriu de clasificare, legăturile pot fi exprimate prin *egalități* - și atunci sunt numite *bilaterale* - sau prin *inegalități* - caz în care sunt numite *unilaterale*.

2. Din punctul de vedere al celui de-al doilea criteriu, legăturile pot conține în expresiile lor analitice timpul în mod explicit - și atunci ele se numesc *reonomice* sau *nestaționare*, sau, dimpotrivă, timpul nu apare în mod explicit în aceste expresii - caz în care legăturile se numesc *scleronome* sau *staționare*.

3. Din punctul de vedere al celui de-al treilea criteriu, legăturile pot fi *geometrice* sau *finite* - dacă în expresiile lor analitice nu intervin vitezele în mod explicit - și, respectiv, *cinematice* sau *diferențiale* - dacă vitezele apar în mod explicit în expresiile lor analitice.

De exemplu relația (3.1) reprezintă o legătură reonomă, bilaterală, diferențială

$$f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n, t) = 0, \quad j = (1, l) \quad 92 \quad (3.1)$$

Relația (3.2) reprezintă o legătură reonomă, bilaterală, geometrică

$$f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0 \quad (3.2)$$

Derivând relația (3.2) în raport cu timpul se obține:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0, \quad (j = 1, l) \quad (3.3)$$

Care arată că orice legătură geometrică poate fi scrisă ca o relație diferențială liniară.

În schimb nu toate legăturile diferențiale pot fi integrate. Acele legături diferențiale care pot fi integrate împreună cu cele geometrice se numesc legături olonome, iar cele ce nu sunt integrabile împreună cu cele unilaterale se numesc neolonome.

Clasificarea deplasărilor

Deplasările sistemelor materiale pot fi finite dacă se efectuează într-un interval finit de timp Δt sau infinitezimale (elementare) dacă se efectuează într-un interval de timp infinitezimal (elementar) dt .

În cele ce urmează ne referim la deplasările elementare.

Deplasările efectuate sub acțiunea forțelor exterioare se numesc deplasări reale. Aceste deplasări se exprimă prin relația:

$$d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i dt \quad (3.4)$$

Deplasările unui sistem material pot fi considerate și cele posibile, compatibile cu legăturile sistemului. Aceste deplasări se numesc deplasări virtuale. Aceste deplasări sunt independente de timp. Spre deosebire de deplasarea reală care este unică deplasările virtuale nu sunt unice, orice deplasare cinematic posibilă este o deplasare virtuală.

Deplasarea reală este una din deplasările virtuale. Deplasările virtuale au expresia:

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta x_i \mathbf{i} + \delta y_i \mathbf{j} + \delta z_i \mathbf{k}$$

În cazul unui punct A pe o suprafață $\varphi(x_i, y_i, z_i, t) = 0$ considerată ca o legătură bilaterală, scleronomă atât deplasările reale cât și cele virtuale au loc în planul tangent la suprafață în punctul A (perpendicular pe gradientul ei).

$$\text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r}_i = 0 \quad \text{și} \quad \text{grad } \varphi \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (3.5)$$

Dacă legătura este reonomă $\varphi(x_i, y_i, z_i, t) = 0$ deplasările reale nu mai au loc în planul tangent pe când deplasările virtuale au loc în planul tangent. Deplasarea reală nu mai este una din deplasările virtuale. Relația (3.5) se va exprima doar pentru deplasările virtuale:

$$\text{grad } \varphi \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (3.6)$$

Principiul lui d'Alembert

Considerând un sistem de puncte materiale A_i de mase m_i , $i = 1, n$, supus la legături și acționat de forțele exterioare $\mathbf{F}_i$. Izolând punctul A_i asupra lui se introduc forțele date $\mathbf{F}_i$, și forțele de legătură $\mathbf{R}_i$. Se aplică principiul al doilea al dinamicii:

$$\mathbf{m}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i \quad (3.7)$$

Relația (3.8) se mai poate scrie:

$$\mathbf{F}_i - \mathbf{m}_i \mathbf{a}_i + \mathbf{R}_i = \mathbf{0}$$

$\mathbf{F}_i' = m_i \mathbf{a}_i$ se numește forță de inerție, astfel încât relația (3.9) se scrie:

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i' + \mathbf{R}_i = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

Relația (3.10) exprimă principiul lui D'Alembert.

Pentru fiecare punct material aflat în mișcare, rezultanta forțelor date $\mathbf{F}_i$, a forței de inerție $\mathbf{F}_i'$ și a forțelor de legătură $\mathbf{R}_i$ este egală cu 0 în orice moment al mișcării.

Principiul lui D'Alembert exprimă o condiție de echilibru dinamic.

Torsorul forțelor de inerție

La un sistem de puncte materiale în mișcare forțele de inerție formează un sistem de forțe distribuite, care se reduc în punctul O la un torsor format din vectorul rezultant $\mathbf{R}'$ și vectorul moment rezultant $\mathbf{M}_0'$ (fig.3.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' &= - \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \mathbf{a}_i = - \sum_{i=1}^n \mathbf{m} \dot{\mathbf{v}}_i = - \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{m} \mathbf{v}_i \right)' = -\dot{\mathbf{H}} \\ \mathbf{M}_0' &= - \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{m}_i \mathbf{a}_i = - \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{m}_i \mathbf{v}_i \right)' = -\dot{\mathbf{K}}_0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

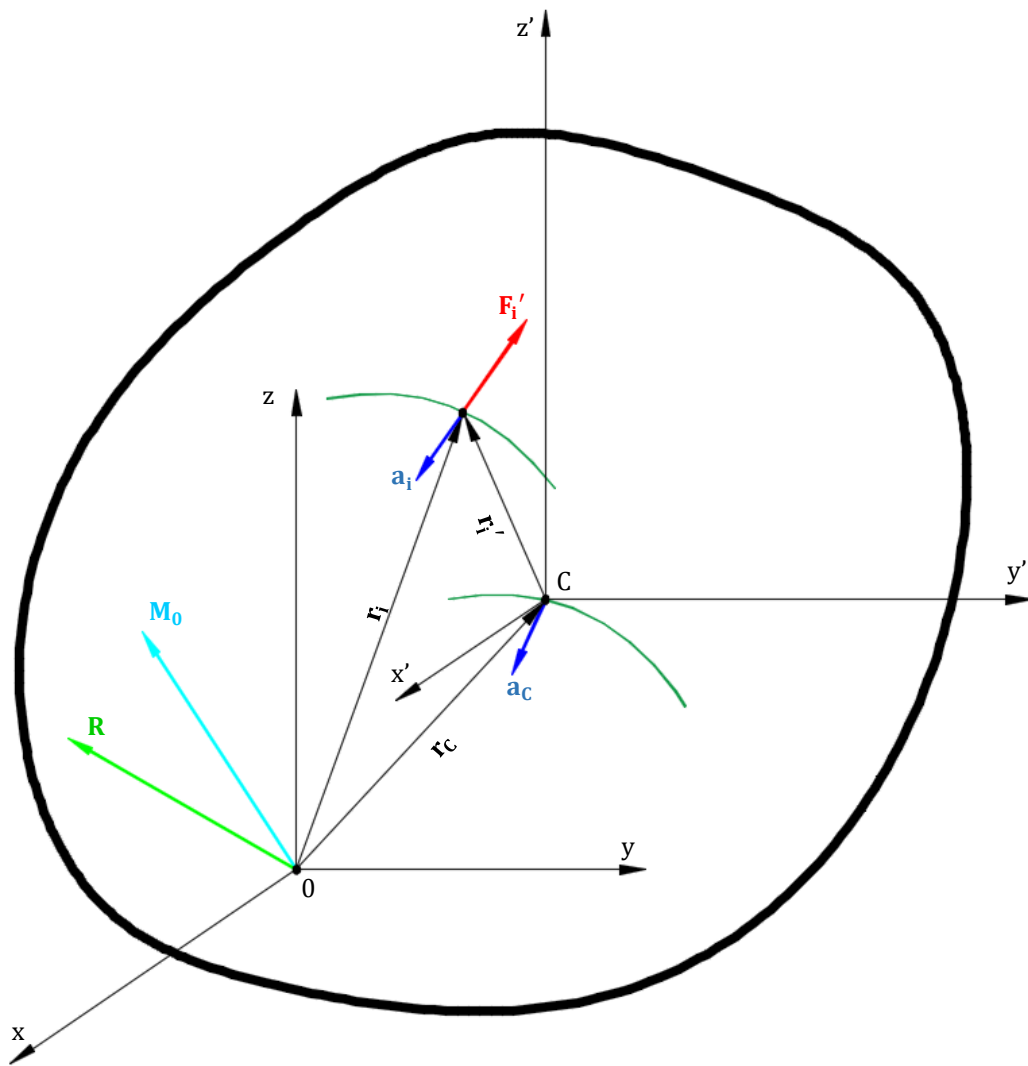


Figura 3.1

Știind că :

$$\begin{aligned} H &= M \cdot v_c \\ K_0 &= r_c \times M v_c + K_c \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} R' &= -\dot{H} = -M a_c \\ M'_0 &= -\dot{K}_0 = -r_c \times M a_c - \dot{K}_c \end{aligned} \quad (3.11)$$

Calculul torsesorului forțelor de inerție în mișcările particulare:

Mișcarea de translație

În raport cu centrul de masă torsesorul forțelor de inerție este format din:

$$\begin{aligned} R' &= -M a_c \\ M'_0 &= -r_c \times M a_c \end{aligned} \quad (3.12)$$

Mișcarea de rotație cu axă fixă

Axa de rotație este axa Oz, iar în acest caz,

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_y = 0 \\ \omega_z &= \omega\end{aligned}$$

$$\mathbf{a}_c = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_c + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y_c & \omega x_c & 0 \end{vmatrix} = -(\varepsilon y_c - \omega^2 x_c) \mathbf{i} + (\varepsilon x_c - \omega^2 y_c) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{M}'_0 = -\dot{\mathbf{K}}_0$$

$$\mathbf{K}_0 = -J_{xz} \omega \mathbf{i} - J_{yz} \omega \mathbf{j} + J_z \omega \mathbf{k}$$

$$\dot{\mathbf{K}}_0 = -J_{xz} \dot{\omega} \mathbf{i} - J_{yz} \dot{\omega} \mathbf{j} - J_{yz} \omega \dot{\mathbf{j}} - J_{yz} \omega \dot{\mathbf{j}} + J_z \dot{\omega} \mathbf{k} \quad (\dot{\mathbf{k}} = 0) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= \varepsilon \\ \dot{\mathbf{i}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} = \omega \mathbf{j} \\ \dot{\mathbf{j}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} = -\omega \mathbf{i}\end{aligned} \quad (3.15)$$

Înlocuind relațiile (3.15) în relația (3.14) rezultă:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{K}}_0 &= -J_{xz} \varepsilon \mathbf{i} - J_{xz} \omega^2 \mathbf{j} - J_{yz} \varepsilon \mathbf{j} + J_{yz} \omega^2 \mathbf{i} + J_z \varepsilon \mathbf{k} \\ \mathbf{M}'_0 &= (-J_{xz} \varepsilon + J_{yz} \omega^2) \mathbf{i} + (-J_{xz} \omega^2 - J_{yz} \varepsilon) \mathbf{j} + J_z \varepsilon \mathbf{k}\end{aligned} \quad (3.16)$$

Componentele scalare ale vectorilor torsesorului de reducere, în O, ale sistemului forțelor de inerție sunt :

$$\begin{aligned}R'_x &= M(\omega^2 x_c + \varepsilon y_c) \\ R'_y &= M(-\varepsilon x_c + \omega^2 y_c) \\ R'_z &= 0\end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}M'_x &= J_{xy} \varepsilon - J_{yz} \omega^2 \\ M'_y &= J_{xz} \omega^2 + J_{yz} \varepsilon \\ M'_z &= -J_z \varepsilon\end{aligned} \quad (3.18)$$

Dacă axa oz este axă principală de inerție atunci

$$\begin{aligned}x_c &= y_c = 0 \\ R'_x &= R'_y = R'_z \\ J_{xz} &= J_{yz} = 0 \\ M'_x &= M'_y = 0 \\ M'_z &= -J_z \varepsilon\end{aligned} \quad (3.19)$$

Mișcarea plan paralelă

$$\begin{aligned}R' &= -H = -ma_c \\ R'_x &= M(\omega^2 x_c + \varepsilon y_c) \\ R'_y &= M(-\varepsilon x_c + \omega^2 y_c) \\ R'_z &= 0 \\ M'_0 &= -\dot{\mathbf{K}}_0 \\ \mathbf{K}_0 &= -J_{xz} \omega \mathbf{i} - J_{yz} \omega \mathbf{j} + J_z \omega \mathbf{k} \\ M'_x &= J_{xz} \varepsilon - J_{yz} \omega^2 \\ M'_y &= J_{xz} \omega^2 + J_{yz} \varepsilon \\ M'_z &= -J_z \varepsilon\end{aligned} \quad (3.20)$$

Principiul lui d'Alembert se folosește în cadrul metodei cineto statice pentru rezolvarea unor tipuri de aplicații de dinamică:

Etapele de rezolvare a aplicațiilor folosind metoda cineto-statică sunt următoarele:

- se face un studiu cinematic în care determină numărul gradelor de libertate ale sistemului și tipul mișcării care se efectuează
- se fac eventualele compuneri de mișcări
- se separă corpurile sistemului și se face schema forțelor date, de inerție și reacțiuni care acționează pe fiecare corp
- se scriu ecuațiile de echilibru cineto static pentru fiecare corp din care rezultă un sistem de ecuații al cărui necunoscute sunt accelerațiile corpurilor și forțele de legătură
- se rezolvă sistemul de ecuații determinând necunoscutele aplicației

Principiul lucrului mecanic virtual

Lucrul mecanic virtual este produsul dintre vectorul forță și vectorul deplasare virtuală:

$$\delta L_i = \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \quad (3.21)$$

Scriind principiul lui d'Alembert pentru punctul A_i al unui sistem de puncte materiale de mase m_i avem:

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{F}'_i + \mathbf{R}_i = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

Pentru toate punctele sistemului se poate scrie:

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}'_i + \mathbf{R}_i) = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

Înmulțind relația (3.23) cu $\delta \mathbf{r}_i$ rezultă:

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}'_i + \mathbf{R}_i) \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0} \text{ sau} \quad (3.24)$$

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}'_i) \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0} \quad (3.25)$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n \lambda \cdot \text{grad } \varphi_j \cdot \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0}; \text{ cei doi vectori } \mathbf{R}_i \\ = \lambda \cdot \text{grad } \varphi_j \text{ și } \delta \mathbf{r}_i \text{ fiind perpendiculari} \quad (3.26)$$

Relația (3.24) se mai poate scrie:

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}'_i) \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

Principiul lucrului mecanic virtual se poate enunța astfel:

În cazul unui sistem de puncte materiale în mișcare forțele date $\mathbf{F}_i$ și forțele de inerție $\mathbf{F}'_i$ efectuează în orice moment al mișcării un lucru mecanic virtual nul, pentru orice deplasare dată sistemului compatibilă cu legăturile sale, dacă legăturile sunt ideale (fără frecare).

Unui sistem material cu m grade de libertate i se pot da m deplasări virtuale independente. Fiecărui grad de libertate îi corespunde o ecuație de lucru mecanic virtual nul. În aceste ecuații accelerațiile punctelor intervin ca necunoscute.

Principiul lucrului mecanic virtual se aplică și sistemelor materiale aflate în repaus. În acest caz forțele de inerție $\mathbf{F}_i'$ sunt nule.

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

Mecanică – cinematică, dinamică și mecanică analitică

97

Condiția ca un sistem material să fie în repaus este ca lucrul mecanic virtual al forțelor date să fie nul, pentru orice deplasare dată sistemului compatibilă cu legăturile sale, dacă legăturile sunt ideale (fără frecare).

Principiul lucrului mecanic virtual se folosește în cadrul metodei deplasărilor virtuale cu care se rezolvă trei tipuri de aplicații:

- aplicații de dinamică
- aplicații de statică
- aplicații pentru determinarea forțelor de legătură

Etapele de rezolvare a aplicațiilor folosind metoda deplasărilor virtuale sunt următoarele:

- se face un studiu cinematic în care determină numărul gradelor de libertate ale sistemului și tipul mișcării care se efectuează
- se fac eventualele compuneri de mișcări
- se face schema forțelor date și de inerție care acționează pe sistemul material
- se face schema deplasărilor virtuale pentru fiecare grad de libertate al sistemului
- se scriu ecuațiile de lucru mecanic virtual al forțelor date și de inerție corespunzătoare fiecărui grad de libertate din care rezultă un sistem de ecuații al cărui necunoscute sunt accelerațiile sistemelor materiale
- se rezolvă sistemul de ecuații determinând necunoscutele aplicației